Equazione di Poisson.

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

23 maggio 2017

Equazione di Poisson, caso univariato.

Problema.

Consideriamo di seguito una sottoclasse dei problemi al contorno

$$\boxed{\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = g(x), \ x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}} \tag{1}$$

Supponiamo

- $[a, b]$ *sia un intervallo limitato,*
- $q \in C^{(0)}([a, b])$, $q(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a, b]$,
- $g \in C^{(0)}([a, b])$.

Nota.

Per una dimostrazione di esistenza, unicità e regolarità della soluzione y, *si consulti [1, p.671].*

Equazione di Poisson, caso univariato.

Consideriamo quale esempio il caso particolare di

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = g(x), \ x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \quad (2)$$

cioè

$$\boxed{\begin{cases} -y''(x) + cy(x) = f(x), \ x \in (a, b), \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}} \quad (3)$$

con

- $[a, b]$ sia un intervallo limitato,
- $c > 0$,
- $f \in C^{(0)}([a, b])$.

Questo problema si dice di Poisson univariato.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Supponiamo che la soluzione u del problema di Poisson univariato, appartenga a $C^4([a,b])$. Allora dallo sviluppo di Taylor centrato in x, abbiamo

$$y(x+h) = y(x) + hy^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}y^{(2)}(x) + \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_1),$$

$$y(x-h) = y(x) - hy^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}y^{(2)}(x) - \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_2),$$

e quindi sommando membro a membro, dal teorema della media, per qualche $\xi \in (a,b)$,

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2 y^{(2)}(x) + \frac{h^4}{12}y^{(4)}(\xi),$$

da cui l'appross. della derivata seconda con le differenze centrate

$$\boxed{y^{(2)}(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.} \qquad (4)$$

Equazione di Poisson, caso univariato.

Allora, il problema di Poisson univariato, può essere discretizzato utilizzando le differenze centrate, ricavando

$$\boxed{-\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}+cy(x)\approx -y^{(2)}(x)+cy(x)=f(x)}$$

con $y(t)=0$ se t non appartiene ad (a,b).
Consideriamo ora la discretizzazione equispaziata dell'intervallo $[a,b]$

$$x_i = a+ih,\ 0\leq i\leq n+1$$

con

$$h=\frac{b-a}{n+1}.$$

Equazione di Poisson, caso univariato.

Essendo, come visto,

$$\boxed{-\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}+cy(x) \approx -y^{(2)}(x)+cy(x)=f(x)}$$

con $y(t)=0$ se t non appartiene ad (a,b), riscrivendo le equazioni relativamente ai punti $x=x_i$, intendiamo approssimare $y(x_k)$ con u_k risolvente il sistema di equazioni

$$\boxed{-\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}+cu_k=f(x_k), \quad k=1,\ldots,n} \tag{5}$$

dove $u_0=u_{n+1}=0$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Dopo facili conti, tali equazioni lineari possono essere riscritte come

$$\boxed{\frac{1}{h^2}(-u_{k+1} + (2 + ch^2)u_k - u_{k-1}) = f(x_k),} \tag{6}$$

con $u_0 = u_{n+1} = 0$, ed essere convenientemente definite matricialmente come $Au = b$, dove A è la matrice tridiagonale

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + ch^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + ch^2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 + ch^2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + ch^2 \end{pmatrix}$$

e $b_k = f(x_k)$ per $k = 1, \dots, n$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Esempio

Vediamo un esempio, per $n = 4$, in cui i punti $x_k = x_0 + kh$ sono equispaziati e $x_0 = a$, $x_5 = b$ (cioè $h = (b-a)/5$).
Da $u_0 = y(a) = 0$, $u_5 = y(b) = 0$, da (6)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}(-u_2 + (2 + ch^2)u_1 - \cancel{u_0}) &= f(x_1), & (7)\\
\frac{1}{h^2}(-u_3 + (2 + ch^2)u_2 - u_1) &= f(x_2), & (8)\\
\frac{1}{h^2}(-u_4 + (2 + ch^2)u_3 - u_2) &= f(x_3), & (9)\\
\frac{1}{h^2}(-\cancel{u_5} + (2 + ch^2)u_4 - u_3) &= f(x_4), & (10)
\end{aligned}
$$

ricaviamo facilmente che per aver un'approssimazione $u_k \approx y(x_k)$ della soluzione dovremo risolvere il sistema $Au = b$ con $b_k = f(x_k)$.

Nota.

Dall'esempio precedente, si capisce che se $u_0 = y(a) = \alpha$, $u_5 = y(b) = \beta$, l'unico effetto è che $Au = b$ con $b_1 = f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2}$, $b_n = f(x_n) + \frac{\beta}{h^2}$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

La matrice

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2+ch^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+ch^2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2+ch^2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -2+ch^2 \end{pmatrix}$$

è

- simmetrica, e definita positiva (per il primo ed il terzo teorema di Gershgorin), con lo spettro degli autovalori $\sigma(A) = \{\lambda_i\}$ contenuto in $[c, c+4h^{-2}]$;
- a predominanza diagonale stretta, essendo $c > 0$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Teorema

- *Se y è la soluzione di (3) e* $u_k \approx y(x_k)$ *con* $x_k = a + kh$*, si ha*

$$\boxed{\frac{\|\{u_i\} - \{y(x_i)\}\|_2}{\sqrt{n}} = O(h^2)}$$

- *se la soluzione* $y \in C^{(4)}([a,b])$*, allora (cf. [1, p.678])*

$$\boxed{\|\{u_i\} - \{y(x_i)\}\|_\infty \leq \frac{h^2}{24}\|y^{(4)}\|_\infty \|(x-a)(b-x)\|_\infty;}$$

- *essendo la matrice tridiagonale, il sistema lineare può essere risolto con l'eliminazione gaussiana con complessità* $O(n)$.
- *se* $c = 0$*, si può ancora mostrare che A è def. positiva e che per ogni h che* $\sigma(A) = \{\lambda_i\} \subseteq [\delta, c + 4h^{-2}]$ *con* $\delta > 0$ *indipendente da h.*

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Problema. (Poisson bivariato)

L'equazione

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u(x,y) = g(x,y), \ (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}} \qquad (11)$$

dove

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \qquad (12)$$

determina il problema di Poisson bivariato, nel quadrato $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Definita la griglia di punti $\mathcal{G} = \{(x_i, y_j)\}_{i,j=0,\ldots,n+1}$

$$\boxed{x_i = ih, \;\; y_j = jh, \;\; h = 1/(n+1), \; i,j = 0,\ldots,n+1}$$

risulta evidente che per

- $i = 0$ o
- $j = 0$, $i = n+1$ o $j = n+1$

abbiamo un punto del bordo e quindi in virtù delle condizioni di Dirichlet in (11), il valore della soluzione u^* è determinato.

Vediamo cosa succede quando il punto della griglia $\mathcal{G}$ è interno al quadrato $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, caratterizzati dall'avere $i, j = 1, \ldots, n$.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Si mostra facilmente, utilizzando la formula di Taylor bivariata centrata in (x, y), in cui vengono tralasciati termini di ordine $O(h^2)$, che

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &\approx \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) &\approx \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}\end{aligned}$$

e quindi sommando le precedenti, si può approssimare $\Delta u(x, y)$ con

$$\frac{u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)-4u(x,y)}{h^2}$$

e quindi essendo, $x_i = ih$, $y_j = jh$, si approssima $\Delta u(x_i, y_j)$ con

$$\frac{u(x_{i+1},y_j)+u(x_{i-1},y_j)+u(x_i,y_{j+1})+u(x_i,y_{j-1})-4u(x_i,y_j)}{h^2}. \tag{13}$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Da

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j)}{h^2} \tag{14}$$

ricaviamo la discretizzazione dell'equazione $\Delta u(x_i, y_j) = f(x_i, y_i)$ con

$$\boxed{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j),} \tag{15}$$

per $i, j = 1, \ldots, n$, con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u(x_i, y_j) &= g(x_i, y_j), \; i = 0, \, j = 0, 1, \ldots, n & (16) \\ u(x_i, y_j) &= g(x_i, y_j), \; i = n+1, \, j = 0, 1, \ldots, n & (17) \\ u(x_i, y_j) &= g(x_i, y_j), \; i = 0, 1, \ldots, n, \, j = 0, j = n+1. & (18) \end{aligned}$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

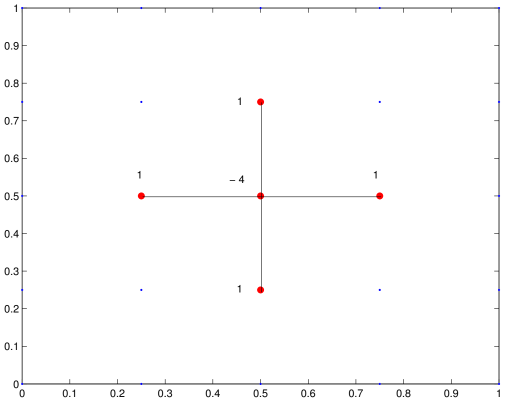

Figura : La molecola della discr. del Laplaciano avente centro $(0.5, 0.5)$ e $h = 0.25$. Si ricordi di dividere ogni valore nella molecola per h^2.

.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Purtroppo, la descrizione del sistema lineare non è troppo chiara. Vediamola scritta matricialmente. Sia B la matrice $n \times n$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ed I la matrice identica di ordine n del tipo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Allora

- se b è il vettore ottenuto dai contributi dei termini dovuti a f e g in (11) e (15),
- A la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \dots \\ I & B & I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & I & B \end{pmatrix}$$

- $u_{(j-1)n+i} := u(x_i, y_j)$ (soluzione numerica nei punti della griglia immagazzinata in un vettore, seguendo un opportuno ordinamento!),

si ricava che il sistema da risolvere è $Au = b$, usando ad esempio

- il metodo di Jacobi, o
- Gauss-Seidel, SOR o
- il gradiente coniugato.

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Esempio

Facciamo un esempio sulla risoluzione dell'equazione di Poisson via metodo alle differenze con 5 punti.

Sia $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $h = 1/3$ *e siano*

$$P_{i,j} = (ih, jh),\ i, j = 0, 1, 2, 3.$$

E' chiaro che per

- *per* $i = 0$ *i punti* $P_{0,j}$ *sono sull'asse* $x = 0$ *(cioè l'asse* y*),*
- *per* $i = 3$ *i punti* $P_{3,j}$ *sono sull'asse* $x = 1$*,*
- *per* $j = 0$ *i punti* $P_{i,0}$ *sono sull'asse* $y = 0$ *(cioè l'asse* x*)*
- *per* $j = 3$ *i punti* $P_{i,3}$ *sono sull'asse* $y = 1$*.*

Date le condizioni al contorno, la soluzione in questi punti è nota ed è uguale a $u_{i,j} = g(x_i, y_j)$*.*

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

I rimanenti punti $P_{i,j}$, con $i, j = 1, 2$ sono interni a Ω ed è

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \quad (19)$$

Analizziamo caso per caso queste equazioni:

- *Nel caso $i = 1$, $j = 1$ si ha*

$$u(x_2, y_1) + u(x_0, y_1) + u(x_1, y_2) + u(x_1, y_0) - 4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1),$$

$$u(x_0, y_1) = g(x_0, y_1), \; u(x_1, y_0) = g(x_1, y_0).$$

  Portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_1) + u(x_1, y_2) - 4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

- *Nel caso* $i = 2$, $j = 1$ *si ha*

$$u(x_3, y_1) + u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + u(x_2, y_0) - 4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_2, y_1),$$

$$u(x_3, y_1) = g(x_3, y_1),\ u(x_2, y_0) = g(x_2, y_0)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) - 4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_1, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0).$$

- *Nel caso* $i = 1$, $j = 2$ *si ha*

$$u(x_2, y_2) + u(x_0, y_2) + u(x_1, y_3) + u(x_1, y_1) - 4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_0, y_2) = g(x_0, y_2),\ u(x_1, y_3) = g(x_1, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_2) + u(x_1, y_1) - 4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

- *Nel caso* $i = 2$, $j = 2$ *si ha*

$$u(x_3, y_2) + u(x_1, y_2) + u(x_2, y_3) + u(x_2, y_1) - 4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_3, y_2) = g(x_3, y_2),\ u(x_2, y_3) = g(x_2, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_2) + u(x_2, y_1) - 4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Poniamo ora

$$\begin{aligned} b_1 &:= h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0), \\ b_2 &:= h^2 f(x_2, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0), \\ b_3 &:= h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3), \\ b_4 &;= h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3), \end{aligned}$$

ordiniamo i punti da sinistra a destra, e dal basso verso l'alto (ordine lessicografico)

$$P_1 = (x_1, y_1),\ P_2 = (x_2, y_1),\ P_3 = (x_1, y_2),\ P_4 = (x_2, y_2),$$

e infine poniamo

$$u_1 = u(x_1, y_1),\ u_2 = u(x_2, y_1),\ u_3 = u(x_1, y_2),\ u_4 = u(x_2, y_2),$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Otteniamo così

$$\begin{aligned} u_2 + u_3 - 4u_1 &= b_1, \\ u_1 + u_4 - 4u_2 &= b_2, \\ u_4 + u_1 - 4u_3 &= b_3, \\ u_3 + u_2 - 4u_4 &= b_4, \end{aligned}$$

da cui posto

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

basta risolvere il sistema $Au = b$ *per ottenere* $u_1 = u(x_1, y_1)$, $u_2 = u(x_2, y_1)$, $u_3 = u(x_1, y_2)$, $u_4 = u(x_2, y_2)$.

Equazione di Poisson: stima errore.

Risulta importante ricordare la seguente stima dell'errore.

Teorema

Se y è soluzione dell'equazione di Poisson ed è almeno 4 volte differenziabile con continuità nel quadrato $\Omega := [0,1] \times [0,1]$ ed u_h l'approssimazione ottenuta col metodo alle differenze con 5 punti, utilizzando una griglia $\mathcal{G} = \{(x_i, y_j)\}$ con $x_i = i\,h$, $y_j = j\,h$, $h = 1/(n+1)$ allora

$$\boxed{|y(x_i, y_j) - u_h(x_i, y_j)| \leq ch^2}$$

con

$$c = (1/24) \left(\max_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial^4 y(x,y)}{\partial x^4} \right| + \max_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial^4 y(x,y)}{\partial y^4} \right| \right).$$

Bibliografia

V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.