

Polinomi ortogonali

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

23 aprile 2018

Il problema ai minimi quadrati

Definizione (Spazio di Hilbert)

Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio euclideo che è

- completo,
- separabile,
- infinito dimensionale (cf. [7, p.155]).

Nota.

Al variare del testo la definizione di spazio di Hilbert può essere leggermente diversa, ad esempio uno spazio di Hilbert è uno spazio euclideo completo (cf. [2]).

Il problema ai minimi quadrati

Esempio

Consideriamo lo spazio normato delle funzioni reali misurabili (cf. [7, p.284]) quadrato integrabili ($L^2(a, b)$, $\|\cdot\|_2$) dove (a, b) è un intervallo della retta reale, non necessariamente limitato (cf. [7, p.386], ricordando [7, p.308]), e

$$\|g\|_2^2 = (g, g), \quad (f, g)_2 = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx.$$

Si dimostra (non facile!) che questo spazio euclideo è un esempio di *spazio di Hilbert* (cf. [7, p.388]).

Il problema ai minimi quadrati

Esempio

Più in generale se $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile positiva allora lo spazio $(L_w^2(a, b), \|\cdot\|_{2,w})$ definito come

$$L_w^2(a, b) = \left\{ f \text{ misurabili t.c. } \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty \right\}$$

è uno *spazio di Hilbert* dotato del prodotto scalare

$$(f, g)_{2,w} = \int_a^b f(x) \cdot g(x) w(x) dx$$

(cf. [2, p.23]).

Il problema ai minimi quadrati

Definizione (Funzione peso)

Supponiamo sia $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

- w è **nonnegativa**, con (a, b) non necessariamente limitato,
- $\int_a^b |x|^n w(x) dx < +\infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$;
- $\int_a^b g(x) w(x) dx = 0$ per qualche funzione continua e non negativa g implica $g \equiv 0$ in (a, b) .

Una tal w si dice **funzione peso**.

Polinomi ortogonali

Esempio

Le funzioni *peso* più comuni sono (cf. [1, p.206])

- 1 $w(x) = 1$ con $x \in [-1, 1]$ (peso di *Legendre*);
- 2 $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ con $x \in (-1, 1)$ (peso di *Chebyshev*);
- 3 $w(x) = (1-x^2)^{\gamma-(1/2)}$ con $x \in (-1, 1)$, $\gamma > (-1/2)$ (peso di *Gegenbauer*);
- 4 $w(x) = (1-x)^{\alpha} \cdot (1+x)^{\beta}$ con $x \in (-1, 1)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ (peso di *Jacobi*);
- 5 $w(x) = \exp(-x)$ con $x \in (0, +\infty)$ (peso di *Laguerre*);
- 6 $w(x) = \exp(-x^2)$ con $x \in (-\infty, +\infty)$ (peso di *Hermite*);

Il problema ai minimi quadrati

Teorema

Lo spazio vettoriale $L_w^2(a, b)$ contiene lo spazio dei polinomi $\mathcal{P}_n$ di grado n (con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario).

Dimostrazione.

Infatti, se $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ allora per la disuguaglianza triangolare e il fatto che per ogni k si ha

$$\|x^k\|_{2,w}^2 = \int_a^b |x|^{2k} w(x) dx < +\infty$$

necessariamente

$$\|p_n\|_{2,w} = \left\| \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\|_{2,w} \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \|x^k\|_{2,w} < +\infty,$$

e quindi $p_n \in L_w^2(a, b)$.



Il problema ai minimi quadrati

Nota.

Si osservi che se " a " e " b " sono finiti, dal teorema di Weierstrass

$$\|x^n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |x|^n < +\infty$$

ricordando che $w \geq 0$,

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx \leq \|x^n\|_\infty \int_a^b w(x) dx$$

da cui se

$$\int_a^b w(x) dx < +\infty$$

automaticamente, per tutti gli $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx < +\infty.$$

Il problema ai minimi quadrati

Problema.

Fissati

- $f \in L_w^2([a, b])$,
- $n \in \mathbb{N}$,

il problema ai minimi quadrati (nel continuo) consiste nel determinare il polinomio p_n di grado n tale che sia minima la quantità (cf. [1, p.204-207])

$$\|f - p_n\|_{2,w} = \int_a^b |f(x) - p_n(x)|^2 w(x) dx.$$

Il problema ai minimi quadrati

Essendo $L_w^2([a, b])$ uno spazio euclideo, e $(\phi_k)_{k=0,\dots,n}$ una base di $\mathcal{P}_n$, abbiamo visto che la soluzione del problema

$$\|f - f^*\|_{2,w} = \min_{g \in \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_n\}} \|f - g\|_{2,w}$$

è $f^ = \sum_{j=0}^n \gamma_j^* \phi_j$ dove i coefficienti γ_j^* verificano le cosiddette equazioni normali*

$$\sum_{k=0}^n (\phi_j, \phi_k)_{2,w} \gamma_k^* = (\phi_j, f)_{2,w}, \quad j = 0, \dots, n.$$

La soluzione è caratterizzata dalla proprietà di ortogonalità cioè che $f^ - f$ è ortogonale a tutti gli ϕ_k , con $k = 1, \dots, n$, ovvero*

$$(f, \phi_k)_{2,w} = (f^*, \phi_k)_{2,w}, \quad k = 0, \dots, n$$

Polinomi ortogonali

Definizione (Polinomi ortogonali)

Una famiglia *triangolare* di polinomi $\{\phi_k\}_{k=0,\dots,n}$ (cioè tale che $\deg(\phi_k) = k$) si dice *ortogonale* rispetto alla funzione peso w nell'intervallo di riferimento se e solo se

$$(\phi_i, \phi_j)_{2,w} = c_i \delta_{i,j}$$

con

- $\delta_{i,j}$ il delta di Kronecker,
- $c_i > 0$, $i, j = 0, \dots, n$.

Facoltativo, Polinomi ortogonali, nota storica.

Nota.

- *I polinomi ortogonali erano noti a Legendre, Laplace (1810) e a Jacobi (1826), che utilizzando questi ultimi mostrò l'esistenza delle formule gaussiane in $[-1, 1]$, per $w(x) = 1$ (peraltro già nota a Gauss nel 1814).*
- *Il nome polinomi ortogonali fu probabilmente coniato da Schmidt nel 1905.*
- *Il peso di Jacobi $w(x) = (1 - x)^\alpha \cdot (1 + x)^\beta$ con $x \in (-1, 1)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ fu introdotto da Jacobi nel 1859 e successivamente studiato da Mehler nel 1864 in ambito di quadratura numerica.*
- *La funzione peso di Laguerre fu introdotta da quest'ultimo nel 1879, mentre quella di Hermite nel 1864, ma già nota ad altri come Lagrange (1762), Abel (1826), Murphy (1835), Chebyshev (1859) e i polinomi di Hermite utilizzati da Laplace (1810).*

Polinomi ortogonali

Si può dimostrare

- usando la procedura di Gram-Schmidt che **una tal famiglia triangolare di polinomi esiste** e con la stessa procedura costruirla direttamente;
- inoltre è immediato osservare che ogni polinomio di grado n si può scrivere univocamente come **combinazione lineare** di $\phi_0, \dots, \phi_n$.

Di conseguenza se $p_n = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k$, allora per la bilinearità del prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{2,w}$

$$(\phi_{n+1}, p_n)_{2,w} = (\phi_{n+1}, \sum_{k=0}^n a_k \phi_k)_{2,w} = \sum_{k=0}^n a_k (\phi_{n+1}, \phi_k)_{2,w} = 0.$$

Polinomi ortogonali

Inoltre (cf. [4, p.978], [1, p.213])

Teorema (Zeri di polinomi ortogonali, Christoffel 1877)

Sia $\{\phi_k\}_{k=0,\dots,n}$ una famiglia triangolare di polinomi ortogonali in (a, b) rispetto ad una funzione peso "w". Allora gli zeri del polinomio ortogonale ϕ_n

- sono esattamente n ,
- hanno molteplicità 1,
- appartengono all'intervallo aperto (a, b) .

Polinomi ortogonali

Dimostrazione.

Siano $x_1, \dots, x_m$ (con $m \leq n$) tutti e soli gli zeri di ϕ_n interni ad (a, b) con molteplicità rispettivamente $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Di conseguenza, per qualche numero a_n abbiamo

$$\phi_n(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k} \right) r(x)$$

avendo supposto $\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k} \equiv 1$ se non ci sono zeri interni ad (a, b) .

*Il polinomio r per costruzione non ha zeri in (a, b) e quindi non si annulla mai ed essendo una funzione continua ha **segno costante**.*

Polinomi ortogonali

Da $x_1, \dots, x_m$ nodi in (a, b) e $x_{m+1}, \dots, x_n \in \mathbb{C} \setminus (a, b)$ e

$$\phi_n(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k} \right) r(x)$$

si evince che

$$r(x) = \prod_{k=m+1}^N (x - x_k)$$

ha segno costante in (a, b) . Infatti

- se $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$ allora $x - x_j$ con $j \in \{m+1, \dots, N\}$ ha banalmente segno costante in (a, b) ;
- se $x_j = s + it$ con $t \neq 0$, allora pure il coniugio è uno zero di ϕ_n , diciamo $x_{j+1} = s - it$ e quindi offrono il contributo $(x - x_j)(x - x_{j+1}) = (x - (s + it))(x - (s - it)) = x^2 - sx - (s^2 + t^2)$ che avendo discriminante $\Delta < 0$, ha segno costante in (a, b) .

Consideriamo il polinomio

$$q(x) = \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\text{mod}_2(\alpha_k)} \right).$$

- Se uno zero di ϕ_n ha molteplicità dispari ma maggiore di 1 o uno almeno ha molteplicità pari o esiste uno zero complesso non in (a, b) , è facile osservare che *il grado di q è minore di n* .
- Qualsiasi sia un numero naturale, $\alpha_k + \text{mod}_2(\alpha_k)$ è un numero pari.

Polinomi ortogonali

Poichè

$$\phi_n(x)q(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k + \text{mod}_2(\alpha_k)} \right) r(x)$$

- *ha segno costante e grado almeno n ,*
- *non coincide col polinomio nullo,*

abbiamo una contraddizione in quanto se per assurdo $q \in \mathbb{P}_{n-1}$

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi_n, q) = \int_a^b \phi_n(x) q(x) w(x) dx \\ &= \int_a^b \left(a_n \prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k} r(x) \right) \prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\text{mod}_2(\alpha_k)} w(x) dx \\ &= \int_a^b a_n \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k + \text{mod}_2(\alpha_k)} \right) r(x) w(x) dx \neq 0. \end{aligned}$$

Nota.

*Potrebbe venire il dubbio su **perchè qualche zero non possa essere "a" o "b"**.*

Nella dimostrazione avrebbe quale unico effetto che r si annulla in "a" o "b", rimanendo di segno costante in (a, b) .

La conclusione è che il polinomio ortogonale p_n ha n radici distinte e semplici, interne ad (a, b) .

Polinomi ortogonali

Definizione (Polinomio monico)

Un polinomio $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ si dice **monico** se $a_n = 1$.

Teorema (Ricorsione a 3 termini (Christoffel 1877, Darboux 1878, Stieltjes 1884))

Sia $\{\phi_k\}_{k=0,\dots,n}$ una famiglia triangolare di polinomi ortogonali **monici** in $[a, b]$ rispetto ad una funzione peso w . Si supponga $\phi_{-1}(x) = 0$, $\phi_0(x) = 1$. Allora per $n \geq 1$

$$\phi_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\phi_n(x) - \gamma_n\phi_{n-1}(x)$$

dove si ha

$$\beta_n = \frac{(x\phi_n, \phi_n)_{2,w}}{(\phi_n, \phi_n)_{2,w}} \quad (1)$$

$$\gamma_n = \frac{(x\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w}}{(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w}} \quad (2)$$

Polinomi ortogonali

Nota.

Notiamo che

- *scelti i polinomi ortogonali ϕ_0 e ϕ_1 , la procedura determina la famiglia triangolare di polinomi ortogonali di grado superiore, non appena sono disponibili i coefficienti $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$.*
- *Se ϕ_n è tale che $(\phi_n, \phi_k) = 0$ per $k = 0, \dots, n-1$ allora per $\tau \neq 0$ pure $\tilde{\phi}_n = \tau\phi_n$ è tale che*

$$(\tilde{\phi}_n, \phi_k) = (\tau\phi_n, \phi_k) = \tau(\phi_n, \phi_k) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1$$

e quindi potrebbe essere considerato quale polinomio ortogonale di grado n .

Polinomi ortogonali

Nota.

Il caso in cui il polinomio $\hat{\phi}_{n+1}$ richiesto sia in forma ortonormale deriva da quello del caso monico.

Infatti se $\gamma_0 = \int_a^b w(x)dx$ e il polinomio ortogonale monico è

$$\phi_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\phi_n(x) - \gamma_n\phi_{n-1}(x)$$

allora

$$\|\phi_{n+1}\|_{2,w}^2 = \gamma_0 \cdot \dots \cdot \gamma_n$$

da cui è possibile ottenere facilmente $\hat{\phi}_{n+1}$ (cf.[6, p.11])

Polinomi ortogonali



K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).



K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, (2001).



D. Bini, M. Capovani e O. Menchi, *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, (1993).



V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, (1990).



G. Dahlquist e A. Bjorck, *Numerical methods*, Dover, (2003).



W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation*, Oxford University Press, (2004).



A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover publications, 1970.