

# Derivazione numerica <sup>1</sup>

A. Sommariva <sup>2</sup>

---

*Keywords:* Derivazione numerica. Differenza in avanti. Rapporto incrementale simmetrico. Esempi.

---

*Revisione:* 11 maggio 2021

---

**Problema 0.1 (Derivazione numerica).** *Il problema della derivazione numerica consiste nell'approssimare la derivata di una funzione  $f$  in un certo punto  $x_0$ , ovvero (qualora esista)*

$$\boxed{f'(x_0) = Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.} \quad (1)$$

Si potrebbe approssimare  $f$  con una successione di funzioni  $f_n$  facili da derivare e poi differenziare  $f_n$ , valutandola nel punto  $x_0$ .

Purtroppo,

$$\text{dist}(f_n, f) \rightarrow 0 \not\Rightarrow \text{dist}(Df_n, Df) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

che si può pure leggere come *esistono  $f$  e  $f_n$  arbitrariamente "vicine", ma con derivate  $f'$  e  $f'_n$  arbitrariamente distanti*, fenomeno noto come instabilità dell'operatore di derivazione (nel continuo).

Quale esempio, consideriamo la successione

$$\boxed{f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx), \quad x \in [0, 1].} \quad (2)$$

Osserviamo che essendo  $\sin(x) \in [-1, 1]$  qualora  $x \in [0, 1]$  abbiamo

$$\frac{-1}{n} \leq f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \leq \frac{1}{n}$$

e sicuramente, detta  $f \equiv 0$  la funzione costantemente nulla abbiamo  $f_n \rightarrow f$  non solo puntualmente ma anche uniformemente visto che

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{1}{n} \sin(nx) - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Osserviamo che

- la derivata di  $f$  è la funzione costantemente nulla,
- la derivata di  $f_n$  è

$$f'_n(x) = \cos(nx)$$

Questo implica che

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{uniformemente}$$

ma non è vero che

$$f'_n \rightarrow f', \quad \text{uniformemente}$$

in quanto

$$\max_{x \in [0,1]} |\cos(nx) - 0| = \max_{x \in [0,1]} |\cos(nx)| = 1$$

non è infinitesima.

**Commento 0.2.** *Questo non vuol dire che se  $f$  e  $f_n$  arbitrariamente "vicine" allora le derivate  $f'$  e  $f'_n$  sono arbitrariamente distanti, e quindi possiamo sperare che sotto certe ipotesi su  $f$ , se  $f_n$  sono scelte bene e sono vicine a  $f$ , allora pure  $f'_n$  e  $f'$  sono vicine.*

*Ad esempio, se  $[a, b]$  è un intervallo limitato e  $s_{3,n}$  è un interpolante spline cubica di  $f \in C^4([a, b])$ , relativamente alla suddivisione generata da  $x_k = a + k(b - a)/n$ ,  $k = 0, \dots, n$ , ovvero punti equispaziati con passo  $h_n = (b - a)/n$ ,*

- la successione di spline cubiche  $\{s_{3,n}\}_n$  converge a  $f$  uniformemente,
- $\{s'_{3,n}\}_n$  converge a  $f'$  uniformemente.

*In effetti, esiste una costante  $c_1$  indipendente da  $n$  tale che*

$$0 \leq \max_{x \in [a,b]} |f'(x) - s'_{3,n}(x)| \leq c_1 h_n^3 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| = c_1 \frac{(b-a)^3}{n^3} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

*e quindi per quanto visto precedentemente e per il teorema del confronto, deduciamo la convergenza uniforme.*

Sia  $f$  una funzione derivabile nell'intervallo  $[a, b]$  e consideriamo il rapporto incrementale  $\delta_+(f, x, h)$ , detto tecnicamente differenza in avanti in  $x$ , di una funzione  $f$  almeno derivabile, ovvero per un fissato  $h > 0$ , e supposto  $x, x + h \in [a, b]$ ,

$$\delta_+(f, x, h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x, x+h \in [a, b]. \quad (3)$$

(cf. [2]).

In particolare, se  $f \in C^2([a, b])$  e  $x, x + h \in [a, b]$  allora, dalla formula di Taylor,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(\xi_x)/2, \quad \xi_x \in (x, x+h)$$

per cui riarrangiando i termini

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h^2 f''(\xi_x)/2,$$

e quindi

$$\delta_+(f, x, h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + hf''(\xi_x)/2, \quad \xi_x \in (x, x+h).$$

Per il teorema di Weierstrass, essendo  $f \in C^2([a, b])$  si ha  $f'' \in C([a, b])$  e visto che  $|\cdot| \in C([a, b])$ , esiste finito

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \geq 0$$

e quindi, essendo

$$\delta_+(f, x, h) - f'(x) = hf''(\xi_x)/2$$

ricaviamo che se  $x+h \in [a, b]$  allora, visto che  $|f''(\xi_x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

$$0 \leq |\delta_+(f, x, h) - f'(x)| = \frac{|hf''(\xi_x)|}{2} = \frac{h}{2} |f''(\xi_x)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| = \frac{hM_2}{2}, \quad (4)$$

per cui, per il teorema del confronto, se  $h \rightarrow 0$  allora

$$|\delta_+(f, x, h) - f'(x)| \rightarrow 0.$$

In altri termini, ci verrebbe da credere che utilizzando passi  $h$  sempre più piccoli abbiamo approssimazioni sempre migliori della derivata prima, in un punto arbitrario dell'intervallo  $[a, b]$ .

Numericamente, le cose vanno in modo diverso. La funzione  $f$  non viene sempre valutata esattamente, ed ogni volta calcoliamo invece di

$$\delta_+(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

un *rapporto incrementale perturbato*

$$\tilde{\delta}_+(f, x, h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$$

e abbiamo, sottraendo e aggiungendo  $\tilde{\delta}_+(f, x, h)$ ,

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &= |(f'(x) - \delta_+(f, x, h)) + (\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h))| \\ &\leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + |\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)|. \end{aligned}$$

- Osserviamo che se  $\epsilon = \max\{|f(x) - \tilde{f}(x)|, |f(x+h) - \tilde{f}(x+h)|\}$ , ovvero il massimo errore compiuto nel valutare la funzione  $f$

$$\begin{aligned} |\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| (f(x+h) - \tilde{f}(x+h)) - (f(x) - \tilde{f}(x)) \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left( |f(x+h) - \tilde{f}(x+h)| + |f(x) - \tilde{f}(x)| \right) \leq \frac{2\epsilon}{h} \end{aligned}$$

- Se  $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ ,  $x + h \in [a, b]$ , allora  $|f'(x) - \delta_+(f, x, h)| \leq \frac{M_2 h}{2}$ ;
- Ricordiamo che

$$|f'(x) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| \leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + |\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)|.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &\leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + |\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| \\ &\leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\epsilon}{h}. \end{aligned} \quad (5)$$

**Commento 0.3.** *Il fatto che*

$$|f'(x) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\epsilon}{h}.$$

*dice che numericamente, se  $h \rightarrow 0$  può accadere che fino ad un certo  $h_0$  otteniamo approssimazioni della derivata in  $x$  sempre migliori, ma poi diventando per  $h$  piccolo rilevante la quantità  $\frac{2\epsilon}{h}$ , i risultati cominciano a peggiorare.*

*Siccome l'analisi viene fatta per  $h \rightarrow 0$ , e l'unica richiesta è che sia  $x + h, x \in [a, b]$ , generalmente  $[a, b]$  è un intervallo con una piccola ampiezza, contenente  $x$  e possiamo pensare quindi che se la derivata seconda non varia troppo vicino a  $x$ , ovvero sia  $M_2 \approx f''(x)$ .*

*Inoltre, visto che la funzione  $g(h) := \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\epsilon}{h}$  ha minimo in  $h^* = \sqrt{\frac{4\epsilon}{M_2}}$ , si suggerisce di non scegliere numericamente valori di  $h$  più piccoli di  $h^*$  con*

$$\boxed{h^* = \sqrt{\frac{4\epsilon}{M_2}}}. \quad (6)$$

**Esempio.** Derivare in  $x_0 = 0$  la funzione  $f(x) = \exp(x)$  la cui derivata è  $f'(x) = \exp(x)$ , calcolando

$$\delta_+(f, 0, h) = \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}.$$

Il valore desiderato è  $f'(0) = \exp(0) = 1$ .

Otteniamo i risultati della tabella e della figura, dove valutiamo

$$E_h(f, 0) := |\delta_+(f, 0, h) - f'(0)| = |\delta_+(f, 0, h) - 1|$$

per  $h = 10^{-1}, \dots, 10^{-26}$ .

Nel nostro caso, dalla definizione di numero macchina, e dal fatto che  $\exp(h) \approx 1$ , ci possiamo aspettare che l'errore compiuto nel valutare  $\exp(h)$  sia pari alla precisione di macchina, ovvero  $\epsilon = 10^{-16}$ . Da  $[a, b] = [0, h]$ ,

$$M_2 = \max_{x \in [0, h]} f^{(2)}(x) = \max_{x \in [0, h]} \exp(x) \approx \exp(0) = 1,$$

ci aspettiamo che il passo critico sia

$$h^* = \sqrt{\frac{4\epsilon}{M_2}} \approx 2 \cdot 10^{-8}$$

come confermato dagli esperimenti numerici.

$h$	$E_h(f, 0)$	$h$	$E_h(f, 0)$
1.0e-01	5.171e-02	1.0e-14	7.993e-04
1.0e-02	5.017e-03	1.0e-15	1.102e-01
1.0e-03	5.002e-04	1.0e-16	1.000e+00
1.0e-04	5.000e-05	1.0e-17	1.000e+00
1.0e-05	5.000e-06	1.0e-18	1.000e+00
1.0e-06	5.000e-07	1.0e-19	1.000e+00
1.0e-07	4.943e-08	1.0e-20	1.000e+00
1.0e-08	6.077e-09	1.0e-21	1.000e+00
1.0e-09	8.274e-08	1.0e-22	1.000e+00
1.0e-10	8.274e-08	1.0e-23	1.000e+00
1.0e-11	8.274e-08	1.0e-24	1.000e+00
1.0e-12	8.890e-05	1.0e-25	1.000e+00
1.0e-13	7.993e-04	1.0e-26	1.000e+00

Tabella 1: Valutazione dell'errore  $E_h(f, 0) = |\delta_+(f, 0, h) - 1|$ ,  $f(x) = \exp(x)$ , per alcuni passi  $h$ . L'errore degrada a partire da circa  $h = 1.0e-08$ .

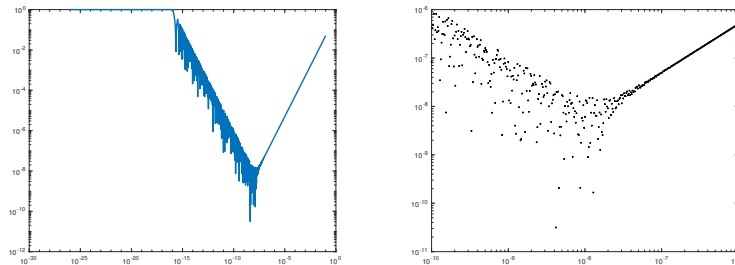


Figura 1: A sinistra, grafico in scala semilogaritmica dell'errore  $E_h(f, 0)$ ,  $f(x) = \exp(x)$ , per alcuni passi  $h$ . A destra lo studio in scala loglog, attorno al valore  $h = 10^{-8}$ , in cui si vede come già vicino a  $h = 10^{-7}$  incomincino a esserci problemi di convergenza.

**Esempio.** Derivare in  $x_0 = 5$  la funzione funzione di Runge  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  la cui derivata è  $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ , calcolando

$$\delta_+(f, 5, h) = \frac{f(5+h) - f(5)}{h}.$$

Il valore desiderato è  $f'(5) = \frac{-10}{26^2} = -0.01479289940828402$ .

Si vede che

$$f''(x) = (8x^2)/(x^2 + 1)^3 - 2/(x^2 + 1)^2$$

e che essendo decrescente e positiva in un intorno destro di 5 ha massimo in 5, e quindi  $M_2 = |f''(5)| = f''(5) \approx 0.0084$ . Quindi, per  $\epsilon = 10^{-16}$ ,

$$h^* = \sqrt{\frac{4\epsilon}{M_2}} \approx 2.2 \cdot 10^{-7}.$$

Otteniamo i risultati della tabella, dove valutiamo

$$E_h(f, 5) = |\delta_+(f, 5, h) - f'(5)|$$

per  $h = 1, 10^{-1}, \dots, 10^{-15}$ . Come nel caso precedente, per  $h \approx 10^{-7}$  i valori della derivata cominciano a degradare.

$h$	$E_h(f, 0)$	$h$	$E_h(f, 0)$
1.0e + 00	3.358e - 03	1.0e - 08	2.258e - 10
1.0e - 01	4.108e - 04	1.0e - 09	2.381e - 09
1.0e - 02	4.200e - 05	1.0e - 10	1.150e - 08
1.0e - 03	4.209e - 06	1.0e - 11	8.212e - 07
1.0e - 04	4.210e - 07	1.0e - 12	4.927e - 07
1.0e - 05	4.210e - 08	1.0e - 13	7.159e - 05
1.0e - 06	4.210e - 09	1.0e - 14	8.321e - 04
1.0e - 07	3.913e - 10	1.0e - 15	8.645e - 03

Tabella 2: A sinistra, grafico in scala semilogaritmica dell'errore  $E_h(f, 0)$ ,  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ , per alcuni passi  $h$ . A destra lo studio in scala loglog, si vede come già vicino a  $h = 10^{-7}$  incomincino a esserci problemi di convergenza.

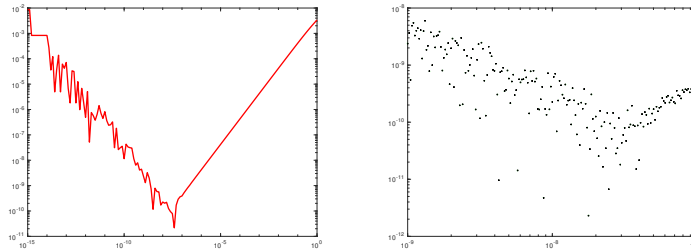


Figura 2: Errore  $E_h(f, 0)$  per alcuni passi  $h$ . Zoom attorno al valore  $h = 10^{-8}$  in cui si vede come tra  $h = 10^{-7}$  e  $h = 10^{-8}$  incomincino a esserci problemi di convergenza.

Supponiamo  $f \in C^3([a, b])$  e che  $x - h, x + h \in [a, b]$ . Allora,

- per  $\xi_+ \in (x, x + h)$  abbiamo

$$f(x + h) = f(x) + hf^{(1)}(x) + h^2 \frac{f^{(2)}(x)}{2} + \frac{h^3 f^{(3)}(\xi_+)}{6},$$

- per  $\xi_- \in (x - h, x)$  abbiamo

$$f(x - h) = f(x) - hf^{(1)}(x) + h^2 \frac{f^{(2)}(x)}{2} - \frac{h^3 f^{(3)}(\xi_-)}{6}.$$

Sottraendo membro a membro,

$$f(x + h) - f(x - h) = 2hf^{(1)}(x) + h^3 \frac{f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)}{6}.$$

Dal teorema dei valori intermedi, la funzione  $f^{(3)}$  assume in  $(x - h, x + h)$  tutti i valori nell'intervallo

$$[\min(f^{(3)}(\xi_-), f^{(3)}(\xi_+)), \max(f^{(3)}(\xi_-), f^{(3)}(\xi_+))]$$

e quindi in particolare il loro valore medio. Quindi possiamo asserire che esiste  $\xi \in (x - h, x + h)$  tale che

$$f^{(3)}(\xi) = \frac{f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)}{2}$$

e di conseguenza

$$f(x + h) - f(x - h) = 2hf^{(1)}(x) + h^3 \frac{f^{(3)}(\xi)}{3}.$$

da cui dividendo ambo i membri per  $2h$

$$\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi).$$

Da

$$\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$$

abbiamo

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - f^{(1)}(x) = \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi).$$

Se  $M_3 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(3)}(x)|$ , essendo

$$|f^{(3)}(\xi)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f^{(3)}(x)| = M_3$$

$$0 \leq \left| \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| = \frac{h^2}{6} |f^{(3)}(\xi)| \leq \frac{h^2}{6} M_3 \quad (7)$$

da cui, per il teorema del confronto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| = 0$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta_2(f, x, h) = f^{(1)}(x).$$

Come nel caso precedente, questo risultato teorico non trova sempre riscontro nella pratica numerica.

La funzione  $f$  non viene sempre valutata esattamente, ed ogni volta calcoliamo

$$\tilde{\delta}_2(f, x, h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)}{2h}$$

invece di  $\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$  e abbiamo

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &= |f'(x) - \delta_2(f, x, h) + \delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \\ &\leq |f'(x) - \delta_2(f, x, h)| + |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \end{aligned} \quad (8)$$

- Se  $\epsilon = \max\{|f(x-h) - \tilde{f}(x-h)|, |f(x+h) - \tilde{f}(x+h)|\}$  ovvero è il massimo errore compiuto nel valutare la funzione  $f$ , dalla disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)}{2h} \right| \\ &\leq \frac{1}{2h} \left| (f(x+h) - \tilde{f}(x+h)) - (f(x-h) - \tilde{f}(x-h)) \right| \\ &\leq \frac{1}{2h} \left( |f(x+h) - \tilde{f}(x+h)| + |f(x-h) - \tilde{f}(x-h)| \right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2h} + \frac{\epsilon}{2h} = \frac{\epsilon}{h} \end{aligned} \quad (9)$$

- se  $M_3 = \max_{s \in [a, b]} |f^{(3)}(s)|$  abbiamo

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| \leq \frac{h^2}{6} M_3,$$

- essendo

$$|f'(x) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \leq |f'(x) - \delta_2(f, x, h)| + |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)|,$$

ricaviamo

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &\leq |f'(x) - \delta_2(f, x, h)| + |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \\ &\leq \frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\epsilon}{h}. \end{aligned} \quad (10)$$

Siccome l'analisi viene fatta per  $h \rightarrow 0$ , e l'unica richiesta è che sia  $x+h, x-h \in [a, b]$ , generalmente possiamo pensare ad  $[a, b]$  come ad un intervallo di piccola ampiezza e contenente  $x$  al suo interno.



Di conseguenza che se la derivata terza non varia troppo vicino a  $x$ , sia  $M_2 \approx |f^{(3)}(x)|$ .

In particolare, visto che la funzione

$$g_2(h) := \frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\epsilon}{h}$$

ha minimo in

$$\boxed{h^* = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{M_3}}}, \quad (11)$$

si suggerisce di non scegliere numericamente valori di  $h$  più piccoli di  $h^*$ .

**Esempio.** Derivare in  $x_0 = 0$  la funzione  $f(x) = \exp(x)$  la cui derivata è  $f'(x) = \exp(x)$ , calcolando

$$\delta_2(f, 0, h) = \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \frac{\exp(h) - \exp(-h)}{2h}.$$

Il valore desiderato è  $f'(0) = \exp(0) = 1$ .

Otteniamo i risultati della tabella e della figura, dove valutiamo

$$E_h(f, 0) = |\delta_2(f, 0, h) - 1|$$

per  $h = 10^0, \dots, 10^{-25}$ , che evidenziano un degradamento attorno a  $10^{-6}$ . In effetti, posto  $\epsilon = 10^{-16}$ , visto che  $M_3 \approx 1$ , abbiamo che  $h^* \approx 6 \cdot 10^{-6}$ .

- Ad esempio per  $h = 10^{-4}$  ci aspettiamo un errore di  $1.6 \cdot 10^{-9}$  come verificato sperimentalmente.
- Posto  $\epsilon = 10^{-16}$ , osserviamo come gli errori, per  $h > h^* \approx 6 \cdot 10^{-6}$  siano circa  $(h^2/6)M_3 = 0.16 \cdot h^2$  in quanto  $M_3 \approx D^3 \exp(0) = 1$ .

**Esempio.** Derivare in  $x_0 = 5$  la funzione funzione di Runge  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  la cui derivata è  $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ , calcolando

$$\delta_2(f, 5, h) = \frac{f(5+h) - f(5-h)}{2h}.$$

Il valore desiderato è  $f'(5) = -0.01479289940828402$ .

Dopo qualche conto,  $f^{(3)}(5) \approx -6.302300339623963e-03$  e quindi  $M_3 \approx 6.31 \cdot 10^{-3}$ . Ne consegue che posto  $\epsilon = 10^{-16}$ ,  $h^* = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{M_3}} \approx 3.7 \cdot 10^{-5}$ .

- Nella tabella, valutiamo  $E_h(f, 5) = |\delta_2(f, 5, h) - f'(5)|$  per  $h = 1, 10^{-1}, \dots, 10^{-15}$ .
- da  $|\delta_2(f, x, h) - f'(x)| = |h^2 f^{(3)}(\xi)|/6$ , ci aspettiamo un errore

$$E_h(f, 5) \approx \frac{6 \cdot 10^{-3} h^2}{6} = 10^{-3} h^2.$$

$h$	$E_h(f, 0)$	$h$	$E_h(f, 0)$
$1.0e + 00$	$1.752e - 01$	$1.0e - 13$	$2.442e - 04$
$1.0e - 01$	$1.668e - 03$	$1.0e - 14$	$7.993e - 04$
$1.0e - 02$	$1.667e - 05$	$1.0e - 15$	$5.471e - 02$
$1.0e - 03$	$1.667e - 07$	$1.0e - 16$	$4.449e - 01$
$1.0e - 04$	$1.667e - 09$	$1.0e - 17$	$1.000e + 00$
$1.0e - 05$	$1.210e - 11$	$1.0e - 18$	$1.000e + 00$
$1.0e - 06$	$2.676e - 11$	$1.0e - 19$	$1.000e + 00$
$1.0e - 07$	$5.264e - 10$	$1.0e - 20$	$1.000e + 00$
$1.0e - 08$	$6.077e - 09$	$1.0e - 21$	$1.000e + 00$
$1.0e - 09$	$2.723e - 08$	$1.0e - 22$	$1.000e + 00$
$1.0e - 10$	$8.274e - 08$	$1.0e - 23$	$1.000e + 00$
$1.0e - 11$	$8.274e - 08$	$1.0e - 24$	$1.000e + 00$
$1.0e - 12$	$3.339e - 05$	$1.0e - 25$	$1.000e + 00$

Tabella 3: Valutazione dell'errore  $E_h(f, 0)$ ,  $f(x) = \exp(x)$ , per alcuni passi  $h$ . L'errore sembra degradare a partire da circa  $h = 1.0e - 06$ .

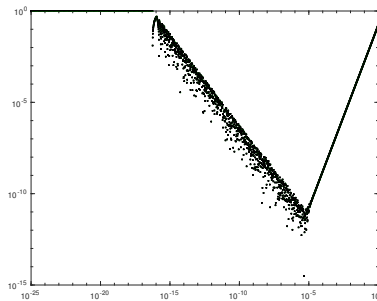


Figura 3: Errore  $E_h(f, 0)$ , con  $f(x) = \exp(x)$ , per alcuni passi  $h$ . Si vede, partendo da destra, come l'errore compiuto sia una funzione decrescente al diminuire di  $h$  fino a  $10^{-5}$  (e non  $10^{-6}$  come dice la tabella), dopo di che l'andamento, pur meno prevedibile, è essenzialmente crescente, fornendo errori tendenzialmente maggiori al diminuire di  $h$ .

- Ad esempio, per  $h = 10^{-4}$  la stima offre  $1 \cdot 10^{-11}$  molto prossima al valore numerico effettivo di  $1.050e - 11$ .
- Posto  $\epsilon = 10^{-16}$ , visto che  $h^* \approx 3.7 \cdot 10^{-5}$ , e in effetti per  $h \leq h^*$  i valori della derivata degradano.

### Bibliografia

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] [Wikipedia, Finite Difference](#)
- [3] [Wikipedia, Numerical Differentiation](#)

$h$	$E_h(f, 0)$	$h$	$E_h(f, 0)$
$1.0e + 00$	$1.105e - 03$	$1.0e - 08$	$1.211e - 10$
$1.0e - 01$	$1.051e - 05$	$1.0e - 09$	$1.088e - 09$
$1.0e - 02$	$1.050e - 07$	$1.0e - 10$	$1.150e - 08$
$1.0e - 03$	$1.050e - 09$	$1.0e - 11$	$1.273e - 07$
$1.0e - 04$	$1.050e - 11$	$1.0e - 12$	$4.927e - 07$
$1.0e - 05$	$1.293e - 13$	$1.0e - 13$	$2.455e - 06$
$1.0e - 06$	$1.458e - 12$	$1.0e - 14$	$1.219e - 04$
$1.0e - 07$	$2.505e - 11$	$1.0e - 15$	$8.321e - 04$

Tabella 4: Valutazione dell'errore  $E_h(f, 5)$ , con  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ , per alcuni passi  $h$ . L'errore degrada a partire da circa  $h = 1.0e - 05$ .

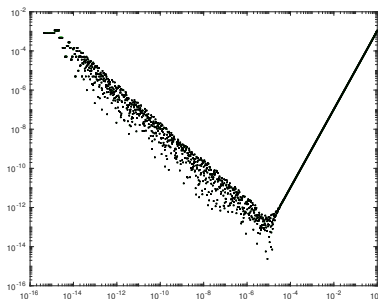


Figura 4: Errore  $E_h(f, 5)$ , con  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ , per alcuni passi  $h$ . Si vede, partendo da destra, come l'errore compiuto sia una funzione decrescente al diminuire di  $h$  fino a  $10^{-5}$ , dopo di che l'andamento, pur meno prevedibile, è essenzialmente crescente, fornendo errori tendenzialmente maggiori al diminuire di  $h$ .