Estrapolazione [1]

A. Sommariva[2]

Keywords: Cenni al metodo di estrapolazione. Metodo di Romberg.

Revisione: 22 aprile 2020

Problema 0.1 (Estrapolazione). *Il metodo di estrapolazione (di Richardson) è una procedura molto generale basata sul calcolo di diverse stime, in funzione di un parametro $h > 0$, di una quantità incognita α, da combinare opportunamente allo scopo di fornire un valore più accurato di α stessa.*

La definizione, pur essendo corretta, non risulta chiara. Di seguito la mostriamo più in dettaglio.

Definizione 0.2 (Ordine superiore, cf. [1], p. 105). *Se f e g sono infinitesime per $x \to x_0$ (con $g \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$) e*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g per $x \to x_0$ o, equivalentemente, che g è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a f per $x \to x_0$. Si scrive, rispettivamente, $f = O(g)$ e $g = o(f)$.

Troviamo pure in letteratura

Definizione 0.3 (Ordine superiore, cf. [2], p. 18). *Supponiamo di avere una famiglia di valori $\{y_h\}$ che approssimano un valore y, per piccoli valori di h, ovvero $y \approx y_h$. Se possiamo trovare una costante $C > 0$, indipendente da h, tale che*

$$|y - y_h| \leq C\beta(h),$$

per ogni h sufficientemente piccolo, con $\lim_{h \to 0} \beta(h) = 0$, allora diciamo che $y = y_h + O(\beta(h))$ per $h \to 0$.

Data una formula di approssimazione $\phi_0(h)$ di una quantità α, con la struttura

$$\phi_0(h) = \alpha + ch^p + O(h^q), \; q > p \geq 1$$

dove c è una costante indipendente da h, necessariamente

$$\phi_0\left(\frac{h}{2}\right) = \alpha + c\left(\frac{h^p}{2^p}\right) + O(\frac{h^q}{2^q}). \tag{1}$$

da cui moltiplicando (1) per 2^p, visto che per $q > p$, dalla teoria degli infinitesimi $O(h^q) - 2^p O(\frac{h^q}{2^q}) = O(h^q)$, ricaviamo

$$\begin{aligned} \phi_0(h) - 2^p \phi_0(h/2) &= (\alpha + ch^p + O(h^q)) - 2^p(\alpha + c\left(\frac{h^p}{2^p}\right) + O(\frac{h^q}{2^q})) \\ &= (1-2^p)\alpha + O(h^q) \end{aligned}$$

ovvero, visto che $O(h^q)/(1-2^p) = O(h^q)$,

$$\phi_1(h) = \frac{\phi_0(h) - 2^p \phi_0(h/2)}{1-2^p} = \alpha + O(h^q).$$

In definitiva, abbiamo ottenuto una nuova approssimazione di α, il cui errore non è più dell'ordine di p, ma dell'ordine di $q > p$ e quindi potenzialmente migliore.

Ciò significa che se consideriamo ad esempio la successione di passi

$$h_0, h_0/2, h_0/4, \ldots, h_0/2^k, \ldots,$$

allora la successione

$$\{\phi_1(h_0/2^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

converge ad α più rapidamente di quanto non faccia

$$\{\phi_0(h_0/2^k)\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Il procedimento può essere iterato qualora

$$\phi_0(h) = \alpha + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \ldots + c_m h^{p_m} + O(h^{p_{m+1}})$$

con $1 \leq p_1 < p_2 \ldots < p_m < p_{m+1}$. A tal proposito, poniamo

$$\phi_1(h) = \frac{2^{p_1}\phi_0(h/2) - \phi_0(h)}{2^{p_1} - 1}.$$

Con qualche conto un po' tedioso, si ottiene

$$\phi_1(h) = \alpha + \sum_{k=2}^{m} c_k \left(1 - \frac{2^{p_1}}{2^{p_k}}\right) h^{p_k} + O(h^{p_{m+1}}).$$

Posto $c_k^{(1)} = c_k(1 - \frac{2^{p_1}}{2^{p_k}})$, abbiamo

$$\phi_1(h) = \alpha + c_2^{(1)} h^{p_2} + c_3^{(1)} h^{p_3} + \ldots + c_m^{(1)} h^{p_m} + O(h^{p_{m+1}}).$$

In generale possiamo reiterare il processo, ottenendo

$$\phi_i(h) = \frac{2^{p_i}\phi_{i-1}(h/2) - \phi_{i-1}(h)}{2^{p_i} - 1}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

e

$$\phi_i(h) = \alpha + c_{i+1}^{(i)} h^{p_{i+1}} + c_{i+2}^{(i)} h^{p_{i+2}} + \ldots + c_m^{(i)} h^{p_m} + O(h^{p_{m+1}}).$$

$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=\dots$	$i=m$
$\phi_0(h_0)$				
$\phi_0(h_0/2)$	$\phi_1(h_0)$			
$\phi_0(h_0/4)$	$\phi_1(h_0/2)$	$\phi_2(h_0)$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\phi_0(h_0/2^m)$	$\phi_1(h_0/2^{m-1})$	$\phi_2(h_0/2^{m-2})$	$\dots$	$\phi_m(h_0)$

Tabella 1: Esempio di tabella di estrapolazione in cui $\phi_i(h) = \frac{2^{p_i}\phi_{i-1}(h/2)-\phi_{i-1}(h)}{2^{p_i}-1}$, $i = 1, 2, \dots$.

ed essendo $p_{i+1} > p_i$ ci si aspetta un approssimazione di α potenzialmente migliore.

Usualmente si tabula il procedimento, come si puó vedere nella seguente tabella.

Mostriamo di seguito alcuni esempi in cui si ha la struttura

$$\phi_0(h) = \alpha + ch^p + O(h^q),\ q > p \geq 1.$$

Per il teorema di Eulero-Mac Laurin (cf. [3, p.106]),

1. se $f \in C^{(2m+2)}([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$,
2. $T(f, h)$ è la formula dei trapezi composta, avente passo $h = (b-a)/n$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, ovvero

$$T(f, h) = \frac{h}{2}(f(a) + 2f(a+h) + \dots + 2f(b-h) + f(b))$$

abbiamo

$$T(f, h) = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\alpha} + c_1h^2 + \dots + c_m h^{2m} + O(h^{2m+2})$$

con c_i, $i = 1, \dots, m$ costanti indipendenti da h.

Il metodo di estrapolazione legato alla formula dei trapezi è detto di Romberg (pubblicato nel 1955).

Di seguito, mostriamo alcune tabelle che mostrano tale metodo per calcolare

1. $\int_{-1}^{1} \exp(x)dx = \exp(1) - \exp(-1)$,
2. $\int_{-1}^{1} \cos(x)dx = \sin(1) - \sin(-1)$,
3. $\int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1)\cos(x)dx = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}$.

Nella prima tabella, mostriamo l'azione dell'estrapolazione, sul primo esempio. Nelle successive,

- la prima colonna è il passo utilizzato,
- la seconda colonna è quella della formula dei trapezi con passo h_k, in cui si valutano vari $|\phi_0(h_k) - I|$, con I integrale richiesto,
- le colonne successive sono gli errori di $|\phi_j(h_k) - I|$.

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$2.0e+00$	$3.086161269630488e+00$			
$1.0e+00$	$\underline{2}.543080634815244e+00$	$\underline{2}.362053756543496e+00$		
$5.0e-01$	$\underline{2.3}99166282614003e+00$	$\underline{2.35}1194831880255e+00$	$\underline{2.3504}70903569373e+00$	
$2.5e-01$	$\underline{2.3}62631333585210e+00$	$\underline{2.3504}53017242280e+00$	$\underline{2.35040}3562933082e+00$	$\underline{2.35040}2494034093e+00$

Tabella 2: Calcolo dell'integrale $\int_{-1}^{1} \exp(x)dx = \exp(1) - \exp(-1) \approx 2.350402387287603e+00$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo $2, 1, 1/2, \ldots, 1/16$, e successiva estrapolazione.

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$2.0e+00$	$7.4e-01$					
$1.0e+00$	$1.9e-01$	$1.2e-02$				
$5.0e-01$	$4.9e-02$	$7.9e-04$	$6.9e-05$			
$2.5e-01$	$1.2e-02$	$5.1e-05$	$1.2e-06$	$1.1e-07$		
$1.2e-01$	$3.1e-03$	$3.2e-06$	$1.9e-08$	$4.6e-10$	$4.2e-11$	
$6.2e-02$	$7.7e-04$	$2.0e-07$	$3.0e-10$	$1.8e-12$	$4.5e-14$	$4.0e-15$

Tabella 3: Errori nel calcolo dell'integrale $\int_{-1}^{1} \exp(x)dx = \exp(1) - \exp(-1)$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo $2, 1, 1/2, \ldots, 1/16$, e successiva estrapolazione.

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$2.0e+00$	$6.0e-01$					
$1.0e+00$	$1.4e-01$	$1.1e-02$				
$5.0e-01$	$3.5e-02$	$6.0e-04$	$6.4e-05$			
$2.5e-01$	$8.8e-03$	$3.7e-05$	$9.0e-07$	$1.0e-07$		
$1.2e-01$	$2.2e-03$	$2.3e-06$	$1.4e-08$	$3.5e-10$	$3.9e-11$	
$6.2e-02$	$5.5e-04$	$1.4e-07$	$2.1e-10$	$1.3e-12$	$3.5e-14$	$3.1e-15$

Tabella 4: Errori nel calcolo dell'integrale $\int_{-1}^{1} \cos(x)dx = \sin(1) - \sin(-1)$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo $2, 1, 1/2, \ldots, 1/16$, e successiva estrapolazione.

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$1.6e+00$	$1.3e+00$					
$7.9e-01$	$3.1e-01$	$2.4e-03$				
$3.9e-01$	$7.8e-02$	$2.4e-04$	$9.9e-05$			
$2.0e-01$	$1.9e-02$	$1.6e-05$	$1.3e-06$	$2.6e-07$		
$9.8e-02$	$4.9e-03$	$1.0e-06$	$1.9e-08$	$9.1e-10$	$1.2e-10$	
$4.9e-02$	$1.2e-03$	$6.6e-08$	$3.0e-10$	$3.5e-12$	$1.1e-13$	$1.2e-14$

Tabella 5: Errori nel calcolo dell'integrale $\int_{0}^{\pi/2} (x^2 + x + 1)\cos(x)dx = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo $2, 1, 1/2, \ldots, 1/16$, e successiva estrapolazione.

Risulta chiaro il miglioramento dei risultati ottenuto nell'ultima colonna.

Sviluppando il rapporto incrementale δ_+ dopo qualche conto simile a quelli già fatti, ma troncando la formula di Taylor rispettivamente al terzo e quinto ordine, abbiamo per $f \in C^3([a,b])$, $x, x+h \in [a,b]$,

$$f(x+h) = f(x) + f^{(1)}(x)h + f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(\xi)\frac{h^3}{6}, \;\; \xi \in (x, x+h)$$

e riarrangiando i termini, visto che $f \in C^3([a,b])$,

$$\delta_+(f,x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underbrace{f^{(1)}(x)}_{\alpha} + \underbrace{f^{(2)}(x)}_{c} h + O(h^2),$$

con $\xi_x \in (x, x+h)$. Quindi,

$$\delta_+(f,x,h) = \alpha + ch^p + O(h^q)$$

per $\alpha = f'(x)$, $c = f^{(2)}(x)$, $p = 1$, $q = 2$.

Con conti simili a questi visti nella lezione di derivazione, per quanto concerne il rapporto incrementale simmetrico, se $f \in C^{2m+1}([a,b])$ allora

$$\begin{aligned} \delta_2(f,x,h) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &= f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x) + \ldots + \frac{h^{2m-2}}{(2m-1)!}f^{(2m-1)}(x) + O(h^{2m}). \end{aligned}$$

e quindi si possono calcolare piú colonne della tabella di estrapolazione.

Si vede numericamente che il fatto di avere nell'ultimo membro di (2) solo potenze pari di h, permette una performance migliore dell'estrapolazione.

Di seguito, illustriamo mediante alcune tabelle la estrapolazione basata sul rapporto incrementale simmetrico, per valutare

1. $D \exp(x)$ in $x_0 = 0$,
2. $D \frac{1}{1+x^2}$ in $x_0 = 5$,
3. $D \sin(x)$ in $x_0 = \pi/4$.

In una prima tabella mostriamo i benifici del metodo di estrapolazione. Nelle successive:

- la prima colonna è il passo utilizzato,
- la seconda colonna è l'errore $|\phi_0(h_k) - f'(x_0)|$, dovuto alla formula $\phi_0(h_k) = \delta_2(f, x_0, h_k)$;
- le colonne successive sono gli errori di $|\phi_j(h_k) - f'(x_0)|$.

Nei casi in questione è evidente il miglioramento dei risultati ottenuto nell'ultima colonna.

Bibliografia

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$1.000000000000000e-02$	$1.000016666749992e+00$		
$5.000000000000000e-03$	$1.000004166671864e+00$	$9.999999999791546e-01$	
$2.500000000000000e-03$	$1.000001041667020e+00$	$9.999999999987389e-01$	$1.000000000000045e+00$

Tabella 6: Calcolo della derivata di $f(x) = \exp(x)$ in $x_0 = 0$, con il rapporto incrementale simmetrico $\delta_2(f, x_0, h)$, con passo $1/100, 1/200, 1/400$, e successiva estrapolazione.

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$1.0e-02$	$1.7e-05$		
$5.0e-03$	$4.2e-06$	$2.1e-11$	
$2.5e-03$	$1.0e-06$	$1.3e-12$	$4.5e-14$

Tabella 7: Errori nel calcolo della derivata di $f(x) = \exp(x)$ in $x_0 = 0$, con il rapporto incrementale simmetrico $\delta_2(f, x_0, h)$, con passo $1/100, 1/200, 1/400$, e successiva estrapolazione.

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$1.0e-02$	$1.1e-07$		
$5.0e-03$	$2.6e-08$	$1.3e-13$	
$2.5e-03$	$6.6e-09$	$4.6e-15$	$3.8e-15$

Tabella 8: Errori nel calcolo della derivata di $f(x) = 1/(1+x^2)$ in $x_0 = 5$, con il rapporto incrementale simmetrico $\delta_2(f, x_0, h)$, con passo $1/100, 1/200, 1/400$, e successiva estrapolazione.

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$1.0e-02$	$1.2e-05$		
$5.0e-03$	$2.9e-06$	$1.5e-11$	
$2.5e-03$	$7.4e-07$	$9.5e-13$	$3.3e-14$

Tabella 9: Errori nel calcolo della derivata di $f(x) = \sin(x)$ in $x_0 = \pi/4$, con il rapporto incrementale simmetrico $\delta_2(f, x_0, h)$, con passo $1/100, 1/200, 1/400$, e successiva estrapolazione.

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi matematica*, seconda edizione, McGraw-Hill, 2011.

[2] J.F. Epperson, *Introduzione all'analisi numerica*, McGraw-Hill, 2009.

[3] J. Stoer, *Introduzione all'analisi numerica 1*, Zanichelli, 1974.