

Equazioni nonlineari

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

24 marzo 2025

Problema.

Data una funzione continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (dove al solito I è un intervallo di \mathbb{R}), si desidera calcolare x^ tale che $f(x^*) = 0$.*

Questo problema è diffuso nel calcolo numerico, ad esempio nella soluzione di equazioni differenziali con metodi impliciti o perfino in grafica (raytracing), e richiede in generale l'utilizzo di un metodo iterativo per approssimare tali soluzioni x^* .

Usualmente, partendo da un valore iniziale x_0 , si genera una sequenza di valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

che si desidera convergano, magari velocemente, ad una opportuna soluzione x^* , o perfino la determinino in un numero finito di passi.

Esempio

Sia $f = p_n$ un polinomio di grado n . Determinarne uno o più zeri.

Per un teorema di Galois (a volte detto di Abel-Ruffini [17]), per $n \geq 5$, **non esistono formule risolutive mediante le 4 operazioni e estrazione di radici** per il calcolo degli zeri di una generica equazione polinomiale $p_n(x) = 0$ che richiedano un numero finito di operazioni.

Ciò non vieta di **approssimare tali radici con un metodo numerico** compiendo un errore assoluto e/o relativo inferiore a un valore prestabilito detto tolleranza.

Equazioni polinomiali di questo tipo possono

- **non avere soluzioni reali**,
esempio: $x^2 + 2 = 0$ in cui il discriminante è negativo;
- **avere più di una soluzione**
esempio: $x^2 - 5x + 6 = 0$ che ha per soluzioni $x = 2$, $x = 3$;
- **avere soluzioni semplici** ovvero x^* tali $f'(x^*) \neq 0$,
esempio: $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ che ha per soluzioni $x = 1$, $x = 2$,
in cui non si annulla $f'(x) = 2x - 3$ (è $f'(1) = -1$ e $f'(2) = 1$);
- **avere soluzioni multiple** (o non semplici) ovvero x^* tali $f'(x^*) = 0$
esempio: $f(x) = (x^2 - 1)^2 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1) + 0$, in cui $x^* = 1$ è
zero sia di f , che di $f'(x) = 4x \cdot (x^2 - 1)$.

Queste differenti situazioni hanno causato varie difficoltà nella soluzione delle equazioni polinomiali, per cui usualmente si applicano metodi ad hoc.

Esempio

Calcolare gli zeri x^* della funzione continua $f(x) = \sin(x) - x$.

- Banalmente $x = 0$ é soluzione del problema $f(x) = 0$;
- se x^* é uno zero di f , visto che
 - 1 $\sin(x^*) - x^* = 0 \Leftrightarrow \sin(x^*) = x^*$
 - 2 $|\sin x^*| \leq 1$,necessariamente $|x^*| = |\sin(x^*)| \leq 1$ da cui $x^* \in [-1, 1]$;
- da un veloce studio di funzione, si vede che f é **strettamente decrescente** e quindi che $x^* = 0$ é l'unica soluzione in $[-1, 1]$ (e quindi in \mathbb{R}).

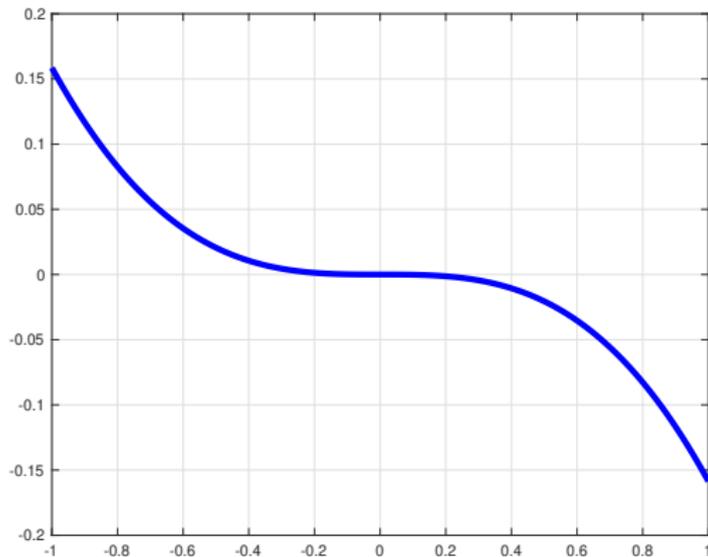


Figura: Grafico di $f(x) = \sin(x) - x$ in $[-1, 1]$.

Nota.

Si noti che $x^* = 0$ è zero di $f(x) = \sin(x) - x$ e che essendo $f'(x) = \cos(x) - 1$, necessariamente x^* non è semplice.

La prima tentazione che sorge per studiare gli zeri di una funzione continua f è di **farne il grafico**. Purtroppo questa strategia non è sempre efficace, e usualmente richiede troppi calcoli dovuti alla valutazione della funzione in molti punti.

Tipicamente

- si valuta f in molti punti campione $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_N$ (con $x_k < x_{k+1}$),
- si disegnano le coppie $(x_k, f(x_k))$ nel piano cartesiano,
- si approssima il grafico, unendo con segmenti tutte le coppie $P_j = (x_j, f(x_j))$ $P_{j+1} = (x_{j+1}, f(x_{j+1}))$, $j = 1, \dots, N - 1$.

Se il numero N di campioni è piccolo, allora tra certi x_k e x_{k+1} , il grafico di f potrebbe essere molto diverso da quello della versione numerica, e **alcuni zeri potrebbero non essere individuati**.

Esempio

Si studino graficamente gli zeri di $f(x) = 10^6(x - 1/1000)(x + 1/1000)$.

Il polinomio f ha ovviamente zeri $-1/1000, 1/1000$. Se campioniamo la funzione nei punti equispaziati $x_k = -1 + k/100$, con $k = 0, \dots, 100$ gli zeri non vengono individuati anche dopo zoom successivi, per mancanza di dati.

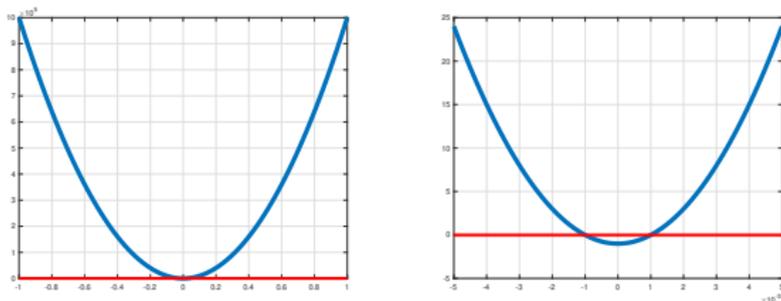


Figura: Problemi con grafici e zoom per lo studio di $f(x) = 0$ per $f(x) = 10^6 \cdot (x - 1/1000)(x + 1/1000)$, qualora eseguito via campionamento nei punti $x_k = -1 + k/100$, con $k = 0, \dots, 100$. Se non si esegue lo zoom, si direbbe che esiste un unico zero, verosimilmente uguale a 0.

- Si potrebbe ovviare **umentando il numero di punti equispaziati**, ma da una parte non si avrebbe ancora la garanzia di fedeltà del grafico, e dall'altra il numero di valutazioni diventerebbe eccessivo.
- A dispetto di questa analisi pessimistica, **avere un'idea del grafico della funzione**, ottenuto anche per mezzi analitici tramite il classico studio di funzione, nella maggior parte dei casi può permettere la localizzazione di alcuni zeri, problema potenzialmente non banale dal punto di vista algoritmico.

Introduciamo di seguito dei metodi iterativi che permettano l'approssimazione di zeri di funzioni continue.

Definizione (Metodo iterativo)

Un metodo iterativo è un tipo di metodo numerico nel quale l'approssimazione x_n della soluzione al problema matematico esaminato è ottenuta partendo dai valori, noti in precedenza,

$$x_0, \dots, x_{n-1},$$

ove $n = 1, 2, \dots$

Usualmente si fornisce uno o più punti di partenza per tale processo, dopo una qualche analisi teorica o alternativamente casualmente.

Nel caso della soluzione di equazioni non lineari, ci sono due aspetti specifici di cui è opportuno tenere conto

- 1 **Garanzia della convergenza alla soluzione:** se $\{x_n\}$ è la soluzione generata dal metodo e x^* è uno zero per f , si cercano delle condizioni per cui $x_n \rightarrow x^*$.
- 2 Se $x_n \rightarrow x^*$ si cerca la **velocità** con cui ciò accade. In tal senso, è importante calcolare il cosiddetto **ordine di convergenza**.

Definizione (Ordine di convergenza)

Supponiamo che un metodo per la soluzione di equazioni nonlineari, generi una successione $\{x_k\}$ convergente allo zero x^* del problema $f(x^*) = 0$. Si ponga $e_k = |x_k - x^*|$.

Il metodo ha **ordine di convergenza almeno** $p \geq 1$ se esiste $C > 0$ tale che

$$e_{n+1} \leq C e_n^p, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e ordine **esattamente** p se vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = L \neq 0$$

In particolare, L è la **costante asintotica di errore**.

Nota.

Si noti che per $p = 1$, si vede con qualche conto che

- condizione necessaria per la convergenza è che sia $L \leq 1$,
- condizione sufficiente per la convergenza è che sia $L < 1$ oppure $C < 1$.

Nota.

Se

- $p = 1$ la convergenza è detta *lineare*;
- $p > 1$ la convergenza è detta *superlineare*;

In particolare

- per $p = 2$ si dice *quadratica*,
- per $p = 3$ si dice *cubica*.

Esistono comunque metodi, come quello delle secanti, la cui convergenza non ha ordine $p \in \mathbb{N}$.

Esempio

Discutere numericamente la qualità della convergenza di un metodo per cui e_k sia tale che $e_0 = 1$

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{1}{10}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

cioè

$$e_{k+1} = \frac{1}{10} e_k^p.$$

Evidentemente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{1}{10},$$

e il metodo ha ordine di convergenza p .

- Se $p = 1$ allora $e_0 = 1, e_1 = 1/10, e_2 = 1/100, e_3 = 1/1000, \dots$
- se $p = 2$ allora $e_0 = 1, e_1 = 1/10, e_2 = 1/1000, e_3 = (1/10)(1/1000)^2 = 1/10^7, \dots$

In questo esempio, maggiore è p allora minore è l'errore e_k compiuto a parità di k .

In scala semilogaritmica, si ricava il seguente grafico che mostra come per n suff. grande, a parità di C sia da preferire un metodo con p maggiore possibile.

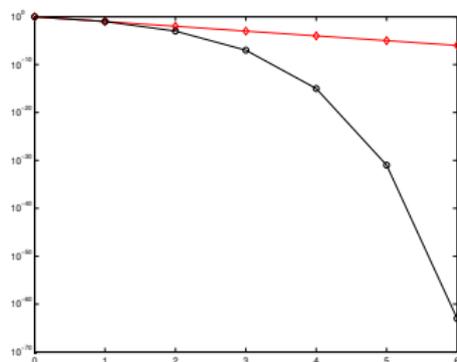


Figura: Grafico che illustra l'errore di un metodo con convergenza $p = 1$ (in rosso a rombi) e $p = 2$ (in nero a cerchietti), per $C = 1/10$ ed $e_0 = 1$.

L'utilizzo di tale scala offre alcuni suggerimenti. Se appare asintoticamente come

- una retta decrescente vuol dire che la (possibile) convergenza verosimilmente ha ordine 1;
- una parabola decrescente, al di sotto di una qualsiasi retta, vuol dire che la (possibile) convergenza verosimilmente ha ordine > 1 .

Teorema (Sugli zeri di una funzione continua)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ovvero la funzione f non si annulla agli estremi e assume in a e b valori di segno opposto).

Allora, l'intervallo (a, b) contiene almeno uno zero x^* di f .

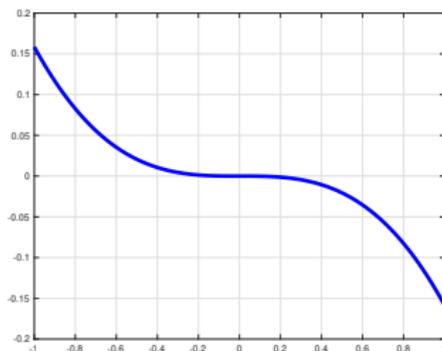


Figura: Grafico della funzione $f(x) = (x + 1) \cdot \sin(x) + 3$ per $x \in [0, 10]$. Si noti che $f(0) \cdot f(10) \approx -8.9527 < 0$ e che $f(x) = 0$ ha 3 zeri.

Metodo di bisezione (o dicotomico)

Definiamo algoritmicamente il **metodo di bisezione** (cf. [3, p.408], [12]), in cui $a_0 = a$, $b_0 = b$, $f(a_0)f(b_0) < 0$ ed $f \in C([a, b])$.

Alla k -sima iterazione:

- 1 si fissa (a_k, b_k) , $k \in \{0, 1, \dots\}$ in cui il segno di $f(a_k)$ è diverso da quello di $f(b_k)$, ovvero $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$; dal teorema degli zeri di una funzione continua, si sa che esiste almeno un certo $x^* \in (a_k, b_k)$ che è zero di f ;
- 2 si calcola il **punto medio** x_k dell'intervallo (a_k, b_k) ovvero

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2};$$

- 3 se $f(x_k) = 0$ si conclude il processo in quanto x_k è lo zero cercato;
- 4 se più in generale un certo criterio di arresto è verificato allora si conclude il processo perchè si reputa che x_k sia un'approssimazione di uno zero;
- 5 **altrimenti**,
 - se $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$ si pone $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$;
 - se $f(x_k) \cdot f(b_k) < 0$ si pone $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$;e si continua il processo in (a_{k+1}, b_{k+1}) , ripartendo dal punto 1.

Nota.

Si osservi che alla k -sima iterazione, il metodo di bisezione utilizza esclusivamente il segno di $f(x_k)$ e non il suo valore effettivo.

Metodo di bisezione (o dicotomico): esempio

Esempio

Eeguire le prime 10 iterazioni del metodo di bisezione per approssimare lo zero di $f(x) = x - 42$, sapendo che la soluzione sta nell'intervallo $[0, 100]$.

Notiamo che possiamo utilizzare il metodo di bisezione in quanto $f(0) = -42$ e $f(100) = 58$ e quindi $f(0) \cdot f(1) = -42 \cdot 58 = -2436 < 0$.

Il metodo in questione esegue le seguenti prime 10 iterazioni:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	0	100	50	+8
2	0	50	25	-17
3	25	50	37.5	-4.5
4	37.5	50	43.75	+1.75
5	37.5	43.75	40.625	-1.375
6	40.625	43.75	42.1875	+0.1875
7	40.625	42.1875	41.40625	-0.59375
8	41.40625	42.1875	41.796875	-0.203125
9	41.796875	42.1875	41.9921875	-0.0078125
10	41.9921875	42.1875	42.08984375	+0.08984375

Tabella: Alcune iterazioni del metodo di bisezione per calcolare lo zero di $f(x) = x - 42$ con $a = 0$, $b = 100$. Si noti che $f(a_k) < 0$ e $f(b_k) > 0$, e che l'**ampiezza** di $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ é meta di quella di $[a_k, b_k]$.

Dal grafico dell'errore assoluto in scala semilogaritmica, si vede che non si può affermare che la convergenza sia lineare (non è approssimativamente una retta).

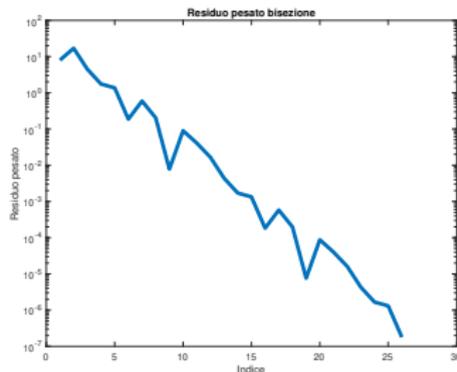


Figura: Studio dell'approssimazione dello zero della funzione $x - 42 = 0$ mediante bisezione con $a_0 = 0$, $b_0 = 100$: grafico dell'errore assoluto $|x_k - x^*|$ in scala semilogaritmica.

Per la dimostrazione della convergenza del metodo di bisezione, risulta utile ricordare il seguente teorema.

Teorema (Del confronto o dei due carabinieri)

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tre successioni e supponiamo che sia

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se per un certo $L \in \mathbb{R}$

- $\lim_n a_n = L,$

- $\lim_n c_n = L,$

allora

$$\lim_n b_n = L.$$

Convergenza del metodo di bisezione (o dicotomico)

Prima di citare un teorema di convergenza del metodo di bisezione, introduciamo la funzione $\lceil x \rceil$ che arrotonda il numero reale x al minore intero non minore di x . Ad esempio,

$$\lceil 3.14 \rceil = 4, \quad \lceil -2.13 \rceil = -2, \quad \lceil 8 \rceil = 8, \quad \lceil -4 \rceil = -4.$$

Sussiste il seguente teorema.

Teorema (Convergenza del metodo di bisezione)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $f(a) \cdot f(b) < 0$

- se x_k è la k -sima iterazione di bisezione, esiste uno zero x^* di f tale che

$$|x_k - x^*| \leq 2^{-(k+1)}(b - a);$$

- il metodo di bisezione converge a uno zero x^* di f , ovvero $x_k \rightarrow x^*$;
- affinché per un certo $\epsilon > 0$ si abbia $|x^* - x_k| \leq \epsilon$, necessitano al più

$$k^*(\epsilon) = \lceil \log_2 ((b - a)/\epsilon) \rceil - 1$$

iterazioni.

Dimostrazione.

- Osserviamo che ad ogni iterazione il metodo di bisezione dimezza l'ampiezza dell'intervallo $[a_k, b_k]$ e quindi essendo $a_0 = a$, $b_0 = b$

$$\begin{aligned}b_k - a_k &= (1/2)(b_{k-1} - a_{k-1}) = (1/2) \cdot ((1/2)(b_{k-2} - a_{k-2})) \\ &= (1/2)^2 \cdot (b_{k-2} - a_{k-2}) = \dots = (1/2)^k (b_0 - a_0) = 2^{-k}(b - a).\end{aligned}$$

- Ricordiamo che $x^* \in (a_k, b_k)$ per ogni $k = 0, 1, \dots$ per cui essendo x_k il punto medio di (a_k, b_k) , e x^* sta in $[a_k, x_k]$ o $[x_k, b_k]$, abbiamo (vedasi figura)

$$|x_k - x^*| \leq (b_k - a_k)/2 = 2^{-1}(b_k - a_k)$$



Di conseguenza

$$0 \leq |x_k - x^*| \leq 2^{-1}(b_k - a_k) = 2^{-1} \cdot 2^{-k}(b - a) = 2^{-(k+1)}(b - a).$$

e quindi essendo $\lim_k 2^{-(k+1)}(b - a) = 0$, per il teorema del confronto $\lim_k |x_k - x^*| = 0$ ovvero $\lim_k x_k = x^*$.

Convergenza del metodo di bisezione (o dicotomico)

Vediamo ora qual'è il primo indice $k^* = k^*(\epsilon)$ per cui

$$2^{-(k^*+1)}(b-a) \leq \epsilon \quad \text{ovvero} \quad 2^{-(k^*+1)} \leq \epsilon/(b-a)$$

Osserviamo che se $2^{-(k^*+1)}(b-a) \leq \epsilon$ allora

$$|x_{k^*} - x^*| \leq 2^{-(k^*+1)}(b-a) \leq \epsilon$$

e di conseguenza $|x_{k^*} - x^*| \leq \epsilon$, per cui in al più k^* iterazioni si individua un'approssimazione x_{k^*} della soluzione x^* con un errore assoluto al più ϵ .

- Essendo $\log_2(x) \in C((0, +\infty))$ e crescente, abbiamo $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \log_2(x_1) \leq \log_2(x_2)$, e visto che $\tau = \log_2(2^\tau)$ ricaviamo

$$2^{-(k^*+1)} \leq \epsilon/(b-a) \Leftrightarrow -(k^*+1) = \log_2(2^{-(k^*+1)}) \leq \log_2(\epsilon/(b-a))$$

ovvero, visto che $-\log_2(\epsilon/(b-a)) = \log_2((\epsilon/(b-a))^{-1}) = \log_2((b-a)/\epsilon)$,

$$k^* + 1 \geq -\log_2(\epsilon/(b-a)) = \log_2((b-a)/\epsilon);$$

- il primo intero positivo per cui $k^* \geq \log_2((b-a)/\epsilon) - 1$ risulta

$$k^* = \lceil \log_2((b-a)/\epsilon) - 1 \rceil = \lceil \log_2((b-a)/\epsilon) \rceil - 1.$$

Nota.

Si osservi che tipicamente $\frac{\epsilon}{b-a} \ll 1$ e quindi $\log_2(\frac{\epsilon}{b-a}) < 0$, per cui il numero di iterazioni $k(\epsilon)$ è effettivamente un numero naturale.

Nota.

- 1 Il teorema precedente implica che, se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora il metodo di bisezione **converge a una soluzione** $x^* \in (a, b)$ (anche se in quell'intervallo ce n'è più di una!) perchè per ogni $\epsilon > 0$ esiste $k^*(\epsilon)$ tale che se $k \geq k^*(\epsilon)$ allora $|x_k - x^*| \leq \epsilon$.
- 2 Il metodo di bisezione **non ha un ordine di convergenza** vero e proprio, ma in media converge linearmente.

Esempio

Calcolare la soluzione x^* dell'equazione

$$f(x) = \sin(x) - x = 0$$

mediante il metodo di bisezione.

- Visto che $f(-2) \approx 1.090$, $f(3) \approx -2.858$, utilizziamo l'algoritmo di bisezione con $a_0 = -2$ e $b_0 = 3$.
- Interrompiamo il processo alla iterazione n -sima se $f(x_n) = 0$ oppure $(b_n - a_n)/2 \leq \epsilon$, con $\epsilon = 10^{-5}$.
- Come detto, se $(b_k - a_k)/2 \leq \epsilon$ allora $|x_k - x^*| \leq (b_k - a_k)/2 \leq \epsilon$.
- Osserviamo che

$$\begin{aligned}k^*(\epsilon) &= \lceil -\log_2(\epsilon/(b_0 - a_0)) \rceil - 1 = \lceil -\log_2(10^{-5}/5) \rceil - 1 \\ &= \lceil 18.9316 \dots \rceil - 1 = 18.\end{aligned}$$

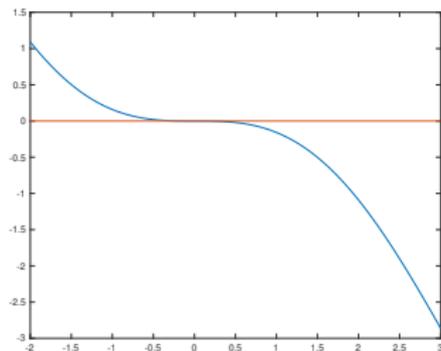


Figura: Grafico della funzione $\sin(x) - x = 0$, in $[-2, 3]$.

Dal grafico dell'errore assoluto in scala semilogaritmica, si vede che non si può affermare che la convergenza sia lineare (non è approssimativamente una retta).

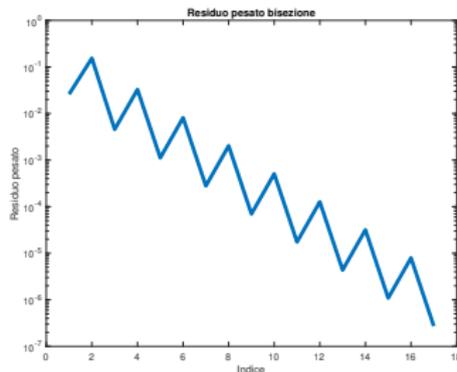


Figura: Studio dell'approssimazione dello zero della funzione $\sin(x) - x = 0$ mediante bisezione con $a_0 = 2$, $b_0 = 3$: grafico dell'errore assoluto $|x_k - x^*|$ in scala semilogaritmica.

Bisezione: alcuni esempi

k	$a_k : f(a_k) > 0$	$b_k : f(b_k) < 0$	x_k	$(b_k - a_k)/2$	$\text{sgn}(f(x_k))$
0	$-2.00000000e + 00$	$3.00000000e + 00$	$5.00000000e - 01$	$2.5e + 00$	-
1	$-2.00000000e + 00$	$5.00000000e - 01$	$-7.50000000e - 01$	$1.2e + 00$	+
2	$-7.50000000e - 01$	$5.00000000e - 01$	$-1.25000000e - 01$	$6.2e - 01$	+
3	$-1.25000000e - 01$	$5.00000000e - 01$	$1.87500000e - 01$	$3.1e - 01$	-
4	$-1.25000000e - 01$	$1.87500000e - 01$	$3.12500000e - 02$	$1.6e - 01$	-
5	$-1.25000000e - 01$	$3.12500000e - 02$	$-4.68750000e - 02$	$7.8e - 02$	+
6	$-4.68750000e - 02$	$3.12500000e - 02$	$-7.81250000e - 03$	$3.9e - 02$	+
7	$-7.81250000e - 03$	$3.12500000e - 02$	$1.17187500e - 02$	$2.0e - 02$	-
8	$-7.81250000e - 03$	$1.17187500e - 02$	$1.95312500e - 03$	$9.8e - 03$	-
9	$-7.81250000e - 03$	$1.95312500e - 03$	$-2.92968750e - 03$	$4.9e - 03$	+
10	$-2.92968750e - 03$	$1.95312500e - 03$	$-4.88281250e - 04$	$2.4e - 03$	+
11	$-4.88281250e - 04$	$1.95312500e - 03$	$7.32421875e - 04$	$1.2e - 03$	-
12	$-4.88281250e - 04$	$7.32421875e - 04$	$1.22070312e - 04$	$6.1e - 04$	-
13	$-4.88281250e - 04$	$1.22070312e - 04$	$-1.83105469e - 04$	$3.1e - 04$	+
14	$-1.83105469e - 04$	$1.22070312e - 04$	$-3.05175781e - 05$	$1.5e - 04$	+
15	$-3.05175781e - 05$	$1.22070312e - 04$	$4.57763672e - 05$	$7.6e - 05$	-
16	$-3.05175781e - 05$	$4.57763672e - 05$	$7.62939453e - 06$	$3.8e - 05$	-
17	$-3.05175781e - 05$	$7.62939453e - 06$	$-1.14440918e - 05$	$1.9e - 05$	+
18	$-1.14440918e - 05$	$7.62939453e - 06$	$-1.90734863e - 06$	$9.5e - 06$	+

Tabella: Studio dell'equazione $\sin(x) - x = 0$, in $(0, 1)$ con $\text{tol} = 10^{-5}$. Si noti che essendo $x^* = 0$ allora $|x_k - x^*| = |x_k - 0| = |x_k|$. La prima iterazione con un errore $|x_k - x^*| \leq 10^{-5}$ é la 16-sima. Infine, per ogni k , si ha $f(a_k) > 0$, $f(b_k) < 0$.

- Si noti che $f(a_k) > 0$, $f(b_k) < 0$ per ogni k . E' interessante guardare come si passi da (a_k, b_k) a (a_{k+1}, b_{k+1}) , al variare di $\text{sgn}_k = \text{sgn}(f(x_k))$
- Una particolarità di quest'esempio è che posto $e_k = |x_k - x^*|$, il rapporto $\frac{e_{k+1}}{e_k}$ assume alternativamente valori 0.6 e $0.\bar{6} = 0.666\dots$ e quindi non esiste il limite $\lim_k \frac{e_{k+1}}{e_k}$.

Conseguentemente, il metodo di bisezione **non ha convergenza lineare**.

- D'altra parte $e_{k+1} \leq \max(0.6, 0.\bar{6})e_k = 0.\bar{6}e_k$ e quindi ha **ordine convergenza almeno 1** (si guardi con molta attenzione la definizione!).

Esempio

Calcolare la soluzione dell'equazione $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ mediante il metodo di bisezione.

Osserviamo che

- f è una funzione continua e crescente,
- $f(0) = -1$,
- $f(1) = \exp(1) - 2 + 1 = 1.7182\dots$,

e di conseguenza ha un unico zero e questo sta in $(0, 1)$.

La soluzione è $x^* \approx 0.4428544010023885$.

Quindi

- utilizziamo l'algoritmo di bisezione con $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$;
- interrompiamo il processo alla iterazione n -sima se $f(x_n) = 0$ oppure $(b_n - a_n)/2 \leq \epsilon$, con $\epsilon = 10^{-5}$.

Osserviamo che il numero massimo di iterazioni per giungere alla soluzione risulta

$$k^*(\epsilon) = \lceil -\log_2(\epsilon/(b_0 - a_0)) \rceil - 1 = \lceil -\log_2(10^{-5}) \rceil - 1 = \lceil 16.6096 \rceil - 1 = 16.$$

Convergenza del metodo di bisezione (o dicotomico)

Dal grafico dell'errore assoluto in scala semilogaritmica, si vede che non si può affermare che la convergenza sia lineare (non è approssimativamente una retta).

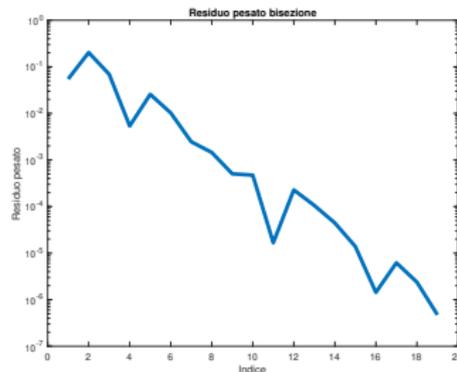
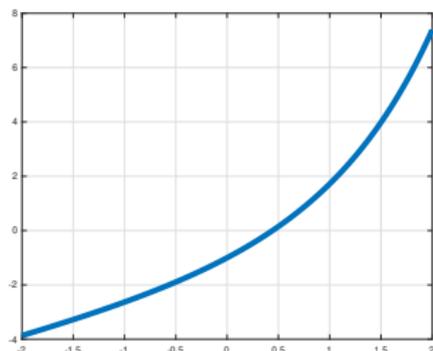


Figura: A sinistra, grafico della funzione $\exp(x) - 2 + x = 0$, in $[-2, 2]$. A destra errore assoluto $|x_k - x^*|$ in scala semilogaritmica. La prima iterazione per cui $|x_k - x^*| \leq 10^{-5}$ è la 16-sima.

Convergenza del metodo di bisezione (o dicotomico)

k	a_k	b_k	x_k	$(b_k - a_k)/2$	$\text{sgn}(f(x_k))$
0	0.00000000e + 00	1.00000000e + 00	5.00000000e - 01	5.0e - 01	+
1	0.00000000e + 00	5.00000000e - 01	2.50000000e - 01	2.5e - 01	-
2	2.50000000e - 01	5.00000000e - 01	3.75000000e - 01	1.2e - 01	-
3	3.75000000e - 01	5.00000000e - 01	4.37500000e - 01	6.2e - 02	-
4	4.37500000e - 01	5.00000000e - 01	4.68750000e - 01	3.1e - 02	+
5	4.37500000e - 01	4.68750000e - 01	4.53125000e - 01	1.6e - 02	+
6	4.37500000e - 01	4.53125000e - 01	4.45312500e - 01	7.8e - 03	+
7	4.37500000e - 01	4.45312500e - 01	4.41406250e - 01	3.9e - 03	-
8	4.41406250e - 01	4.45312500e - 01	4.43359375e - 01	2.0e - 03	+
9	4.41406250e - 01	4.43359375e - 01	4.42382812e - 01	9.8e - 04	-
10	4.42382812e - 01	4.43359375e - 01	4.42871094e - 01	4.9e - 04	+
11	4.42382812e - 01	4.42871094e - 01	4.42626953e - 01	2.4e - 04	-
12	4.42626953e - 01	4.42871094e - 01	4.42749023e - 01	1.2e - 04	-
13	4.42749023e - 01	4.42871094e - 01	4.42810059e - 01	6.1e - 05	-
14	4.42810059e - 01	4.42871094e - 01	4.42840576e - 01	3.1e - 05	-
15	4.42840576e - 01	4.42871094e - 01	4.42855835e - 01	1.5e - 05	+
16	4.42840576e - 01	4.42855835e - 01	4.42848206e - 01	7.6e - 06	-

Tabella: Studio dell'equazione $\exp(x) - 2 + x = 0$, in $(0, 1)$ con $\epsilon = 10^{-5}$. La prima iterazione con un errore $|x_k - x^*| \leq 10^{-5}$ é la 16-sima (vedasi grafico errore pagina precedente).

Esistono vari **criteri di arresto** per il metodo di bisezione.

Fissata una tolleranza `toll` dall'utente, ad esempio `toll=10-6`, si può terminare il processo qualora

- **criterio dello step:**

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \text{toll}$$

- **criterio del residuo:**

$$|f(x_k)| \leq \text{toll}$$

- **criterio del residuo pesato.**

$$\frac{|f(x_k)|}{w_k} \leq \text{toll}, \quad w_k = \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{|b_k - a_k|} \approx |f'(x^*)|.$$

Nota. (Facoltativa)

Si osservi che essendo $x_k \in [a_k, b_k]$, dalla formula di Taylor, per un certo $\eta \in (a_k, b_k)$,

$$f(b_k) = f(a_k) + f'(\eta) \cdot (b_k - a_k),$$

e quindi facilmente, se f' non varia troppo in (a_k, b_k) ,

$$\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} = f'(\eta) \approx f'(x_k)$$

da cui

$$w_k = \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{|b_k - a_k|} = \left| \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \right| = |f'(\eta)| \approx |f'(x_k)|.$$

Nota.

Supponiamo sia (a_0, b_0) l'intervallo iniziale. Dopo la prima iterazione è **noto esclusivamente** x_0 e quindi

- non è applicabile il criterio dello step

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$$

in quanto oltre a x_0 necessita pure di x_1 , che è quindi utilizzabile a partire solo dalla seconda iterazione;

- sono applicabili i criteri del residuo e del residuo pesato in quanto rispettivamente

$$|f(x_k)| \leq \epsilon,$$

$$\frac{|f(x_k)|}{w_k} \leq \epsilon \text{ dove } w_k = \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{b_k - a_k} \approx |f'(x_k)|$$

richiedono esclusivamente il calcolo di $f(x_0)$ e possibilmente di w_0 che dipende esclusivamente da $f(a_0)$, $f(b_0)$.

Esempio

Risolvere mediante il metodo di bisezione, con i criteri di arresto esposti, le equazioni $f_k(x) = 0$ dove:

$$f_1(x) = x^2 - 2$$

$$f_2(x) = 10^{-8} \cdot (x^2 - 2)$$

$$f_3(x) = 10^8 \cdot (x^2 - 2)$$

Non è difficile vedere che hanno tutte quali zeri $\pm\sqrt{2}$, ma che in termini di grafico,

- 1 la prima **non ha un grafico molto ripido** vicino alla soluzione (in effetti la derivata in $\sqrt{2}$ vale $2\sqrt{2}$),
- 2 la seconda è **molto piatta** vicino alla soluzione (la derivata in $\sqrt{2}$ vale $2\sqrt{2} \cdot 10^{-8}$),
- 3 la terza è **molto ripida** vicino alla soluzione (la derivata in $\sqrt{2}$ vale $2\sqrt{2} \cdot 10^8$).

Alcuni criteri di arresto per il metodo di bisezione

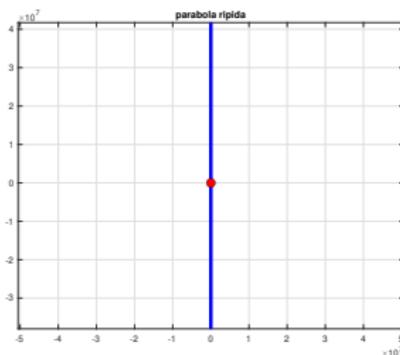
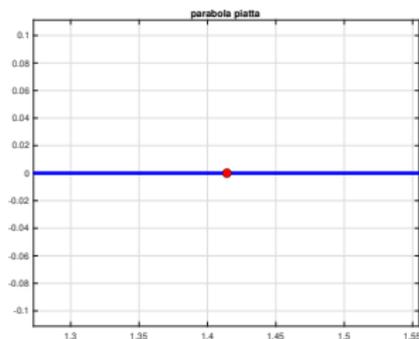
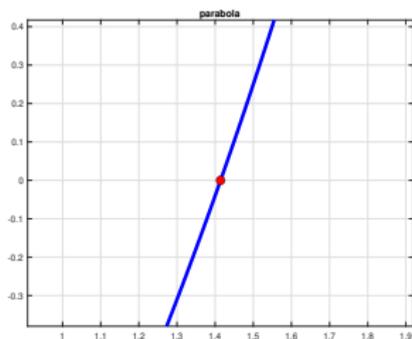


Figura: Grafico delle funzioni $f_1(x) = x^2 - 2$, $f_2(x) = 10^{-8} \cdot (x^2 - 2)$ (piatta), $f_3(x) = 10^{+8} \cdot (x^2 - 2)$ (ripida). Fare attenzione alla scala utilizzata.

Il metodo di bisezione, implementato con ognuno dei test di arresto porge i seguenti risultati, in cui

- `res` indica il test del residuo,
- `wres` indica il test del residuo pesato,
- `step` indica il criterio dello step.

Abbiamo interrotto il processo se il metodo aveva fatto 10000 iterazioni, o si fosse verificato il criterio di arresto con tolleranza $\text{tol}=10^{-10}$.

test	x_n	$ x_n - x^* $	$ f(x_n) $	n
res	1.414213562384248e + 00	1.115e - 11	3.154e - 11	29
wres	1.414213562384248e + 00	1.115e - 11	3.154e - 11	29
step	1.414213562326040e + 00	4.706e - 11	1.331e - 10	34

Tabella: La funzione f_1 non è piatta o ripida nei pressi dello zero x^* e i test di arresto sono circa equivalenti.

Alcuni criteri di arresto per il metodo di bisezione

test	x_n	$ x_n - x^* $	$ f(x_n) $	n
res	$1.4140625000000000e + 00$	$1.511e - 04$	$4.272e - 12$	7
wres	$1.414213562384248e + 00$	$1.115e - 11$	$3.154e - 19$	29
step	$1.414213562326040e + 00$	$4.706e - 11$	$1.331e - 18$	34

Tabella: La funzione f_2 è molto piatta nei pressi dello zero x^* e il test del residuo risulta molto impreciso, effettuando poche iterazioni, offrendo però una scarsa approssimazione di x^* . Gli altri due test d'arresto risultano appropriati.

test	x_n	$ x_n - x^* $	$ f(x_n) $	n
res	$1.414213562373095e + 00$	$2.220e - 16$	$4.441e - 08$	10000
wres	$1.414213562384248e + 00$	$1.115e - 11$	$3.154e - 03$	29
step	$1.414213562326040e + 00$	$4.706e - 11$	$1.331e - 02$	34

Tabella: La funzione f_3 è molto ripida nei pressi dello zero x^* e il test del residuo risulta molto conservativo, superando il numero massimo di iterazioni concesse, nonostante abbia calcolato una ottima approssimazione di x^* . Gli altri due test d'arresto risultano appropriati.

Commento

I risultati mostrano

- 1** *la superiorità del test basato sul residuo pesato, rispetto al test del residuo, qualora la funzione abbia derivate molto grandi o molto piccole in prossimità della soluzione;*
- 2** *l'invarianza rispetto alla pendenza del metodo dello step, che in effetti non ha a che fare con valutazioni delle funzioni f_1 , f_2 , f_3 (rifletterci su).*

Supponiamo che

- x^* sia uno zero di f in $[a, b]$,
- f sia derivabile due volte con continuità in $[a, b]$.

Dalla formula di Taylor centrata in $x_k \in [a, b]$, per un certo ξ_k che sta nel più piccolo intervallo aperto contenente x_k, x^* , abbiamo

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2.$$

Tralasciando il termine di ordine superiore $f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2$ abbiamo

$$0 \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k)$$

e se $f'(x_k) \neq 0$, dopo facili conti,

$$x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Metodo di Newton per la risoluzione di equazioni nonlineari

Visto che

$$x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

il metodo di Newton genera la successione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

supposto che sia $f'(x_k) \neq 0$ per $k = 0, 1, \dots$ (cf. [1, p.58], [13]).

Nota.

Si osservi che a parte il ragionamento con la formula di Taylor, per definire il metodo di Newton, si richiede esclusivamente che la funzione sia derivabile una volta (e non 2) nei punti x_k , con $f'(x_k) \neq 0$.

Nota. (Origine storica)

Il metodo di Newton fu presentato dallo stesso nel 1687, per lo studio dell'equazione $x - e \cdot \sin(x) = M$. Di seguito il metodo fu migliorato nel 1690 da Raphson. La forma moderna é dovuta a Simpson (1740).

Nota.

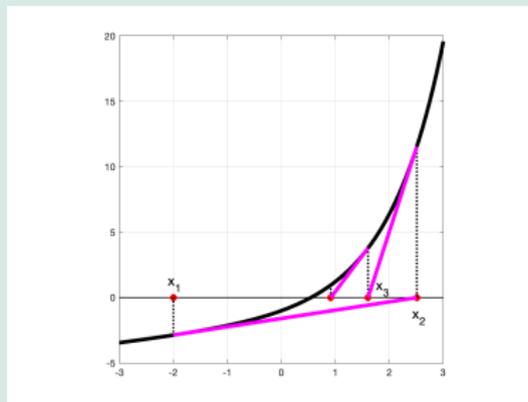


Figura: Interpretazione geometrica del metodo di Newton, alla iterazione n -sima, $n = 1, 2, 3, 4$, per calcolare uno zero di una funzione convessa.

Il metodo ha una interpretazione geometrica. Alla k -sima iterazione:

- 1** si calcola $f(x_{k-1})$;
- 2** si disegna la retta tangente γ_k alla curva definita dalle coppie $(x, f(x))$, nel punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$;
- 3** si pone x_k l'intersezione di γ_k con l'asse delle ascisse.

Le iterazioni del metodo di Newton terminano tipicamente secondo i seguenti criteri di arresto.

- In quello dello **step**, fissata una tolleranza `toll` si ferma il processo qualora

$$|x_{k+1} - x_k| < \text{toll};$$

- In quello dello **residuo**, in cui ciò accade qualora

$$|f(x_k)| < \text{toll};$$

- In quello dello **residuo pesato**, in cui ciò accade qualora

$$\frac{|f(x_k)|}{w_k} < \text{toll}, \quad w_k = \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|}$$

Nota.

Per il metodo di Newton si ha che **il criterio dello step è molto simile a un residuo pesato**, in quanto per $w_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \approx f'(x_k)$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \approx -\frac{f(x_k)}{w_k}.$$

- Per quanto riguarda la velocità di convergenza proveremo un teorema di **convergenza locale** (cf. [1], p. 60).
- Un tale asserto mostra come sia possibile risolvere numericamente l'equazione $f(x) = 0$, **partendo da un punto x_0 appartenente a un certo intervallo I contenente la radice x^*** . Usualmente tale intervallo non è di semplice determinazione.
- Differentemente, in quelli detti di **convergenza globale**, un tale intervallo I è noto esplicitamente.

Teorema (Convergenza locale)

Si supponga

1 $f \in C^2([a, b]);$

2 $x^* \in (a, b)$ sia uno **zero semplice** di f , ovvero $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$.

Allora per $x_0 \in [a, b]$ **sufficientemente vicino** a x^* le iterazioni del metodo di Newton

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sono ben definite e convergono almeno **quadraticamente** a x^* .

Se $f''(x^*) \neq 0$, allora la convergenza è esattamente quadratica.

Ricordiamo il seguente teorema.

Teorema

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e sia $\{x_n\}$ una successione a valori in $[a, b]$, convergente a L . Allora

$$\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n) = f(L).$$

Traccia.

Nelle ipotesi del teorema si mostra (non immediato!) che esiste un intervallo $\mathcal{I} = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ tale che

- se $x_0 \in \mathcal{I}$ e x_k è la k -sima iterata del metodo di Newton partendo da x_0 , allora $x_k \in \mathcal{I}$;
- posto $e_k = |x_k - x^*|$ si ha

$$e_{k+1} \leq C e_k^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

con $C \geq 0$ indipendente da $x_0 \in \mathcal{I}$ e k ;

- la costante $C \geq 0$ è tale che $C\delta \in [0, 1)$ (dove δ è la semiampiezza dell'intervallo \mathcal{I})

Mostriamo che effettivamente la successione converge (non basta dire che $e_{k+1} \leq C e_k^2$). Detto questo, visto che $x_0 \in \mathcal{I}$, abbiamo $e_0 = |x_0 - x^*| \leq \delta$ e

$$\begin{aligned} 0 &\leq C e_{k+1} \leq C(C e_k^2) = (C e_k)^2 \leq (C \cdot C e_{k-1}^2)^2 = (C e_{k-1})^{2^2} \\ &\leq (C \cdot C e_{k-2}^2)^{2^2} = (C e_{k-2})^{2^3} \leq (C \cdot C e_{k-3}^2)^{2^3} = (C e_{k-3})^{2^4} \\ &\leq \dots \leq (C e_0)^{2^{k+1}} \leq (C\delta)^{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Da

$$0 \leq Ce_{k+1} \leq (C\delta)^{2^{k+1}}$$

visto che $C\delta \in [0, 1)$ necessariamente

$$\lim_k (C\delta)^{2^{k+1}} = 0$$

e quindi per il teorema del confronto pure $Ce_{k+1} \rightarrow 0$ ovvero, essendo $C > 0$ una costante indipendente da k , $e_{k+1} \rightarrow 0$ cioè il metodo di Newton è convergente con **convergenza almeno quadratica**.

Con qualche conto non banale, partendo da questo risultato, essendo $f''(x^*) \neq 0$, si mostra che per n sufficientemente grande e ξ_n che sta nel più piccolo intervallo aperto contenente x^* e x_n

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|}$$

e quindi poichè $\lim_n x_n = x^*$, $\lim_n \xi_n = x^*$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$, $f \in C^2(\mathcal{I})$,

$$\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \lim_n \frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|} = \frac{\lim_n |f''(\xi_n)|}{\lim_n 2|f'(x_n)|} = \frac{|f''(\lim_n \xi_n)|}{2|f'(\lim_n x_n)|} = \frac{|f''(x^*)|}{2 \cdot |f'(x^*)|} \neq 0$$

cioè la convergenza è esattamente quadratica.

Nota. (Facoltativa)

Nel precedente teorema si é affermato che $\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|}$. In effetti, per un certo ξ_n nel piú piccolo intervallo aperto contenente x^* e x_n

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2/2$$

e quindi dividendo ambo i membri per $f'(x_n) \neq 0$, da $(x^* - x_{n+1}) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n)$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2} = (x^* - x_{n+1}) + \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2}$$

per cui

$$x^* - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2} \Rightarrow |x^* - x_{n+1}| = \frac{|f''(\xi_n)|}{|f'(x_n)|} \cdot \frac{|x^* - x_n|^2}{2}$$

e quindi essendo $e_n = |x^* - x_n|$ e $e_{n+1} = |x^* - x_{n+1}|$, concludiamo che

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|}$$

Dimostriamo un teorema di convergenza globale, che permette di risolvere numericamente l'equazione $f(x) = 0$, partendo da un punto x_0 appartenente a un ben determinato intervallo I contenente la radice x^* .

Teorema (Convergenza globale del metodo di Newton (Mourraille, 1768))

Sia $f \in C^2([a, b])$ una funzione che gode delle seguenti proprietà

- 1 $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$;
- 2 $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Allora

- 1 esiste uno ed un solo $x^* \in (a, b)$ tale che $f(x^*) = 0$ e tale zero è semplice;
- 2 per $x_0 \in [x^*, b]$ il metodo di Newton $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ è ben definito;
- 3 la successione $\{x_n\}$ è decrescente e converge a x^* .

Dimostrazione.

1. Essendo $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora la funzione f' è continua e strettamente crescente in $[a, b]$. Distinguiamo due casi

A. caso f' ha segno costante in $[a, b]$;

- se $f' > 0$ o $f' < 0$ allora f è strettamente monotona (crescente o decrescente);
- da $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora f è strettamente monotona crescente in $[a, b]$;
- se f è strettamente monotona crescente in $[a, b]$, allora ha un **unico zero** $x^* \in (a, b)$, necessariamente **semplice**, in quanto f è strettamente monotona crescente in $[a, b]$ e quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$, e quindi in particolare per $f'(x^*) > 0$;

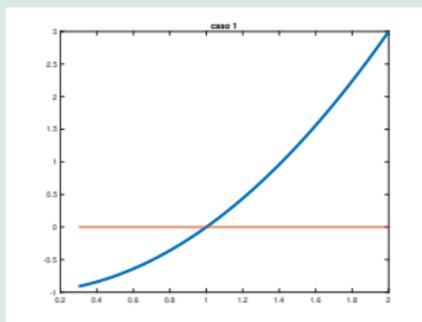


Figura: Grafico della funzione nel caso f' abbia segno costante

B. caso f' non ha segno costante in $[a, b]$:

- essendo f' strettamente crescente ha un unico zero (minimo, massimo o sella);
- essendo $f''(x) > 0$ allora f è convessa per cui f ha un unico minimo $x_{min} \in [a, b]$, in cui $f(x_{min}) < 0$;
- dalla monotonia crescente di f' in $[x_{min}, b]$ e dal fatto che $f(x_{min}) \leq f(a) < 0$ e $f(x_{min}) \leq 0 < f(b)$ abbiamo che vi è un **unico zero** $x^* \in (a, b)$ con $f'(x^*) > f'(x_{min}) = 0$ e quindi pure **semplice**.

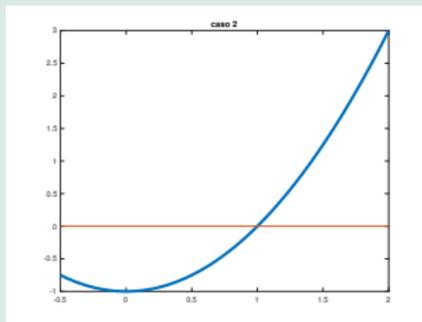


Figura: Grafico della funzione nel caso f' non abbia segno costante

2. Se $x_k \in [x^*, b]$, allora la successione

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k),$$

è *ben definita* in quanto la funzione f' è strettamente positiva in $[x^*, b]$.

3. Sia $n \geq 0$ e $x_n \geq x^*$. Mostriamo che anche $x_{n+1} \geq x^*$. Dalla formula di Taylor, essendo $f''(x) > 0$, per ogni $x \in [a, b]$, per un certo ξ_n nel più piccolo intervallo aperto contenente x_n e x^*

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x^* - x_n) + f''(\xi_n) \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2}. \quad (2)$$

Dividendo ambo i membri di (2) per $f'(x_n) > 0$, ricaviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f'(x_n)}{f'(x_n)} \cdot (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2} \\ &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Da

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2}$$

- in virtù della formula di Newton, necessariamente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow -x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n,$$

- $\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2} \geq 0,$

ricaviamo che $x_{n+1} \geq x^*$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2} \\ &= x^* + \underbrace{\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n \right)}_{-x_{n+1}} + \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2} \\ &= (x^* - x_{n+1}) + \underbrace{\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(x^* - x_n)^2}{2}}_{\geq 0} \geq x^* - x_{n+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

ovvero $0 \geq x^* - x_{n+1}$, da cui $x_{n+1} \geq x^*$.

Metodo di Newton: un teorema di convergenza globale

Inoltre la successione $\{x_n\}$ è **decescente** perchè da $f(x_n) \geq 0$ e $f'(x_n) > 0$ abbiamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n.$$

Poichè la successione $\{x_n\}$ è decrescente e limitata inferiormente da x^* , ha limite ξ^* .

Da

- $\lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} = \xi^*$,
- per la continuità di f e f' ,

ricaviamo

$$\begin{aligned}\xi^* &= \lim_n x_{n+1} = \lim_n \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = \lim_n x_n - \lim_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \xi^* - \frac{\lim_n f(x_n)}{\lim_n f'(x_n)} = \xi^* - \frac{f(\lim_n x_n)}{f'(\lim_n x_n)} = \xi^* - \frac{f(\xi^*)}{f'(\xi^*)}\end{aligned}$$

ovvero $\xi^* = \xi^* - \frac{f(\xi^*)}{f'(\xi^*)}$ che implica

$$\frac{f(\xi^*)}{f'(\xi^*)} = 0.$$

Da $f'(\xi^*) > f'(x^*) > 0$ abbiamo $f(\xi^*) = 0$. Ma x^* è l'unico zero di f e quindi $\xi^* = x^*$ cioè il metodo di Newton converge decrescentemente a x^* .

Teorema

Sia $f \in C^2([a, b])$ una funzione che gode delle seguenti proprietà

- 1 $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$;
- 2 $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Allora

- 1 esiste uno ed un solo $x^* \in (a, b)$ tale che $f(x^*) = 0$; tale zero è semplice;
- 2 per $x_0 \in [a, x^*]$ il metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

è ben definito;

- 3 la successione $\{x_n\}$ è crescente e converge a x^* .

Traccia.

Applicare il teorema precedente a $F(x) = f(-x)$.

Nota.

Qualora sia da calcolare lo zero x^* di $F(x) = 0$, se

- $F \in C^2([a, b])$,
- $F(a) \cdot F(b) < 0$,
- $F''(x) < 0$

visto che

$$F(x^*) = 0 \Leftrightarrow -F(x^*) = 0,$$

allora si riutilizzano i teoremi precedenti di convergenza globale, applicati all'approssimazione di x^* con

$$f(x) \equiv -F(x).$$

Nota. (Zeri multipli)

Il metodo di Newton *non ha sempre convergenza quadratica*, come nel caso del problema $f(x) = 0$ in cui x^* sia uno zero avente molteplicità $p > 1$ cioè tale che

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(p-1)}(x^*) = 0.$$

Quale esempio si ponga

$$f(x) = (x - 2)\log(x - 1).$$

Si verifica facilmente che $x^* = 2$ è un suo zero e visto che (manualmente o con calcolo simbolico)

- $f^{(1)}(x) = \log(x - 1) + (x - 2)/(x - 1),$
- $f^{(2)}(x) = 2/(x - 1) - (x - 2)/(x - 1)^2,$

ha molteplicità 2, visto che $f^{(1)}(2) = 0$ ma $f^{(2)}(2) \neq 0$. Si vede che il metodo di Newton non converge quadraticamente a tale radice.

Metodo di Newton: alcuni esempi

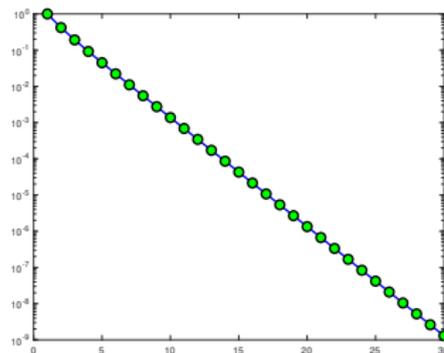
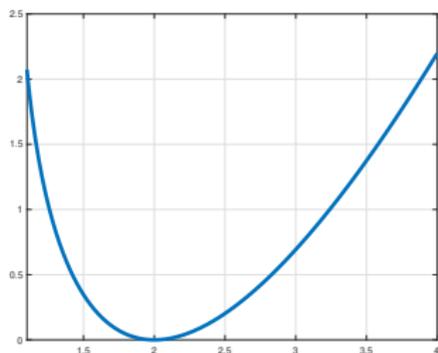


Figura: A sinistra, plot della funzione $f(x) = (x - 2) \log(x - 1) = 0$. A destra, errore assoluto $|x_k - x^*|$ dove x_k è la k -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di $f(x) = (x - 2) \log(x - 1) = 0$, in scala semilogaritmica, partendo da $x_0 = 3$ (evidentemente la convergenza è lineare e non quadratica).

Esempio

Si applichi il metodo di Newton per risolvere $f(x) = \sin(x) - x = 0$, la cui unica soluzione è $x^* = 0$.

- Da $f'(x) = \cos(x) - 1$, le iterate del metodo di Newton sono

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin(x_k) - x_k}{\cos(x_k) - 1}$$

- Osserviamo che il processo non è ben definito se $\cos(x_k) - 1 = 0$, ovvero $x_k = 2m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$.
- Interrompiamo il metodo quando $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-6}$ e quale punto iniziale poniamo $x_0 = 3$.
- Si noti che $x^* = 0$ è uno zero multiplo in quanto $f(x^*) = f'(x^*) = 0$. Questo, per un teorema che vedremo successivamente causerà una povera performance da parte del metodo.
- Sperimentalmente $e_{k+1}/e_k \approx 0.667$ per $k > 1$ e quindi almeno empiricamente possiamo affermare che il metodo di Newton, relativamente a questo esempio, ha convergenza lineare.

Metodo di Newton: alcuni esempi ($\sin(x) - x = 0$)

n	x_n	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	3.0000000000000000e + 00	3.00e + 00	—	2.86e + 00
1	1.563371471588948e + 00	1.56e + 00	1.44e + 00	5.63e - 01
2	9.957580269725619e - 01	9.96e - 01	5.68e - 01	1.57e - 01
3	6.524666397563195e - 01	6.52e - 01	3.43e - 01	4.53e - 02
4	4.318439019482230e - 01	4.32e - 01	2.21e - 01	1.33e - 02
5	2.8699511304449173e - 01	2.87e - 01	1.45e - 01	3.92e - 03
6	1.910666484344176e - 01	1.91e - 01	9.59e - 02	1.16e - 03
7	1.273001625888427e - 01	1.27e - 01	6.38e - 02	3.44e - 04
8	8.484384021569123e - 02	8.48e - 02	4.25e - 02	1.02e - 04
9	5.655577232707287e - 02	5.66e - 02	2.83e - 02	3.01e - 05
10	3.770183802430618e - 02	3.77e - 02	1.89e - 02	8.93e - 06
...
15	4.964643054317002e - 03	4.96e - 03	2.48e - 03	2.04e - 08
...
33	3.359297519803817e - 06	3.36e - 06	1.68e - 06	6.32e - 18
34	2.239575075072224e - 06	2.24e - 06	1.12e - 06	1.87e - 18

Tabella: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione $x^* = 0$ di

$f(x) = \sin(x) - x = 0$ è molto lenta, visto che la soluzione è multipla ovvero

$f(x^*) = f'(x^*) = 0$. Il test del residuo non assicura che $|x_n - x^*|$ sia piccolo, e questo è dovuto al fatto che la funzione, nei pressi della soluzione è molto piatta ($f'(x^*) = 0$).

Metodo di Newton: alcuni esempi ($\sin(x) - x = 0$)

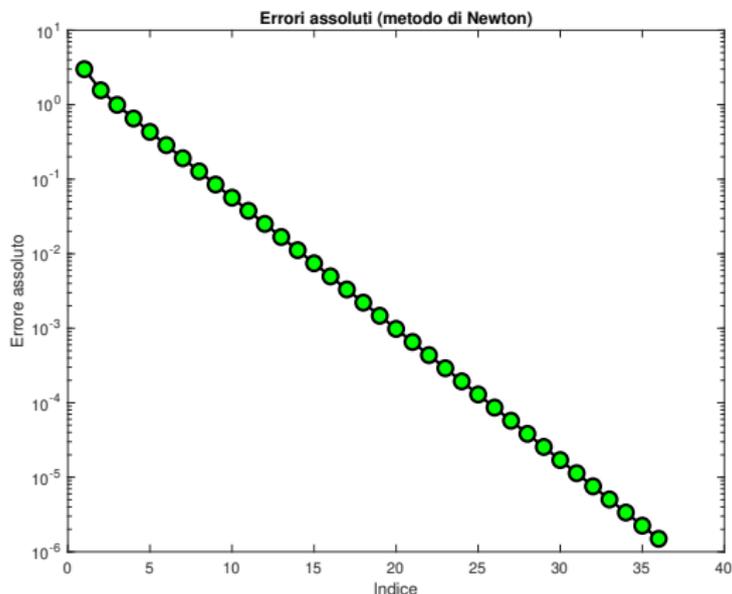


Figura: Errore assoluto $|x_k - x^*|$ dove x_k è la k -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di $f(x) = \sin(x) - x = 0$, in scala semilogaritmica.

Esempio

Si applichi il metodo di Newton per risolvere $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$, la cui unica soluzione è $x^* \approx 0.4428544010023885$.

Da $f'(x) = \exp(x) + 1$, il metodo di Newton definisce la successione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\exp(x_k) - 2 + x_k}{\exp(x_k) + 1}.$$

- Osserviamo che il processo è ben definito in quanto $\exp(x_k) + 1 > 0$.
- Essendo $f'(x) = \exp(x) + 1 > 0$ lo zero è semplice.

Mettiamo in relazione il test in tabella a quanto noto per la convergenza.

- 1 $x^* = 0.4428544010023885 \dots$ è uno zero semplice;
- 2 $f'(x) = \exp(x) + 1 > 0$.
- 3 $f''(x) = \exp(x) > 0$.

Quindi

- f è convessa,
- f è strettamente crescente,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Di conseguenza, di sicuro esistono a e b nel dominio per cui $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Ad esempio, possiamo porre come nel caso di bisezione $a = 0$, $b = 1$ in quanto $f(0) = -2$, $f(1) = \exp(1) - 2 + 1 = 1.7182\dots$

Il teorema di convergenza globale dice che partendo da $x_0 = b = 1$ otterremo una successione

- decrescente,
- convergente a x^* e per il teorema di convergenza locale avrà convergenza quadratica, come si può verificare dal relativo grafico e dalla sua tabella.

Metodo di Newton: alcuni esempi ($\exp(x) - 2 + x = 0$)

n	x_n	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	1.0000000000000000e + 00	5.57e - 01	-	1.72e + 00
1	5.378828427399902e - 01	9.50e - 02	4.62e - 01	2.50e - 01
2	4.456167485265452e - 01	2.76e - 03	9.23e - 02	7.07e - 03
3	4.428567246451099e - 01	2.32e - 06	2.76e - 03	5.94e - 06
4	4.428544010040325e - 01	1.64e - 12	2.32e - 06	4.20e - 12
5	4.428544010023886e - 01	1.11e - 16	1.64e - 12	1.11e - 16

Tabella: Metodo di Newton relativamente a $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$.

- La convergenza del metodo di Newton alla soluzione $x^* = 0.4428544010023885$ di $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ è molto rapida ovvero $f(x^*) = f'(x^*) = 0$.
- Il test del residuo è molto accurato.
- Il test dello step individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente. Ad esempio, alla quinta iterata dice correttamente che l'errore alla quarta era $1.64e - 12$. Si osservi che la successione $\{x_n\}$ è in effetti decrescente per $n = 0, 1, \dots, 5$.

Metodo di Newton: alcuni esempi ($\exp(x) - 2 + x = 0$)

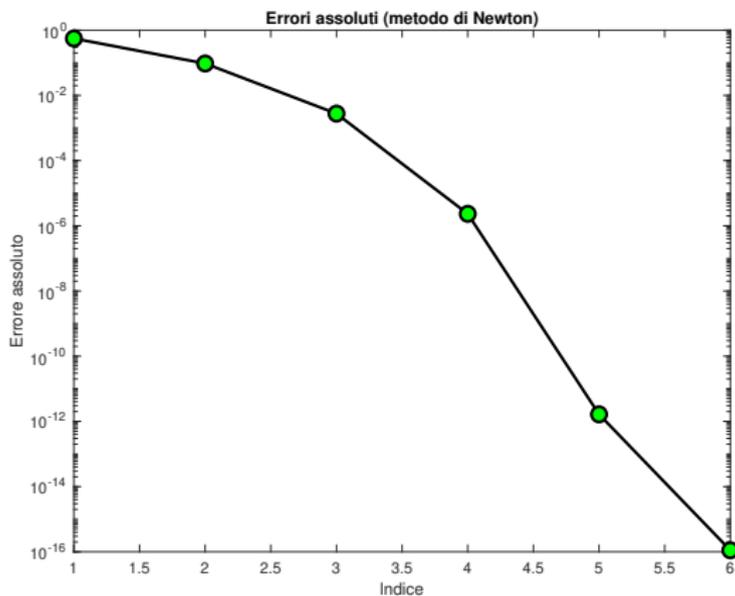


Figura: Errore assoluto $|x_k - x^*|$ dove x_k è la k -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$, in scala semilogaritmica.

Esempio

Si applichi il metodo di Newton per risolvere $f(x) = x^2 - 2$, la cui unica soluzione è $x^ = 1.414213562373095\dots$, ovvero la radice quadrata di 2.*

Visto che $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, le iterazioni del metodo di Newton saranno

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{x_k} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_k + \frac{2}{x_k} \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

che saranno indefinite qualora per qualche k si abbia $x_k = 0$. Ovviamente $f'(x^*) = 2\sqrt{2} \neq 0$ e quindi lo zero è semplice.

Nota.

Osserviamo che il metodo calcola la radice di 2 utilizzando esclusivamente operazioni elementari, ed era un metodo comune per calcolare più in generale, con semplici modifiche, le radici quadrate di numeri non negativi.

Dal punto di vista della convergenza

- 1 la funzione $f(x) = x^2 - 2$ assume valori negativi per $x \in [0, \sqrt{2})$, e positivi per $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$,
 - 2 si ha che $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$.
- Nell'esperimento, sapendo che $\sqrt{2} \in (1, 2)$, siamo partiti da $x_0 = 2 > x^* = \sqrt{2}$, con tolleranza $\epsilon = 10^{-15}$.
 - In questo test le iterazioni si interrompono perché $x_5 = \sqrt{2}$ e non perchè un criterio di arresto è verificato (si veda la terza colonna della tabella).
 - Per il teorema di convergenza globale possiamo affermare che il metodo di Newton determina una successione $\{x_k\}$ decrescente e convergente a x^* . Per il teorema di convergenza locale, la convergenza è quadratica.

n	x_n	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	2.0000000000000000e + 00	5.86e - 01	-	2.00e + 00
1	1.5000000000000000e + 00	8.58e - 02	5.00e - 01	2.50e - 01
2	1.4166666666666667e + 00	2.45e - 03	8.33e - 02	6.94e - 03
3	1.414215686274510e + 00	2.12e - 06	2.45e - 03	6.01e - 06
4	1.414213562374690e + 00	1.59e - 12	2.12e - 06	4.51e - 12
5	1.414213562373095e + 00	0.00e + 00	1.59e - 12	4.44e - 16

Tabella: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione $x^* = \sqrt{2}$ di $f(x) = x^2 - 2 = 0$

- Osserviamo che numericamente, per $k = 1, 2, 3$, $e_{k+1}/e_k^2 \approx 3.54e - 01$, suggerendo una convergenza quadratica del metodo di Newton, applicato a questo esempio. Come visto, la successione è decrescente.
- Il test del residuo è molto accurato;
- Il test dello step individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente. Ad esempio, alla quinta iterata dice correttamente che l'errore alla quarta era $1.59e - 12$.

Metodo di Newton: alcuni esempi, radice quadrata di 2

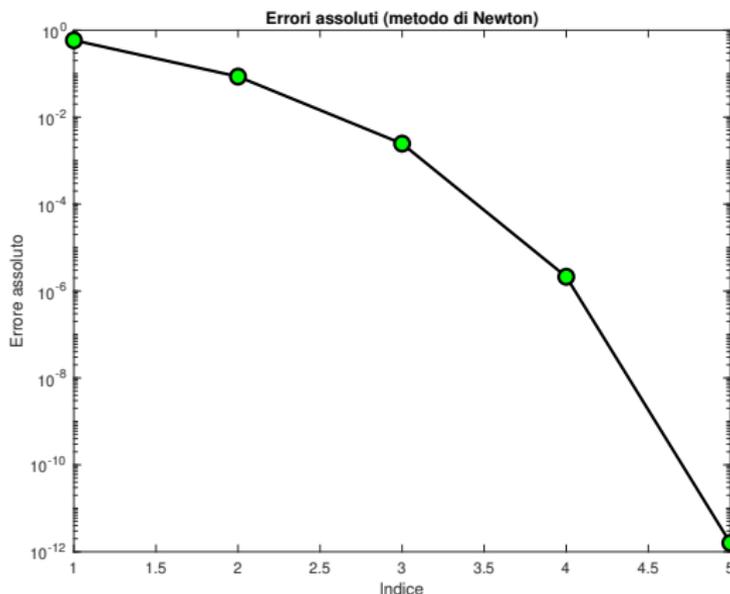


Figura: Errore assoluto $|x_k - x^*|$ dove x_k è la k -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di $f(x) = x^2 - 2 = 0$, in scala semilogaritmica.

Nota. (Calcolo radici n-sime (facoltativo))

Si osservi che più in generale per calcolare la *radice n-sima di α* basta risolvere

$$f(x) = x^n - \alpha = 0$$

dove $x^* \in I$, con I dipendente da n . Ad esempio, se n è dispari si può supporre $I = \mathbb{R}$, mentre se n è pari $I = [0, +\infty)$.

Visto che $f'(x) = nx^{n-1}$ e quindi il metodo di Newton genera la successione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - \alpha}{nx_k^{n-1}} = \frac{n-1}{n}x_k + \frac{\alpha}{nx_k^{n-1}}.$$

In virtù del teorema di convergenza globale, per dedurre la convergenza basta scegliere x_0 cosicchè $f(x_0) \geq 0$, ovvero $x_0^n \geq \alpha$ e tale convergenza è quadratica per il teorema di convergenza locale.

Esempio (facoltativo)

Calcolare la divisione a/b utilizzando esclusivamente somme, sottrazioni o moltiplicazioni.

Questo problema è sorto per effettuare la divisione con i primi calcolatori, il cui processore era in grado di calcolare esclusivamente somme, sottrazioni o moltiplicazioni.

Visto che

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

e che si suppone di poter calcolare moltiplicazioni, basta calcolare $1/b$ e moltiplicare il risultato ottenuto per a .

Dopo una non banale analisi sui numeri macchina normalizzati, ci si riconduce al calcolo dell' reciproco di numeri in $\alpha \in [1/2, 1)$ ovvero risolvere l'equazione

$$f(x) = \frac{1}{x} - \alpha = 0, \quad \alpha \in [1/2, 1).$$

Visto che

- $f(x) = \frac{1}{x} - \alpha$,
- $f'(x) = -1/x^2$,

il metodo di Newton genera la successione

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - \alpha}{-\frac{1}{x_k^2}} \\ &= x_k + x_k^2 \left(\frac{1}{x_k} - \alpha \right) \\ &= 2x_k - \alpha x_k^2 = (2 - \alpha \cdot x_k) \cdot x_k\end{aligned}\tag{5}$$

che può essere valutata solo con 1 sottrazione e due prodotti.

Di conseguenza, il metodo di Newton permette di calcolare la divisione di due numeri usando solo sottrazioni e moltiplicazioni.

Metodo di Newton: alcuni esempi, (calcolare $x = 1/0.85$), facoltativo

n	x_n	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	2.0000000000000000e + 00	8.24e - 01	-	3.50e - 01
1	6.0000000000000001e - 01	5.76e - 01	1.40e + 00	8.17e - 01
2	8.9400000000000001e - 01	2.82e - 01	2.94e - 01	2.69e - 01
3	1.1086494000000000e + 00	6.78e - 02	2.15e - 01	5.20e - 02
4	1.172560831697694e + 00	3.91e - 03	6.39e - 02	2.83e - 03
5	1.176457594968538e + 00	1.30e - 05	3.90e - 03	9.39e - 06
6	1.176470588091793e + 00	1.44e - 10	1.30e - 05	1.04e - 10
7	1.176470588235294e + 00	0.00e + 00	1.44e - 10	0.00e + 00

Tabella: Metodo di Newton per il calcolo della soluzione di $f(x) = \frac{1}{x} - 0.85 = 0$.

- La *convergenza* del metodo di Newton alla soluzione di $f(x) = \frac{1}{x} - 0.85$, cioè

$$x^* = 1/0.85 \approx 1.176470588235294,$$

partendo da $x_0 = 2$ è molto rapida.

- Il **test del residuo** è molto accurato.
- Il test dello **step** individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente-
- il calcolo ha necessitato, viste le 7 iterazioni, di 7 somme e 14 prodotti.

Nota.

- Si osservi che la funzione $f(x) = \frac{1}{x} - 0.85$ è tale che $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Quindi per $x > 0$ è una funzione decrescente e convessa.
- Applicando il teorema di convergenza globale per opportune funzioni **convesse e decrescenti**, abbiamo che scegliendo $0 < x_0 < x^* = 1/0.85$, ovvero tale che $f(x_0) > 0$, la successione risulta crescente e convergente a x^* .
- Nel nostro esempio, $f(x_0) < 0$, ma $f(x_1) > 0$ e quindi la successione x_1, x_2, x_3, \dots risulta crescente e converge a x^* .

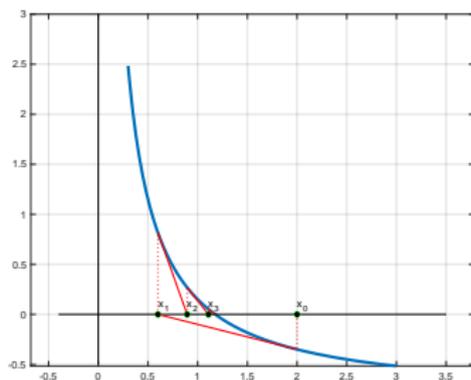


Figura: Prime iterazioni del metodo di Newton per risolvere $\frac{1}{x} - 0.85 = 0$, con $x_0 = 2$.

Uno dei metodi più comunemente utilizzati per la risoluzione di equazioni nonlineari è quello delle secanti, che nel caso di sistemi di equazioni nonlineari porta (non banalmente) al molto noto metodo di Broyden (1965).

Se $f \in C([a, b])$, il **metodo delle secanti** definisce la successione (cf. [1, p.65])

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (6)$$

Se $f \in C^1([a, b])$ essa può essere considerata una *variante* del metodo di Newton avente come iterate $\{\tilde{x}_n\}$. Infatti, sostituendo $f'(\tilde{x}_n)$ col rapporto incrementale

$$f'(\tilde{x}_n) \approx \frac{f(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_{n-1})}{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}$$

ricaviamo

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)} \approx \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{\frac{f(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_{n-1})}{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}} = \tilde{x}_n - f(\tilde{x}_n) \cdot \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{f(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_{n-1})}.$$

Si nota subito che il metodo delle secanti

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad x_0, x_1 \in [a, b] \quad (7)$$

ha le seguenti proprietà che lo distinguono dal metodo di Newton

- richiede **due punti iniziali** x_0, x_1 ,
- non necessita del calcolo della derivata f' .

Si dimostra che

Teorema (Convergenza locale, Jeeves, 1958)

Se $f \in C^2([a, b])$ con la radice $\alpha \in [a, b]$ e $f'(\alpha) \neq 0$ allora, se x_0, x_1 sono sufficientemente vicine ad α , le iterate del metodo delle secanti convergono ad α , con ordine di convergenza pari alla **sezione aurea**, ovvero

$$p = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \approx 1.618033988749895$$

Esempio

L'intento di questa sezione è di vedere la performance del metodo delle secanti, per valutare gli zeri di

- 1 $f(x) = \sin(x) - x = 0$, con $x_0 = -2$, $x_1 = 3$;
- 2 $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$, con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$;
- 3 $f(x) = x^2 - 2 = 0$, con $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Nota. (Origine storica)

Un primitivo utilizzo del metodo delle secanti si trova in una tavoletta babilonese del 1800 A.C..

*Nota anche come **Regola della doppia falsa posizione**, fu perfezionato da Cardano nel 1545, che lo utilizzò come metodo iterativo (cf. [8]).*

Metodo delle secanti: alcuni esempi

Utilizziamo il metodo delle secanti per il calcolo dello zero di $\sin(x) - x = 0$.

n	x_n	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	-2.0000000000000000e + 00	2.00e + 00	—	1.09e + 00
1	3.0000000000000000e + 00	3.00e + 00	5.00e + 00	2.86e + 00
2	-6.192179107632967e - 01	6.19e - 01	3.62e + 00	3.88e - 02
3	-5.707325299195892e - 01	5.71e - 01	4.85e - 02	3.05e - 02
4	-3.934167222042483e - 01	3.93e - 01	1.77e - 01	1.01e - 02
5	-3.059435414661084e - 01	3.06e - 01	8.75e - 02	4.75e - 03
10	-7.412520006397208e - 02	7.41e - 02	2.41e - 02	6.79e - 05
20	-4.453415286714068e - 03	4.45e - 03	1.45e - 03	1.47e - 08
30	-2.675831159495087e - 04	2.68e - 04	8.69e - 05	3.19e - 12
40	-1.607772401198045e - 05	1.61e - 05	5.22e - 06	6.93e - 16
50	-9.661064115820756e - 07	9.66e - 07	3.14e - 07	1.50e - 19
60	-5.537352656281193e - 08	5.54e - 08	2.06e - 08	2.65e - 23
65	-1.420660201192862e - 08	1.42e - 08	0.00e + 00	0.00e + 00

Tabella: Metodo delle secanti per il calcolo dello zero di $\sin(x) - x = 0$.

- La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione $x^* = 0$ di $f(x) = \sin(x) - x = 0$ è molto lenta, ed è causata dal fatto che la soluzione è multipla ovvero $f(x^*) = f'(x^*) = 0$.
- Quali dati iniziali abbiamo scelto $x_0 = -2$ e $x_1 = 3$.

Metodo delle secanti: alcuni esempi

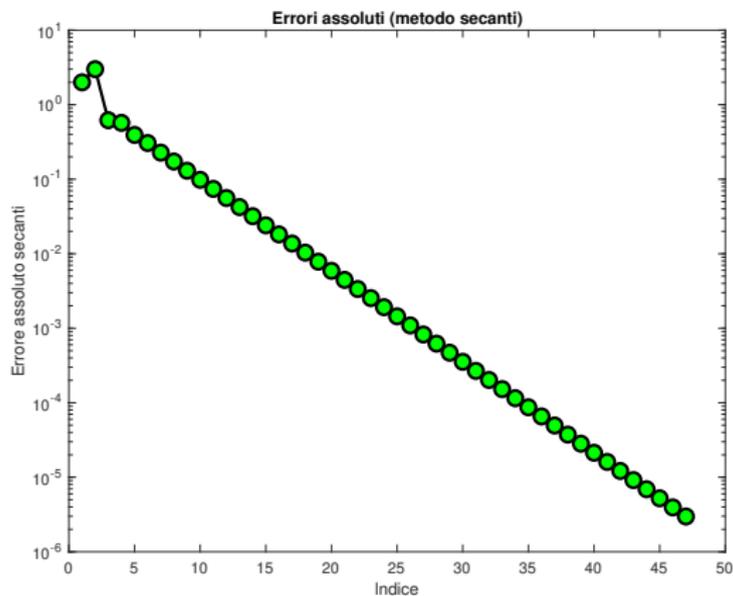


Figura: Errore assoluto $|x_k - x^*|$ dove x_k è la k -sima iterata del metodo delle secanti per la soluzione di $f(x) = \sin(x) - x = 0$, in scala semilogaritmica.

Metodo delle secanti: alcuni esempi

Utilizziamo il metodo delle secanti per il calcolo dello zero di $\exp(x) - 1 + x = 0$.

n	x_n	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	0.0000000000000000e + 00	4.43e - 01	-	1.00e + 00
1	1.0000000000000000e + 00	5.57e - 01	1.00e + 00	1.72e + 00
2	3.678794411714423e - 01	7.50e - 02	6.32e - 01	1.87e - 01
3	4.300563616528947e - 01	1.28e - 02	6.22e - 02	3.26e - 02
4	4.431457539835317e - 01	2.91e - 04	1.31e - 02	7.45e - 04
5	4.428532661274237e - 01	1.13e - 06	2.92e - 04	2.90e - 06
6	4.428544009017152e - 01	1.01e - 10	1.13e - 06	2.57e - 10
7	4.428544010023887e - 01	1.67e - 16	1.01e - 10	1.67e - 16

Tabella: Metodo delle secanti per il calcolo dello zero di $\exp(x) - 2 + x = 0$.

- La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione

$$x^* = 0.4428544010023887 \dots$$

di $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ è molto rapida, paragonabile in termini di iterazioni a quella del metodo di Newton.

- Quali dati iniziali abbiamo scelto $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.
- Lo step fornisce buone stime a posteriori dell'errore compiuto all'iterazione precedente.

Metodo delle secanti: alcuni esempi

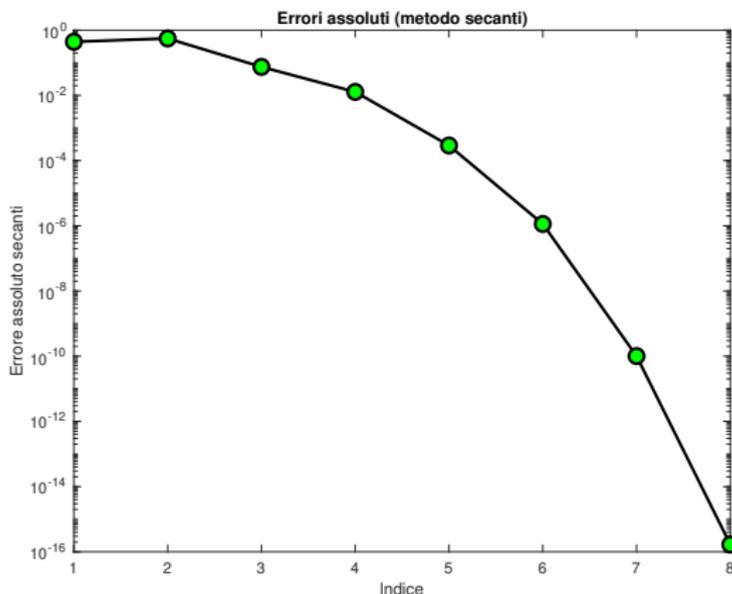


Figura: Errore assoluto $|x_k - x^*|$ dove x_k è la k -sima iterata del metodo delle secanti per la soluzione di $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$, in scala semilogaritmica.

Metodo delle secanti: alcuni esempi

Utilizziamo il metodo delle secanti per il calcolo dello zero di $x^2 - 2 = 0$.

n	x_n	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	1.0000000000000000e + 00	4.14e - 01	-	1.00e + 00
1	2.0000000000000000e + 00	5.86e - 01	1.00e + 00	2.00e + 00
2	1.3333333333333333e + 00	8.09e - 02	6.67e - 01	2.22e - 01
3	1.4000000000000000e + 00	1.42e - 02	6.67e - 02	4.00e - 02
4	1.414634146341463e + 00	4.21e - 04	1.46e - 02	1.19e - 03
5	1.414211438474870e + 00	2.12e - 06	4.23e - 04	6.01e - 06
6	1.414213562057320e + 00	3.16e - 10	2.12e - 06	8.93e - 10
7	1.414213562373095e + 00	2.22e - 16	3.16e - 10	8.88e - 16

Tabella: Metodo delle secanti per il calcolo dello zero di $x^2 - 2 = 0$.

- La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione

$$x^* = \sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$$

di $f(x) = x^2 - 2 = 0$ è molto rapida, paragonabile in termini di iterazioni a quella del metodo di Newton.

- Quali dati iniziali abbiamo scelto $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.
- Lo step fornisce buone stime a posteriori dell'errore compiuto all'iterazione precedente.

Metodo delle secanti: alcuni esempi

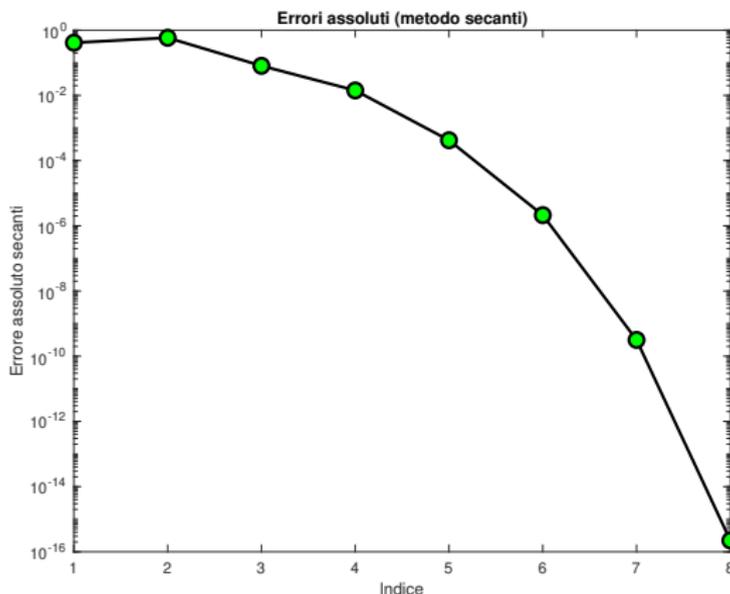


Figura: Errore assoluto $|x_k - x^*|$ dove x_k è la k -sima iterata del metodo delle secanti per la soluzione di $f(x) = x^2 - 2 = 0$, in scala semilogaritmica.

Consideriamo i problemi di **punto fisso**

$$x = \phi(x)$$

in cui supponiamo che $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sia una funzione continua.

- Notiamo subito che **ogni problema di tipo $f(x) = 0$ si può riscrivere come $x = \phi(x)$** , ad esempio ponendo $\phi(x) = f(x) + x$.
In generale, come vedremo in un esempio, **ci sono molte ϕ che adempiono a questo scopo.**
- Nel metodo di punto fisso, si definisce la successione detta **delle iterazioni successive o di punto fisso**

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

che si desidera convergere ad α tale che $\phi(\alpha) = \alpha$. La funzione ϕ è talvolta detta di iterazione perchè a partire da x_k determina la *iterata* successiva x_{k+1} .

Nota. (Importante)

In precedenza abbiamo studiato equazioni nonlineari del tipo $f(x) = 0$ mentre ora siamo interessati a problemi di punto fisso del tipo $x = \phi(x)$.

Ad esempio abbiamo studiato l'equazione

$$f(x) = \sin(x) - x = 0$$

che é equivalente al problema di punto fisso

$$x = \sin(x) := \phi(x).$$

In quest'ultimo caso, la sequenza delle iterazioni successive risulta

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = \sin(x_k).$$

Nota. (Interpretazione geometrica del problema di punto fisso)

Geometricamente, il problema di punto fisso coincide col calcolare l'intersezione tra la bisettrice $y = x$ con il grafico della curva $y = \phi(x)$. In effetti il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = x \\ y = \phi(x) \end{cases}$$

determina, qualora esistenti, le coppie (x^*, y^*) intersezione delle due curve ed è immediato osservare che un tale x^* verifica $x^* = \phi(x^*)$.

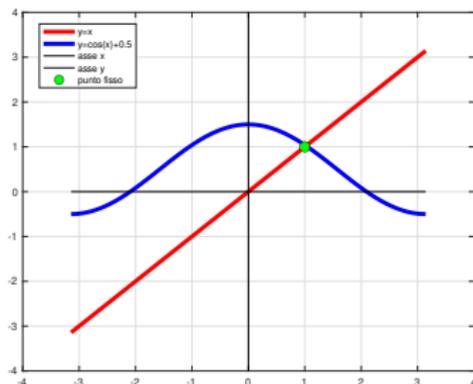


Figura: Interpretazione grafica del problema di punto fisso, ovvero la soluzione è l'ascissa del punto di intersezione tra la bisettrice $y = x$ e il grafico di $y = \phi(x)$. Nell'esempio $\phi(x) = \cos(x) + 0.5$ e la soluzione di $x = \phi(x) = \cos(x) + 0.5$ risulta $x^* \approx 1.02181$.

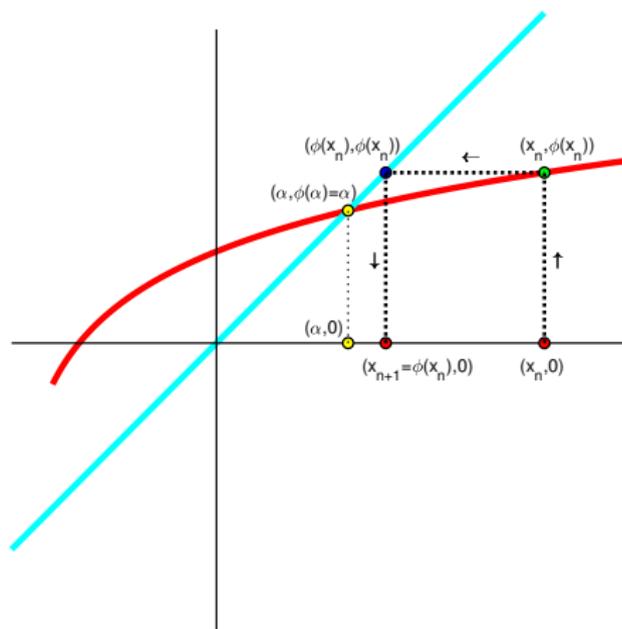


Figura: Interpretazione grafica della iterazione di punto fisso $x_{n+1} = \phi(x_n)$ per lo studio di $x = \phi(x)$. In ciano la bisettrice $y = x$, in rosso il grafico della curva $y = \phi(x)$. Inoltre α è il valore per cui $\alpha = \phi(\alpha)$.

Esempio

Si calcoli il punto fisso $\alpha = 0.3901752496249773$ del problema $x = \phi(x) = 0.2 + 0.5 \sin(x)$, mediante il metodo delle approssimazioni successive.

Si vede subito che $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Posto $x_0 = 0$, otteniamo dallo schema $x_{k+1} = \phi(x_k) = 0.2 + 0.5 \sin(x_k)$:

k	x_k	$ x_k - \alpha $
0	0.0000000000000000e + 00	3.90175250e - 01
1	2.0000000000000000e - 01	1.90175250e - 01
2	2.993346653975306e - 01	9.08405842e - 02
3	3.474422614380177e - 01	4.27329882e - 02
4	3.702470093203898e - 01	1.99282403e - 02
5	3.809228572374543e - 01	9.25239239e - 03
6	3.858886681106869e - 01	4.28658151e - 03
7	3.881913022779541e - 01	1.98394735e - 03
...
47	3.901752496249772e - 01	1.11022302e - 16

Tabella: Metodo delle iterazioni successive per il calcolo del punto fisso di $x = \phi(x) = 0.2 + 0.5 \sin(x)$.

Nota: Si vede subito che $|\phi'(x)| = |0.5 \cos(x)| \leq 1/2 < 1$ (ovvero é una contrazione).

Teorema (Banach (1922), [1, p.80])

Si assuma che

- 1 ϕ sia derivabile con continuità in $[a, b]$,
- 2 $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$;
- 3 **contrattività**: se $x \in [a, b]$ allora

$$|\phi'(x)| \leq \theta < 1$$

con θ indipendente da x .

Allora

1. $x = \phi(x)$ ha un'unica soluzione α in $[a, b]$;
2. per qualsiasi $x_0 \in [a, b]$, posto $x_{n+1} = \phi(x_n)$ si ha $x_n \rightarrow \alpha$;
3. posto $e_n = |x_n - \alpha|$ si ha

$$\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\alpha)|;$$

4. vale la *stima a priori*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} |x_1 - x_0|;$$

5. vale

$$|x_n - \alpha| \leq \theta^n |x_0 - \alpha|;$$

6. vale la *stima a posteriori*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{1 - \theta} |x_{n+1} - x_n|.$$

Nota.

Il fatto che

$$\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\alpha)|$$

farrebbe supporre che la convergenza sia lineare, ma bisogna ricordare che affinché sia proprio così serve che $\phi'(\alpha) \neq 0$.

Si osservi che questo teorema

- Nel punto 1. stabilisce **l'esistenza e unicità della soluzione** del problema di punto fisso,
- Nel punto 2. offre un **metodo iterativo** $x_{k+1} = \phi(x_k)$ **per poterla approssimare**, e nel punto 3. dice *che ha convergenza lineare* qualora $\phi'(\alpha) \neq 0$;
- Nel punto 4. offre una **maggiorazione dell'errore** $|x_n - \alpha|$ dipendentemente dalla distanza delle prime due iterazioni,
- Nei punti 4., 5., 6., suggerisce **stime dell'errore compiuto**;
- Nel punto 6, da

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{1 - \theta} |x_{n+1} - x_n|$$

fa capire che per $\theta \approx 1$ **lo step può non essere un buon criterio di arresto**, perchè in tal caso $1/(1 - \theta)$ può essere così grande che, nonostante $|x_{n+1} - x_n|$ possa essere piccolo, può accadere che $|x_n - \alpha|$ sia grande.

Teorema (Convergenza locale)

Si assuma che

- 1 α sia la soluzione di $x = \phi(x)$;
- 2 ϕ sia derivabile con continuità in un intervallo centrato in α ;
- 3 $|\phi'(\alpha)| < 1$.

Allora **esiste un intorno** Ω di α per cui

- 1 $x = \phi(x)$ ha un'unica soluzione α in Ω ;
- 2 per qualsiasi scelta di $x_0 \in \Omega$, posto

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

la successione converge ad α almeno linearmente;

- 3 posto $e_n = |x_n - \alpha|$ si ha $\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\alpha)|$.

Vale il seguente teorema, molto utile per determinare l'ordine di convergenza di un metodo di punto fisso (cf. [1, p.82]).

Teorema (Ordine di convergenza del punto fisso)

Si supponga che partendo da un certo $x_0 \in [a, b]$, la successione $\{x_k\}$ sia tale che $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Inoltre che

- 1 $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $\phi \in C^p([a, b])$,
- 2 $\phi(\alpha) = \alpha$,
- 3 $\phi^{(j)}(\alpha) = 0$, per $j = 1, \dots, p-1$ e $\phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$,
- 4 se $p = 1$ allora $|\phi'(\alpha)| < 1$.

Se il punto iniziale x_0 è sufficientemente vicino ad α , allora $x_k \rightarrow \alpha$ e

$$\lim \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq 0.$$

e quindi l'ordine di convergenza è uguale a p .

Esempio

Il metodo di Newton è un particolare metodo di punto fisso.

Infatti per

$$\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

abbiamo

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Nota.

Si osservi che se $f'(x)$ non si annulla nell'intervallo di studio allora

$$x = \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow 0 = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

ovvero $f(x) = 0$.

Quindi le soluzioni del problema $x = \phi(x)$ sono tutte e sole quelle di $f(x) = 0$.

Da quanto visto, si può dimostrare che

Teorema

Si supponga che

- 1 α sia uno zero semplice di $f(x) = 0$ tale che $f''(\alpha) \neq 0$,
- 2 $x_n \rightarrow \alpha$,
- 3 $f : ([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ sia sufficientemente differenziabile con continuità.

Allora il metodo di Newton ha convergenza locale quadratica.

Nota.

Il metodo delle secanti, non determina una successione del tipo $x_{k+1} = \phi(x_k)$ perchè ogni iterazione dipende da 2 iterate precedenti (e non una sola!).

Esempio ([2], p.103.)

Si calcoli $\sqrt{5}$ mediante un metodo di punto fisso.

A tal proposito prendiamo in considerazione 4 successioni:

- 1 $x_{n+1} = \phi_1(x_n)$ con $\phi_1(x) = 5 + x - x^2$;
- 2 $x_{n+1} = \phi_2(x_n)$ con $\phi_2(x) = 5/x$;
- 3 $x_{n+1} = \phi_3(x_n)$ con $\phi_3(x) = 1 + x - (1/5)x^2$;
- 4 $x_{n+1} = \phi_4(x_n)$ con $\phi_4(x) = (1/2) \cdot (x + 5/x)$.

Osserviamo che

- Per ognuna di queste si vede che $\sqrt{5}$ risolve $x = \phi_s(x)$ con $s = 1, 2, 3, 4$.
- Nella seconda successione, $x_1 = \phi_2(x_0) = 5/x_0$ è tale che

$$x_2 = \phi_2(x_1) = \frac{5}{x_1} = \frac{5}{5/x_0} = x_0$$

e quindi sarà del tipo $x_0, x_1, x_0, x_1, \dots$

- La successione $x_{n+1} = \phi_4(x_n)$ è il metodo di Newton per tale scopo.

Metodo di punto fisso (o di Picard): un esempio

Essendo tutte le funzioni di classe $C^\infty[a, b]$ (al piú con $0 \notin [a, b]$ per ϕ_2, ϕ_4) dal teorema sull'ordine di convergenza, bisogna calcolare il primo p per cui $\phi_j^{(p)}(\sqrt{5}) \neq 0$, e qualora sia $p = 1$ aggiungere che sia $|\phi_j(\sqrt{5})| < 1$ (per ognuno dei casi di $j = 1, 2, 3, 4$).

- 1 $x_{n+1} = \phi_1(x_n)$ con $\phi_1(x) = 5 + x - x^2$; si vede che $\phi_1^{(1)}(x) = 1 - 2x$, $\phi_1^{(1)}(\sqrt{5}) = 1 - 2\sqrt{5} < -1$ e quindi $|\phi_1^{(1)}(\sqrt{5})| > 1$ per cui **il teorema di convergenza locale non è applicabile**, seppure da un'analisi piú approfondita si vede che il metodo diverge;
- 2 $x_{n+1} = \phi_2(x_n)$ con $\phi_2(x) = 5/x$; si vede che $\phi_2^{(1)}(x) = -5/x^2$, $\phi_2^{(1)}(\sqrt{5}) = -1$ e quindi $|\phi_2^{(1)}(\sqrt{5})| = 1$ per cui **il teorema di convergenza locale non è applicabile**;
- 3 $x_{n+1} = \phi_3(x_n)$ con $\phi_3(x) = 1 + x - (1/5)x^2$; si vede che $\phi_3^{(1)}(x) = 1 + (2/5)x$, $\phi_3^{(1)}(\sqrt{5}) = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.106$ e quindi $|\phi_3^{(1)}(\sqrt{5})| \approx 0.106$ per cui il teorema di convergenza locale è applicabile e **l'ordine di convergenza (locale!) è 1**;
- 4 $x_{n+1} = \phi_4(x_n)$ con $\phi_4(x) = (1/2) \cdot (x + 5/x)$: si vede che $\phi_4^{(1)}(x) = (1/2) \cdot (1 - 5/x^2)$, $\phi_4^{(1)}(\sqrt{5}) = 0$ e quindi $|\phi_4^{(1)}(\sqrt{5})| = 0$, come pure che $|\phi_4^{(2)}(\sqrt{5})| \approx 0.4472$ per cui il teorema di convergenza locale è applicabile e **l'ordine di convergenza (locale!) è 2** (come sapevamo d'altronde essere dal teorema di convergenza locale del metodo di Newton).

Metodo di punto fisso (o di Picard): un esempio

Osserviamo che:

- in `format short`, Matlab dice che $\sqrt{5} \approx 2.2361$;
- in `format long`, Matlab dice che $\sqrt{5} \approx 2.236067977499790$.

Quale esperimento partiamo da $x_0 = 2.2361$, determinando le prime 10 iterazioni $x_{k+1} = \phi_s(x_k)$, per $s = 1, 2, 3, 4$.

Le tabelle confermano quanto visto analiticamente. In particolare

- le prime due successioni $x_{k+1} = \phi_s(x_k)$, $s = 1, 2$ non convergono a $\sqrt{5}$;
- le ultime due successioni $x_{k+1} = \phi_s(x_k)$, $s = 3, 4$ convergono a $\sqrt{5}$.

n	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
x_1	2.2359567900000000e + 00	2.236035955458164e + 00	2.2360713580000000e + 00	2.236067977729082e + 00
x_2	2.236454023252895e + 00	2.2361000000000000e + 00	2.236068334386407e + 00	2.236067977499790e + 00
x_3	2.234727425128835e + 00	2.236035955458164e + 00	2.236068015177287e + 00	2.236067977499790e + 00
x_4	2.240720760505883e + 00	2.2361000000000000e + 00	2.236067981477508e + 00	2.236067977499790e + 00
x_5	2.219891233943821e + 00	2.236035955458164e + 00	2.236067977919729e + 00	2.236067977499790e + 00
x_6	2.291974143403200e + 00	2.2361000000000000e + 00	2.236067977544124e + 00	2.236067977499790e + 00
x_7	2.038828669374367e + 00	2.236035955458164e + 00	2.236067977504471e + 00	2.236067977499790e + 00
x_8	2.882006326311514e + 00	2.2361000000000000e + 00	2.236067977500284e + 00	2.236067977499790e + 00
x_9	-4.239541385880772e - 01	2.236035955458164e + 00	2.236067977499842e + 00	2.236067977499790e + 00
x_{10}	4.396308749785964e + 00	2.2361000000000000e + 00	2.236067977499795e + 00	2.236067977499790e + 00

Tabella: Iterazioni di punto fisso $x_{k+1} = \phi_s(x_k)$, con $x = \phi_s(x)$ avente soluzione $\alpha = \sqrt{5} \approx 2.236067977499790$, con $x_0 = 2.2361$.

Appendice facoltativa

Metodo di punto fisso (o di Picard)

Teorema (Banach (1922), [1, p.80])

Si assuma che

- 1 ϕ sia derivabile con continuità in $[a, b]$,
- 2 $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$;
- 3 **contrattività**: se $x \in [a, b]$ allora

[width=4cm]

$$|\phi'(x)| \leq \theta < 1$$

con θ indipendente da x .

Allora

1. $x = \phi(x)$ ha un'unica soluzione α in $[a, b]$;
2. per qualsiasi $x_0 \in [a, b]$, posto $x_{n+1} = \phi(x_n)$ si ha $x_n \rightarrow \alpha$;
3. posto $e_n = |x_n - \alpha|$ si ha

$$\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\alpha)|;$$

4. vale la **stima a priori**

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} |x_1 - x_0|;$$

5. vale

$$|x_n - \alpha| \leq \theta^n |x_0 - \alpha|;$$

6. vale la **stima a posteriori**

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{1 - \theta} |x_{n+1} - x_n|.$$

Traccia. (Facoltativo)

Esistenza di α (facoltativo). Sia $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Allora visto che se $x \in [a, b]$ allora

- $\phi(x) \in [a, b]$ (ipotesi 2 del teorema),
- $\phi(x_k) = \phi(x_{k-1}) + \phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, con $\xi_k \in \mathcal{I}(x_{k-1}, x_k)$, con $\mathcal{I}(x_{k-1}, x_k)$ il piú piccolo intervallo aperto contenente x_{k-1}, x_k .

Da

- 1 $\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}) = \phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,
- 2 $\max_{x \in [a, b]} |\phi'(x)| \leq \theta \leq 1$,
- 3 $x_{k+1} = \phi(x_k)$, per $k = 0, 1, \dots$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
 0 &\leq |x_{k+1} - x_k| = |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \stackrel{(1)}{=} |\phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| \\
 &= |\phi'(\xi_k)| |x_k - x_{k-1}| \stackrel{(2)}{\leq} \theta |x_k - x_{k-1}| \\
 &\leq \theta(\theta |x_{k-1} - x_{k-2}|) = \theta^2 |x_{k-1} - x_{k-2}| \leq \dots \leq \theta^k |x_1 - x_0|
 \end{aligned}$$

Di conseguenza, da

- $0 \leq |x_{k+1} - x_k| \leq \theta^k |x_1 - x_0|,$
- $\sum_{k=0}^s \theta^k = \frac{1-\theta^{s+1}}{1-\theta},$
- $\theta \in [0, 1):$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \sum_{k=0}^{n-1-m} |x_{m+k+1} - x_{m+k}| \leq \sum_{k=0}^{n-1-m} \theta^{m+k} |x_1 - x_0| \\ &= |x_1 - x_0| \theta^m \sum_{k=0}^{n-1-m} \theta^k = |x_1 - x_0| \theta^m \frac{1 - \theta^{n-m}}{1 - \theta} \\ &\leq |x_1 - x_0| \frac{\theta^m}{1 - \theta} \end{aligned} \quad (8)$$

e quindi si vede facilmente che $\{x_n\}$ è una *successione di Cauchy* e, visto che $[a, b]$ è un insieme compatto di \mathbb{R} , allora $x_k \rightarrow \alpha$. Da $\phi \in C([a, b])$, tale α è un punto fisso, poichè

$$\alpha = \lim_k x_{k+1} = \lim_k \phi(x_k) = \phi(\lim_k x_k) = \phi(\alpha).$$

Unicità di α . Mostriamo che se esiste il punto fisso, allora è unico. Supponiamo che esistano due punti fissi distinti $\alpha, \beta \in [a, b]$ e quindi $\alpha = \phi(\alpha), \beta = \phi(\beta)$. Dalla formula di Taylor, esiste $\xi \in (a, b)$ tale che

$$\phi(\alpha) = \phi(\beta) + \phi'(\xi)(\alpha - \beta)$$

e quindi

$$|\alpha - \beta| = |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| = |\phi'(\xi)(\alpha - \beta)| \quad (9)$$

Ricordato che per ipotesi $|\phi'(x)| \leq \theta < 1$ per ogni $x \in [a, b]$,

$$|\phi'(\xi)(\alpha - \beta)| = |\phi'(\xi)| \cdot |\alpha - \beta| \leq \theta |\alpha - \beta| < |\alpha - \beta| \quad (10)$$

e quindi da (9) e (10) abbiamo $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$, il che è assurdo.

Nota.

Abbiamo mostrato che esiste un unico punto fisso α e che $x_k \rightarrow \alpha$. Di conseguenza, se $x_0 \in [a, b]$ allora la successione $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ converge all'unico punto fisso $\alpha \in [a, b]$.

Convergenza globale. Abbiamo visto che se $x_0 \in [a, b]$ e $x_{k+1} = \phi(x_k)$ allora

$e_k := |x_k - \alpha| \rightarrow 0$, con $\alpha = \phi(\alpha)$.

Dalla formula di Taylor, esiste ξ_k nel più piccolo intervallo aperto $\mathcal{I}(x_k, \alpha)$ contenente x_k e α tale che

$$\phi(x_k) = \phi(\alpha) + \phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)$$

da cui, essendo $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\alpha = \phi(\alpha)$

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= |x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)| \\ &= |\phi'(\xi_k)||x_k - \alpha| = |\phi'(\xi_k)|e_k \end{aligned} \quad (11)$$

e siccome $x_k \rightarrow \alpha$, $\xi_k \in \mathcal{I}(x_k, \alpha)$ ricaviamo facilmente dal teorema del confronto che $\xi_k \rightarrow \alpha$. Così,

- o esiste N tale che $e_N = 0$ ovvero $x_N = \alpha$ e quindi per $k \geq N$ è pure $x_{k+1} = \phi(x_k) = \phi(\alpha) = \alpha$ da cui $e_k = 0$ per ogni $k \geq N$ e quindi non ha senso valutare e_{k+1}/e_k ;
- oppure

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} = |\phi'(\xi_k)|$$

con ξ_k nel più piccolo intervallo aperto $\mathcal{I}(x_k, \alpha)$ contenente x_k e α .

Supponiamo quindi

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} = |\phi'(\xi_k)|, \quad (12)$$

con ξ_k nel più piccolo intervallo aperto \mathcal{I} contenente x_k e x_{k+1} .

Ricordiamo ora che

- se $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e $\lim_n t_n = t^*$ allora

$$\lim_k g(t_k) = g(\lim_k t_k) = g(t^*); \quad (13)$$

- dalla continuità di ϕ' in $[a, b]$ e della funzione valore assoluto, la funzione $g(x) = |\phi'(x)|$ risulta continua (la composizione di funzioni continua è continua);
- $\lim_k \xi_k = \alpha$.

Deduciamo così, posto $g(x) = |\phi'(x)|$, $t_k := \xi_k$, $t^* = \alpha$ in (13)

$$\lim_k \frac{e_{k+1}}{e_k} \stackrel{(12)}{=} \lim_k |\phi'(\xi_k)| \stackrel{(13)}{=} |\phi'(\lim_k \xi_k)| = |\phi'(\alpha)|.$$

Si osservi che ciò implica che se $|\phi'(\alpha)| \neq 0$ allora la convergenza è lineare.

- ▶ K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
- ▶ K. Atkinson, W. Han, *Elementary Numerical Analysis*, Wiley, (2004).
- ▶ V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, (1990).
- ▶ J.E. Dennis, Jr. e R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, (1996).
- ▶ C.T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM Frontiers in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, (1995).
- ▶ Mac Tutor (Newton),
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html>.
- ▶ Mac Tutor (Raphson),
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Raphson.html>. Origin and Evolution of the Secant Method in One Dimension
- ▶ J-M. Papakonstantinou, R- A. Tapia,
Origin and Evolution of the Secant Method in One Dimension, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 120, No. 6 (June-July 2013), pp. 500-518.

- ▶ G. Rodriguez, *Algoritmi Numerici*, Pitagora Editrice, (2008).
- ▶ L.N. Trefethen, Numerical Analysis, Branches of Mathematics.
- ▶ Wikipedia (Calcolo dello zero di una funzione),
http://it.wikipedia.org/wiki/Calcolo_dello_zero_di_una_funzione.
- ▶ Wikipedia (Metodo della bisezione),
http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_della_bisezione.
- ▶ Wikipedia (Metodo delle tangenti),
http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_delle_tangenti.
- ▶ Wikipedia (Halley's method),
http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_method.
- ▶ Wikipedia (Newton's method),
http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method.
- ▶ Wikipedia (Successione di Cauchy),
http://it.wikipedia.org/wiki/Successione_di_Cauchy.

- ▶ Wikipedia (Teorema di Abel-Ruffini),
https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Abel-Ruffini.
- ▶ E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications: Part 1: Fixed-Point theorems*, Springer, (1998).