Polinomi ortogonali

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

20 marzo 2017

Il problema ai minimi quadrati

Definizione (Spazio di Hilbert)

Uno spazio di Hilbert è uno spazio euclideo che è

- *completo,*
- *separabile,*
- *infinito dimensionale (cf. [7, p.155]).*

Nota.

Al variare del testo la definizione di spazio di Hilbert può essere leggermente diversa, ad esempio uno spazio di Hilbert è uno spazio euclideo completo (cf. [2]).

Il problema ai minimi quadrati

Esempio

Consideriamo lo spazio normato delle funzioni reali misurabili (cf. [7, p.284]) quadrato integrabili $(L^2(a,b), \|\cdot\|_2)$ *dove* (a,b) *è un intervallo della retta reale, non necessariamente limitato (cf. [7, p.386], ricordando [7, p.308]), e*

$$\|g\|_2^2 = (g,g), \quad (f,g)_2 = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Si dimostra (non facile!) che questo spazio euclideo è un esempio di spazio di Hilbert (cf. [7, p.388]).

Il problema ai minimi quadrati

Esempio

Più in generale se $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ *è una funzione misurabile positiva allora lo spazio* $(L^2_w(a, b), \|\cdot\|_{2,w})$ *definito come*

$$L^2_w(a, b) = \left\{ f \text{ misurabili t.c. } \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty \right\}$$

è uno spazio di Hilbert dotato del prodotto scalare

$$(f, g)_{2,w} = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, w(x)\, dx$$

(cf. [2, p.23]).

Il problema ai minimi quadrati

Definizione (Funzione peso)

Supponiamo sia $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che*

- w *è nonnegativa, con* (a, b) *non necessariamente limitato,*
- $\int_a^b |x|^n \, w(x) \, dx < +\infty$ *per tutti gli* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $\int_a^b g(x) \, w(x) \, dx = 0$ *per qualche funzione continua e non negativa* g *implica* $g \equiv 0$ *in* (a, b)*.*

Una tal w *si dice funzione peso.*

Polinomi ortogonali

Esempio

Le funzioni peso più comuni sono (cf. [1, p.206])

1. $w(x) = 1$ *con* $x \in [-1, 1]$ *(peso di Legendre);*
2. $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *con* $x \in (-1, 1)$ *(peso di Chebyshev));*
3. $w(x) = (1 - x^2)^{\gamma-(1/2)}$ *con* $x \in (-1, 1)$, $\gamma > (-1/2)$ *(peso di Gegenbauer));*
4. $w(x) = (1 - x)^{\alpha} \cdot (1 + x)^{\beta}$ *con* $x \in (-1, 1)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ *(peso di Jacobi));*
5. $w(x) = \exp(-x)$ *con* $x \in (0, +\infty)$ *(peso di Laguerre));*
6. $w(x) = \exp(-x^2)$ *con* $x \in (-\infty, +\infty)$ *(peso di Hermite);*

Il problema ai minimi quadrati

Teorema

Lo spazio vettoriale $L^2_w(a,b)$ contiene lo spazio dei polinomi $\mathcal{P}_n$ di grado n (con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario).

Dimostrazione.

Infatti, se $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ allora per la disuguaglianza triangolare e il fatto che per ogni k si ha

$$\|x^k\|_{2,w}^2 = \int_a^b |x|^{2k}\, w(x)\, dx < +\infty$$

necessariamente

$$\|p_n\|_{2,w} = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\|_{2,w} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \|x^k\|_{2,w} < +\infty,$$

e quindi $p_n \in L^2_w(a,b)$. $\triangle$

Il problema ai minimi quadrati

Nota.

Si osservi che se "a" e "b" sono finiti, dal teorema di Weierstrass

$$\|x^n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |x|^n < +\infty$$

ricordando che $w \geq 0$,

$$\int_a^b |x|^n \, w(x) \, dx \leq \|x^n\|_\infty \int_a^b w(x) \, dx$$

da cui se

$$\int_a^b w(x) \, dx < +\infty$$

automaticamente, per tutti gli $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b |x|^n \, w(x) \, dx < +\infty.$$

Il problema ai minimi quadrati

Problema.

Fissati

- $f \in L^2_w([a,b])$,
- $n \in \mathbb{N}$,

il problema ai minimi quadrati (nel continuo) consiste nel determinare il polinomio p_n di grado n tale che sia minima la quantità (cf. [1, p.204-207])

$$\|f - p_n\|_{2,w} = \int_a^b |f(x) - p_n(x)|^2 \, w(x) \, dx.$$

Il problema ai minimi quadrati

Essendo $L^2_w([a,b])$ uno spazio euclideo, e $(\phi_k)_{k=0,\ldots,n}$ una base di $\mathcal{P}_n$, abbiamo visto che la soluzione del problema

$$\|f-f^*\|_{2,w} = \min_{g \in span\{\phi_0,\ldots,\phi_n\}} \|f-g\|_{2,w}$$

è $f^* = \sum_{j=0}^n \gamma_j^* \phi_j$ dove i coefficienti γ_j^* verificano le cosidette equazioni normali

$$\sum_{k=0}^n (\phi_j,\phi_k)_{2,w}\gamma_k^* = (\phi_j,f)_{2,w},\ j=0,\ldots,n.$$

La soluzione è caratterizzata dalla proprietà di ortogonalità cioè che f^*-f è ortogonale a tutti gli ϕ_k, con $k=1,\ldots,n$, ovvero

$$(f,\phi_k)_{2,w} = (f^*,\phi_k)_{2,w},\ k=0,\ldots,n$$

Polinomi ortogonali

Definizione (Polinomi ortogonali)

Una tal famiglia triangolare di polinomi $\{\phi_k\}_{k=0,\ldots,n}$ (cioè tale che $deg(\phi_k) = k$) si dice ortogonale rispetto alla funzione peso w nell'intervallo di riferimento se e solo se

$$(\phi_i, \phi_j)_{2,w} = c_i \, \delta_{i,j}$$

con

- $\delta_{i,j}$ *il delta di Kronecker,*
- $c_i > 0$, $i, j = 0, \ldots, n$*).*

Polinomi ortogonali

Si può dimostrare

- usando la procedura di Gram-Schmidt che una tal famiglia triangolare di polinomi esiste e con la stessa procedura costruirla direttamente;
- inoltre è immediato osservare che ogni polinomio di grado n si può scrivere univocamente come combinazione lineare di $\phi_0, \ldots, \phi_n$.

Di conseguenza se $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k$, allora per la bilinearità del prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{2,w}$

$$(\phi_{n+1}, p_n)_{2,w} = (\phi_{n+1}, \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k)_{2,w} = \sum_{k=0}^{n} a_k (\phi_{n+1}, \phi_k)_{2,w} = 0.$$

Polinomi ortogonali

Inoltre (cf. [4, p.978], [1, p.213])

Teorema (Zeri di polinomi ortogonali)

Sia $\{\phi_k\}_{k=0,\ldots,n}$ *una famiglia triangolare di polinomi ortogonali in* (a, b) *rispetto ad una funzione peso "*w*". Allora gli zeri del polinomio ortogonale* ϕ_n

- *sono esattamente* n,
- *hanno molteplicità* 1,
- *appartengono all'intervallo aperto* (a, b).

Dimostrazione.

Siano $x_1, \dots, x_m$ *(con* $m \leq n$*) tutti e soli gli zeri di* ϕ_n *interni ad* (a, b) *con molteplicità rispettivamente* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$*.*

Di conseguenza, per qualche numero a_n *abbiamo*

$$\phi_n(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k} \right) r(x)$$

avendo supposto $\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k} \equiv 1$ *se non ci sono zeri interni ad* (a, b)*.*

Il polinomio r per costruzione non ha zeri in (a, b) *e quindi non si annulla mai ed essendo una funzione continua ha segno costante.*

Polinomi ortogonali

Da $x_1, \ldots, x_m$ *nodi in* (a,b) *e* $x_{m+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \backslash (a,b)$ *e*

$$\phi_n(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k} \right) r(x)$$

si evince che

$$r(x) = \prod_{k=m+1}^{N} (x - x_k)$$

ha segno costante in (a,b)*. Infatti*

- *se* $x \in \mathbb{R} \backslash (a,b)$ *allora* $x - x_j$ *con* $j \in \{m+1, \ldots, N\}$ *ha banalmente segno costante in* (a,b)*;*
- *se* $x_j = s + it$ *con* $t \neq 0$*, allora pure il coniugio è uno zero di* ϕ_n*, diciamo* $x_{j+1} = s - it$ *e quindi offrono il contributo*

  $$(x-x_j)(x-x_{j+1}) = (x-(s+it))(x-(s-it)) = x^2 - sx - (s^2+t^2)$$

  che avendo discriminante $\Delta < 0$*, ha segno costante in* (a,b)*.*

Polinomi ortogonali

Consideriamo il polinomio

$$q(x) = \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{mod_2(\alpha_k)} \right).$$

- *Se uno zero di ϕ_n ha molteplicità dispari ma maggiore di 1 o uno almeno ha molteplicità pari o esiste uno zero complesso non in (a, b), è facile osservare che il grado di q è minore di n.*
- *Qualsiasi sia un numero naturale, $\alpha_k + mod_2(\alpha_k)$ è un numero pari.*

Polinomi ortogonali

Poichè

$$\phi_n(x)q(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k + mod_2(\alpha_k)} \right) r(x)$$

- *ha segno costante e grado almeno n,*
- *non coincide col polinomio nullo,*

abbiamo una contraddizione in quanto se per assurdo $q \in \mathbb{P}_{n-1}$

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi_n, q) = \int_a^b \phi_n(x)\, q(x)\, w(x)\, dx \\ &= \int_a^b \left(a_n \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k} r(x) \right) \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{mod_2(\alpha_k)}\, w(x)\, dx \\ &= \int_a^b a_n \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k + mod_2(\alpha_k)} \right) r(x) q(x)\, w(x)\, dx \neq 0. \end{aligned}$$

Polinomi ortogonali

Nota.

Potrebbe venire il dubbio su perchè qualche zero non possa essere "a" o "b".

Nella dimostrazione avrebbe quale unico effetto che r si annulla in "a" o "b", rimanendo di segno costante in (a, b).
La conclusione è che il polinomio ortogonale p_n ha n radici distinte e semplici, interne ad (a, b).

Polinomi ortogonali

Definizione (Polinomio monico)

Un polinomio $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *si dice* *monico* *se* $a_n = 1$.

Teorema (Ricorsione a 3 termini)

Sia $\{\phi_k\}_{k=0,\ldots,n}$ *una famiglia triangolare di polinomi ortogonali* *monici* *in* $[a, b]$ *rispetto ad una funzione peso* w. *Si supponga* $\phi_{-1}(x) = 0$, $\phi_0(x) = 0$, *Allora per* $n \geq 1$

$$\phi_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\phi_n(x) - \gamma_n \phi_{n-1}(x)$$

dove si ha

$$\beta_n = \frac{(x\phi_n, \phi_n)_{2,w}}{(\phi_n, \phi_n)_{2,w}} \tag{1}$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n (x\phi_{n-1}, \phi_n)_{2,w}}{(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w}} \tag{2}$$

Polinomi ortogonali

Nota.

Notiamo che

- *scelti i polinomi ortogonali* ϕ_0 *e* ϕ_1*, la procedura determina la famiglia triangolare di polinomi ortogonali di grado superiore, non appena sono disponibili i coefficienti* α_k, β_k, γ_k.
- *Se* ϕ_n *è tale che* $(\phi_n, \phi_k) = 0$ *per* $k = 0, \ldots, n-1$ *allora per* $\tau \neq 0$ *pure* $\tilde{\phi}_n = \tau \phi_n$ *è tale che*

$$(\tilde{\phi}_n, \phi_k) = (\tau \phi_n, \phi_k) = \tau(\phi_n, \phi_k) = 0, \; k = 0, \ldots, n-1$$

  e quindi potrebbe essere considerato quale polinomio ortogonale di grado n.

Polinomi ortogonali

Nota.

Il caso in cui il polinomio $\hat{\phi}_{n+1}$ richiesto sia in forma ortonormale deriva da quello del caso monico.
Infatti se $\gamma_0 = \int_a^b w(x)dx$ e il polinomio ortogonale monico è

$$\phi_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\phi_n(x) - \gamma_n \phi_{n-1}(x)$$

allora

$$\|\phi_{n+1}\|_{2,w}^2 = \gamma_0 \cdot \ldots \cdot \gamma_n$$

da cui è possibile ottenere facilmente $\hat{\phi}_{n+1}$ (cf.[6, p.11])

Polinomi ortogonali

- K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
- K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, (2001).
- D. Bini, M. Capovani e O. Menchi , *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, (1993).
- V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, (1990).
- G. Dahlquist e A. Bjorck, *Numerical methods*, Dover, (2003).
- W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation*, Oxford University Press, (2004).
- A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover publications, 1970.