

Integrazione numerica ¹

A. Sommariva²

Keywords: Integrazione numerica: stabilita' e convergenza uniforme (con dimostrazione). Formule interpolatorie. Grado di precisione. Grado di precisione delle formule interpolatorie. Regole del rettangolo: definizione ed errore. Regola midpoint: definizione ed errore. Formule di Newton-Cotes chiuse. Regola del trapezio ed errore. Regola di Cavalieri-Simpson ed errore. Formule composte e interpolanti a tratti. Formula composta midpoint, errore, grado di precisione, esempio. Formula composta trapezi, errore, grado di precisione, esempio. Formula composta Cavalieri-Simpson, errore, grado di precisione, esempio. Formule composte: esempi e rapporti di convergenza. Stabilita' formule di quadratura (con dimostrazione). Convergenza di alcune formule di quadratura (legame con la convergenza uniforme). Il caso delle formule di Newton-Cotes, di quelle basate sull'integrazione di interpolanti in nodi di Chebyshev e delle formule composte. Esempi.

Revisione: 11 maggio 2021

1. Integrazione numerica

Teorema 1.1. *L'operazione funzionale di integrazione (nel continuo) è **stabile**, ovvero se $\tilde{f}, f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo limitato,*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \tilde{f}(x)dx \right| \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|.$$

Dimostrazione 1.2. *L'asserto segue dal fatto che, come noto,*

1. $g(x) \leq h(x), x \in [a, b], g, h \in C([a, b]) \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$
2. $|\int_a^b g(x)dx| \leq \int_a^b |g(x)|dx,$
3. $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx = \int_a^b (g(x) - h(x))dx$

e quindi

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \tilde{f}(x)dx \right| &\stackrel{(3)}{=} \left| \int_a^b (f(x) - \tilde{f}(x))dx \right| \stackrel{(2)}{\leq} \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\
&\stackrel{(1)}{\leq} \int_a^b \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\
&= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \int_a^b 1 \cdot dx \\
&= (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|.
\end{aligned}$$

Commento 1.3. L'asserto dice che se \tilde{f} è vicina a f relativamente alla distanza $\text{dist}(f, \tilde{f}) := \|f - \tilde{f}\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|$, allora $\int_a^b \tilde{f}(x)dx$ non può essere arbitrariamente distante da $\int_a^b f(x)dx$, concetto che viene descritto come **stabilità** del funzionale di integrazione.

Corollario 1.4. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue che converge uniformemente a $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo limitato, ovvero

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty := \lim_n \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

allora

$$\lim_n \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = 0,$$

ovvero $\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx$.

Dimostrazione 1.5 (Facoltativa). L'asserto segue dal fatto che dal teorema precedente abbiamo

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

e quindi visto che $b-a$ è finito e $\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$, per il teorema del confronto abbiamo pure che

$$\lim_n \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = 0.$$

Commento 1.6. L'asserto implica che se f_n è una successione che converge uniformemente alla integranda $f \in C([a, b])$ (ovvero $\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$), $-\infty < a < b < +\infty$, allora qualsiasi sia la tolleranza prestabilita ϵ esiste "n" tale che $|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| < \epsilon$.

- Sfruttando la *stabilità dell'operatore di integrazione*, l'idea di base delle formule di integrazione approssimata (**formule di quadratura**) è che se f_n è una opportuna funzione polinomiale tale che $f_n \approx f$, necessariamente

$$\int_a^b f_n(x) dx \approx \int_a^b f(x) dx.$$

- In particolare, in questa sezione si considerano i casi
 - (a) $f_n \equiv p_n$ polinomio di grado n che interpola f nei nodi $x_k, k = 0, \dots, n$ oppure
 - (b) $f_n \equiv s_m$ interpolante polinomiale a tratti di grado m che interpola f nei nodi $x_k, k = 0, \dots, n$.

Le formule di quadratura algebriche, a volte dette **interpolatorie**, sono ottenute integrando il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ interpolante le coppie $(x_i, f(x_i))_{i=0, \dots, n}$.

Se L_k il k -simo polinomio di Lagrange relativamente ai nodi $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$, ovvero

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)},$$

abbiamo da

1. $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$,
2. $\int_a^b \sum_{k=0}^n g_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b g_k(x) dx, g_k \in C([a, b])$, con a, b finiti,
3. posto $w_k := \int_a^b L_k(x) dx$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p_n(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=0}^n w_k f(x_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Le quantità $w_k, k = 0, \dots, n$ sono detti **pesi**, mentre i punti $x_k, k = 0, \dots, n$ sono detti **nod**.

Risulterà utile la seguente definizione

Definizione 1.7. *Una formula*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^M w_i f(x_i)$$

- ha **grado di precisione almeno** N se e solo se è esatta per tutti i polinomi f di grado inferiore o uguale a N ;
- ha **grado di precisione esattamente** N se e solo se ha grado di precisione almeno N ed esiste un polinomio di grado $N + 1$ per cui non lo sia.

Di seguito indicheremo con \mathbb{P}_m i polinomi di grado minore o uguale a m .
Vale il seguente teorema,

Teorema 1.8 (Caratterizzazione delle formule interpolatorie). *Se una formula a "n+1" nodi è interpolatoria allora ha grado di precisione almeno "n".*

Se una formula a "m" nodi, con "m ≤ n+1" ha grado di precisione almeno "n" allora è interpolatoria.

Di seguito vedremo alcune formule interpolatorie di grado n a $n+1$ nodi $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$, che sono quindi caratterizzate da avere pesi

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 0, \dots, n$$

dove L_i è l' i -simo polinomio di Lagrange (relativamente a $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$).

Se

- $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$,
- $x_0 \in [a, b]$,

ricaviamo $L_0(x) = 1$ (si osservi che l'unico polinomio costante che vale 1 in x_0 è proprio L_0) ed essendo

$$w_0 = \int_a^b L_0(x) dx = b - a, \quad (2)$$

deduciamo la regola detta del **rettangolo** (cf. [5])

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^0 w_k f(x_k) = w_0 f(x_0) = (b - a) f(x_0). \quad (3)$$

Dal punto di vista geometrico, visto il grafico dell'interpolante p_0 in un solo punto, si ottiene che l'integrale di p_0 è pari a **calcolare l'area di un rettangolo** con lati di lunghezza $f(a)$ e $b - a$, da cui riotteniamo il risultato in (3).

Per costruzione, se

- f è un polinomio di grado 0,
- $p_0 \in \mathbb{P}_0$ è il polinomio di grado 0, ovvero costante, che interpola il dato (x_0, y_0) ,

per l'unicità del polinomio interpolatore abbiamo $f = p_0$ e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_0(x) dx = (b - a) f(x_0).$$

Di conseguenza il **grado di precisione è almeno 0**.

- Se in particolare si sceglie quale $x_0 = (a + b)/2$, otteniamo la regola del **punto medio**, che denoteremo con S_0 .

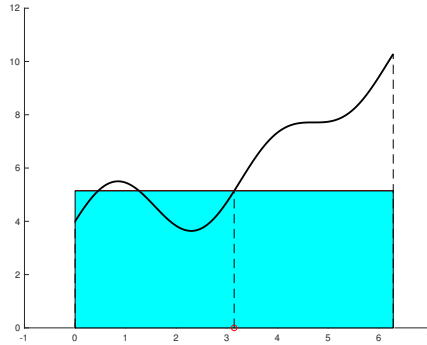


Figura 1: Regola del rettangolo con nodo $x_0 = (a + b)/2$, $a = 0$, $b = 2\pi$, per il calcolo di $\int_0^{2\pi} (3 + \sin(2x) + \cos(x) + x) dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

- In questo caso, se $f \in C^{(2)}(a, b)$ l'errore risulta

$$E_0(f) := I(f) - S_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

- Visto che un polinomio $q_1 \in \mathbb{P}_1$ è tale che $q_1^{(2)} \equiv 0$, deduciamo che $E_0(q_1) = I(q_1) - S_0(q_1) = 0$, cioè $I(q_1) = S_0(q_1)$ ovvero che il **grado di precisione è almeno 1**.
- Per il polinomio $x^2 \in \mathbb{P}_2$, l'errore risulta uguale a

$$\frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi) \cdot 2 = \frac{(b-a)^3}{12} \neq 0$$

e quindi il **grado di precisione della formula del punto medio è esattamente 1**.

Definizione 1.9 (Formule di Newton-Cotes chiuse, (Newton 1676, Cotes 1722)). Sia $[a, b]$ un intervallo compatto di \mathbb{R} . Una formula

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$

si dice di tipo **Newton-Cotes chiusa** se

- i nodi sono equispaziati, e comprendono gli estremi, cioè

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad i = 0, \dots, n,$$

- i pesi sono

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 0, \dots, n, \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{x_j - x_i}.$$

Nota 1.10 (Grado di precisione Formule di Newton-Cotes chiuse). Tale formula è interpolatoria a $n+1$ punti (attenzione alla sommatoria) e ha grado di precisione almeno n .

Nota 1.11 (Facoltativa). • Gli estremi a, b , sono nodi quadratura.

- Esistono formule dette di **Newton-Cotes aperte** i cui nodi sono equidistanti, ma non comprendono gli estremi. Alcuni esempi sono, posto $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$ (cf.[3])
 1. regola del rettangolo,
 2. regola a due punti: $(3h/2) \cdot (f_0 + f_1)$, con errore $(3h^3/4)f^{(2)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$,
 3. regola di Masina: $(4h/3) \cdot (2f_0 - f_1 + 2f_2)$, con errore $(28h^5/90)f^{(4)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$,
 4. regola a quattro punti: $(5h/24) \cdot (11f_0 + f_1 + f_2 + 11f_3)$, con errore $(95h^5/144)f^{(4)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$.

Nota 1.12. Queste formule furono introdotte da Newton nel 1676 e perfezionate da Cotes nel 1722, che le calcolò fino a quelle con 11 nodi.

Di seguito introduciamo le formule di tipo Newton-Cotes chiuse, per $n = 0, 1, 2$.

Se $f \in C([a, b])$, a, b finiti e $x_0 = a$ e $x_1 = b$, da $w_k = \int_a^b L_k(x)dx$, $k = 0, 1$ e

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{b - a}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}$$

deduciamo

$$\begin{aligned} w_0 &:= \int_a^b L_0(x)dx = \int_a^b \frac{b-x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (b-x)dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{-1}{2} ((b-b)^2 - (b-a)^2) = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &:= \int_a^b L_1(x)dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-a)dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} ((b-a)^2 - (a-a)^2) = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

deduciamo la regola detta del **trapezio** (cf. [6])

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx S_1(f) := \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)).} \quad (4)$$

Visto che corrisponde a unire i dati (x_0, y_0) , (x_1, y_1) mediante un segmento, in effetti se y_0, y_1 hanno lo stesso segno, ci si riconduce a **calcolare l'area di un trapezio**, la cui base ha lunghezza $b-a$ e le altezze sono $f(a)$ e $f(b)$ da cui riotteniamo il risultato in (4).

Per costruzione, se

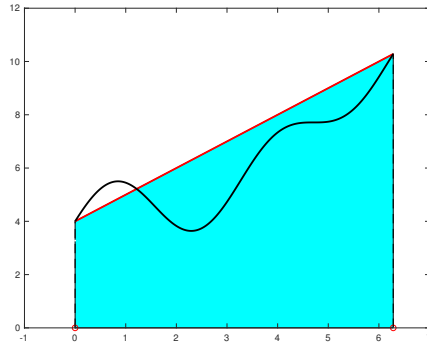


Figura 2: Regola del trapezio per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

- f è un polinomio di grado al più 1,
- p_1 è il polinomio che interpola i dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$,

per l'unicità del polinomio interpolatore abbiamo $f = p_1$ e quindi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_1(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

e di conseguenza il **grado di precisione è almeno 1**.

- Si dimostra che se $f \in C^2([a, b])$ allora l'errore compiuto è (cf. [1, p.252-253])

$$E_1(f) := I(f) - S_1(f) = \frac{-(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

- Visto che un polinomio p_1 di grado minore o uguale a 1 ha derivata seconda nulla, deduciamo che $E_1(p_1) = I(p_1) - S_1(p_1) = 0$, ovvero $I(p_1) = S_1(p_1)$, quindi il **grado di precisione è almeno 1**.
- Per $p_2(x) = x^2 \in \mathbb{P}_2$, risulta

$$E_1(p_2) = I(p_2) - S_1(p_2) = -(b-a)^3/6 \neq 0 \Rightarrow I(p_2) \neq S_1(p_2)$$

per cui il **grado di precisione è esattamente 1**.

Qualora i nodi di quadratura siano

$$x_0 = a, \quad x_1 = (b+a)/2, \quad x_2 = b$$

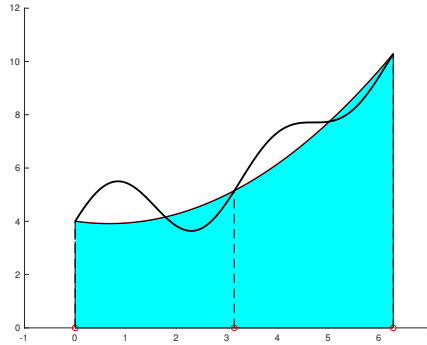


Figura 3: Regola di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

integrando il polinomio $p_2(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k)L_k(x) \in \mathbb{P}_2$ che interpola i dati $(x_k, f(x_k))_{k=0,1,2}$, con la stessa tecnica, ma con calcoli dei pesi un po' più tediosi, otteniamo la formula detta di **Cavalieri-Simpson** (cf. [7]), $\int_a^b f(x)dx \approx S_2(f)$ con

$$S_2(f) := \frac{b-a}{6} \cdot f(a) + \frac{2(b-a)}{3} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} \cdot f(b).$$

ovvero

- $w_0 = w_2 = \frac{b-a}{6}$,
- $w_1 = \frac{2(b-a)}{3} = \frac{4(b-a)}{6}$.

Talvolta viene scritta la formulazione *compatta*

$$S_2(f) := \frac{b-a}{6} (f(a) + 4 \cdot f((a+b)/2) + f(b)).$$

Visto che la formula è ottenuta integrando esattamente ogni polinomio di grado 2, abbiamo che il **grado di precisione** è almeno 2. In realtà si mostra sorprendentemente che è **esattamente 3**.

- Se $f \in C^4([a, b])$ allora l'errore compiuto è (cf. [1, p.256-257])

$$E_2(f) := I(f) - S_2(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

dove $h = \frac{b-a}{2}$ e $\xi \in (a, b)$.

- visto che un polinomio $p_3 \in \mathbb{P}_3$ di grado minore o uguale a 3 ha derivata quarta nulla, deduciamo che $E_2(p_3) = I(p_3) - S_2(p_3) = 0$, ovvero $I(p_3) = S_2(p_3)$ e quindi che il **grado di precisione è almeno 3**.

- per $p_4(x) = x^4 \in \mathbb{P}_4$, si ha $E_2(p_4) = I(p_4) - S_2(p_4) = \frac{-h^5}{90} 24 \neq 0$ e quindi $I(p_4) \neq S_2(p_4)$ per cui il **grado di precisione è esattamente 3**.

Ciò equivale, dopo aver approssimato f con il polinomio interpolatore $p_2 \in \mathbb{P}_2$ relativo alle coppie $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0,1,2}$, a valutare $S_2(f) = \int_a^b p_2(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx = I(f)$.

Nota 1.13 (Nota storica). *Le formule di Cavalieri-Simpson furono sviluppate da Cavalieri nel 1635, erano note tanto a Gregory che a Cotes, e riscoperte da Simpson nel 1743 [2, p.271].*

Facoltativo 1.14. *In generale uno può applicare la tecnica vista in precedenza per ottenere formule di quadratura di tipo Newton-Cotes con grado di precisione **g.d.p** maggiore.*

Posto $f_k = f(x_k)$, e $x_k = a + k \cdot (b - a)/n$, con $k = 0, \dots, n$, (cf. [8])

- **Regola di Simpson 3/8**, $n = 3$: $\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_4)$, con **g.d.p**= 3,
- **Regola di Milne-Boole**, $n = 4$: $\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$, con **g.d.p**= 5,
- **Regola a sei punti**, $n = 5$: $\frac{5h}{888}(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5)$, **g.d.p**= 5,
- **Regola di Weddle-Hardy**, $n = 6$: $\frac{h}{140}(41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6)$, con **g.d.p**= 7,
- **Regola a otto punti** $n = 7$: $\frac{7h}{17280}(751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 + 2989f_4 + 1323f_5 + 3577f_6 + 751f_7)$, con **g.d.p**= 7.
- **Regola a nove punti**, $n = 8$: $\frac{4h}{14175}(989f_0 + 5888f_1 - 928f_2 + 10496f_3 - 4540f_4 + 10496f_5 - 928f_6 + 5888f_7 + 989f_8)$, con **g.d.p**= 9,
- **Regola a dieci punti**, $n = 9$: $\frac{9h}{89600}(2857(f_0 + f_9) + 15741(f_1 + f_8) + 1080(f_2 + f_7) + 19344(f_3 + f_6) + 5778(f_4 + f_5))$, con **g.d.p**= 9,
- **Regola a undici punti**, $n = 10$: $\frac{5h}{299376}(16067(f_0 + f_{10}) + 106300(f_1 + f_9) - 48525(f_2 + f_8) + 272400(f_3 + f_7) - 260550(f_4 + f_6) + 427368f_5)$, con **g.d.p**= 11.

Si osserva che fino $n = 8$ hanno tutti i pesi positivi mentre per $n = 9, 11$ ciò non succede. Ognuna di queste regole, con ragionamenti analoghi a quelli effettuati per quelle del trapezio e di Cavalieri-Simpson, ha grado di precisione almeno a n (si osservi che i punti sono $n + 1$).

Osserviamo che se

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]$$

è la funzione di Runge e $p_n \in \mathbb{P}_n$ il **polinomio interpolante** le coppie $(x_j, f(x_j))$ con $\{x_j\}_{j=0, \dots, n}$, si ha che

$$\max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - p_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

e quindi ci si aspetta che $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ sia molto diverso $I(p_n) = \int_a^b p_n(x)dx$, specialmente per n grande, viste le forti differenze agli in prossimità degli estremi $-5, 5$, tra f e p_n .

D'altro canto abbiamo visto che ciò non è un problema per **interpolanti polinomiali a tratti di grado M** , diciamo s_M e quindi si intuisce che sia bene approssimare $I(f)$ con $I(s_M)$. Esploriamo questo ambito nell'argomento delle formule composte.

Le formule composte sono ottenute **integrando un interpolante polinomiale a tratti di grado locale fissato s** che sono localmente algebriche, cioè ottenute integrando un singolo polinomio interpolatore di grado s , in $[x_{ks}, x_{(k+1)s}]$, con $k = 0, \dots, (n/s) - 1$, con n multiplo di s .

Definizione 1.15 (Formula composta). Sia

1. $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato,
2. $t_j = a + jh$ con $h = (b - a)/N$, $j = 0, \dots, N$,
3. $S(f, \alpha, \beta)$ una regola di quadratura nel generico intervallo limitato $[\alpha, \beta]$.

La formula di quadratura

$$S^{(c)}(f, a, b, N) = \sum_{j=0}^{N-1} S(f, t_j, t_{j+1}) \quad (5)$$

è detta formula composta di S .

Nota 1.16. In questa trattazione i punti x_j , $j = 0, \dots, N$, sono **equispaziati**, ma con qualche fatica si può effettuare nel caso generale di punti arbitrari.

Per introdurre la formula composta del punto medio, supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in N subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$, $K = 0, \dots, N - 1$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N$, $h = (b - a)/N$.

Il punto medio x_k dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ risulta

$$x_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} = \frac{a + kh + a + (k + 1)h}{2} = a + \frac{(2k + 1)h}{2}$$

e visto che il peso w_k della formula $S(f, t_k, t_{k+1})$ risulta $w_k = t_{k+1} - t_k = a + (k + 1)h - (a + kh) = h = (b - a)/N$ otteniamo

$$S_0^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b - a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

La formula composta del punto medio è così definita da

$$S_0^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b - a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k), \quad (6)$$

dove

$$x_k = a + \frac{2k + 1}{2} \cdot \frac{b - a}{N},$$

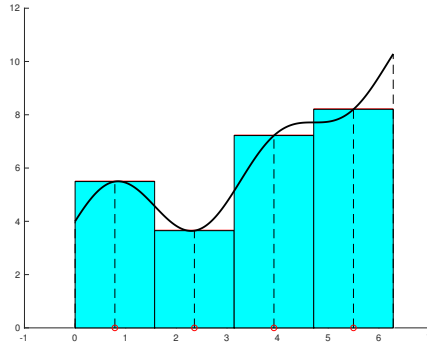


Figura 4: Formula del punto medio composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste).

con $k = 0, \dots, N - 1$.

Si vede immediatamente che x_k è il punto medio dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, per $k = 0, \dots, N - 1$, dove $t_k = a + k \frac{b-a}{N}$, $k = 0, \dots, N$.

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_0^{(c)}(f) := I(f) - S_0^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{(b-a)}{24} h^2 f^{(2)}(\xi)$$

dove $h = \frac{b-a}{N}$, $\xi \in (a, b)$.

- Il grado di precisione è 1, come la regola del punto medio, ma se $N > 1$ allora il **passo h è minore**. In effetti, relativamente alla regola del punto medio avevamo

$$E_0(f) := I(f) - S_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Per introdurre la formula composta dei trapezi, supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in $N = 4$ subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$, $K = 0, \dots, N - 1 = 3$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N = 4$, $h = (b-a)/N = (b-a)/4$.

Indicata con $S_1(f, \alpha, \beta)$ l'applicazione della regola del trapezio relativamente a f e all'intervallo $[\alpha, \beta]$,

- $S_1(f, t_0, t_1) = \frac{h}{2}(f(t_0) + f(t_1))$,
- $S_1(f, t_1, t_2) = \frac{h}{2}(f(t_1) + f(t_2))$,
- $S_1(f, t_2, t_3) = \frac{h}{2}(f(t_2) + f(t_3))$,
- $S_1(f, t_3, t_4) = \frac{h}{2}(f(t_3) + f(t_4))$,

ricaviamo che essendo $N = 4$

$$\begin{aligned} S_1^{(c)}(f, a, b, 4) &= \frac{h}{2}(f(t_0) + f(t_1)) + \frac{h}{2}(f(t_1) + f(t_2)) + \frac{h}{2}(f(t_2) + f(t_3)) + \frac{h}{2}(f(t_3) + f(t_4)) \\ &= \frac{h}{2}(f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + 2f(t_3) + f(t_4)) \\ &= \frac{b-a}{N} \left(\frac{1}{2}f(t_0) + f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \frac{1}{2}f(t_4) \right) \end{aligned}$$

Posti $x_k = a + kh$, $k = 0, \dots, N$, $h = (b-a)/N$, la formula **composta dei trapezi** è definita da

$$S_1^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right],$$

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

- Il **grado di precisione è 1**, come la regola del trapezio, ma se $N > 1$ allora il passo h è minore.

Nota 1.17. In virtù della formula di Eulero-Mac Laurin, si mostra che la formula composta dei trapezi è particolarmente indicata per integrare funzioni periodiche con derivati che sono tali, ed è utilizzata nella ben nota FFT.

Per introdurre la formula composta di Cavalieri-Simpson, supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in $N = 4$ subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$, $K = 0, \dots, N-1 = 3$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N = 4$, $h = (b-a)/N$.

Indicata con $S_2(f, t_k, t_{k+1})$ l'applicazione della regola di Cavalieri-Simpson relativamente a f e all'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, indicato con $c_k = \frac{t_k+t_{k+1}}{2} = a + \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{b-a}{N}$ il punto medio dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$

- $S_2(f, t_0, t_1) = \frac{h}{6}(f(t_0) + 4 \cdot f(c_0) + f(t_1))$,
- $S_2(f, t_1, t_2) = \frac{h}{6}(f(t_1) + 4 \cdot f(c_1) + f(t_2))$,
- $S_2(f, t_2, t_3) = \frac{h}{6}(f(t_2) + 4 \cdot f(c_2) + f(t_3))$,
- $S_2(f, t_3, t_4) = \frac{h}{6}(f(t_3) + 4 \cdot f(c_3) + f(t_4))$,

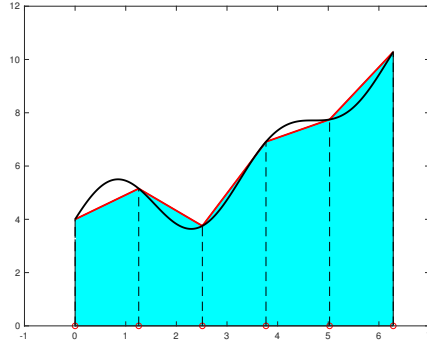


Figura 5: Formula dei trapezi composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste). In particolare si vede il grafico dell'interpolante a tratti, avente quali punti di discontinuità $2\pi/3, 4\pi/3$.

ricaviamo che essendo $N = 4$

$$\begin{aligned}
 S_1^{(c)}(f, a, b, 4) &= \frac{h}{6}(f(t_0) + 4 \cdot f(c_0) + f(t_1)) + \frac{h}{6}(f(t_1) + 4 \cdot f(c_1) + f(t_2)) \\
 &+ \frac{h}{6}(f(t_2) + 4 \cdot f(c_2) + f(t_3)) + \frac{h}{6}(f(t_3) + 4 \cdot f(c_3) + f(t_4)) \\
 &= \frac{h}{6}(f(t_0) + 4 \cdot f(c_0) + 2f(t_1) + 4 \cdot f(c_1) + 2f(t_2) + 4 \cdot f(c_3) \\
 &+ 2f(t_3) + 4 \cdot f(c_4) + f(t_4)) \\
 &= \frac{h}{6}(f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + 2f(t_3) + f(t_4) + 4f(c_0) + 4f(c_1) + 4f(c_2) + 4f(c_3)).
 \end{aligned}$$

Posti $x_k = a + kh/2, k = 0, \dots, 2N, h = (b - a)/N$, la formula composta di Cavalieri-Simpson è definita da

$$S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N}) \right] \quad (7)$$

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_2^{(c)}(f) := I(f) - S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2} \right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

- Il grado di precisione è quindi 3, come la regola di Cavalieri-Simpson, ma se $N > 1$ allora il passo h è minore.

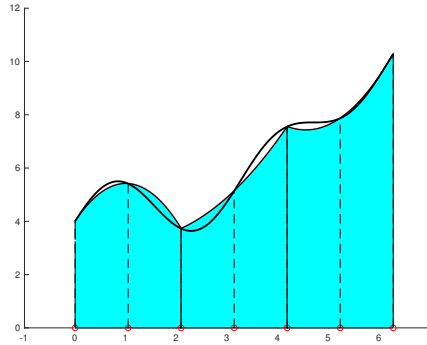


Figura 6: Formula di Cavalieri-Simpson composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste).

In questa sezione forniamo alcuni esempi in cui applichiamo le formule composte per integrare alcune funzioni $f \in C([a, b])$.

Esempio. Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^\pi \exp(x) \cos(x) dx = -(\exp(\pi) + 1)/2.$$

mediante le formule composte note, $N = 1, 2, 4, \dots, 512$.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$1.2e + 01$	$2.3e + 01$	$4.8e - 01$	1	2	3
2	$2.8e + 00$	$5.3e + 00$	$8.5e - 02$	2	3	5
4	$6.4e - 01$	$1.3e + 00$	$6.1e - 03$	4	5	9
8	$1.6e - 01$	$3.1e - 01$	$3.9e - 04$	8	9	17
16	$3.9e - 02$	$7.8e - 02$	$2.5e - 05$	16	17	33
32	$9.7e - 03$	$1.9e - 02$	$1.6e - 06$	32	33	65
64	$2.4e - 03$	$4.8e - 03$	$9.7e - 08$	64	65	129
128	$6.1e - 04$	$1.2e - 03$	$6.1e - 09$	128	129	257
256	$1.5e - 04$	$3.0e - 04$	$3.8e - 10$	256	257	513
512	$3.8e - 05$	$7.6e - 05$	$2.4e - 11$	512	513	1025

Tabella 1: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi f(x) dx$ con $f(x) = \exp(x) \cos(x) dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente

al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N **suddivisioni**, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	4.33	4.27	5.59
2	4.34	4.20	13.92
4	4.10	4.06	15.54
8	4.03	4.02	15.89
16	4.01	4.00	15.97
32	4.00	4.00	15.99
64	4.00	4.00	16.00
128	4.00	4.00	16.00
256	4.00	4.00	16.00

Tabella 2: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi f(x)dx$ con $f(x) = \exp(x) \cos(x)$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Osserviamo che i valori relativi alle formule composte

- del **punto medio** e dei **trapezi** tende a **4**,
- di **Cavalieri-Simpson** tende a **16**.

Qualitativamente, e l'errore è, per qualche costante C indipendente da N ,

$$(E_k^{(c)}(f))_N \approx \frac{C}{N^p} = C^* h^p$$

allora

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}} \approx \frac{\frac{C}{N^p}}{\frac{C}{(2N)^p}} = \frac{C}{N^p} \frac{2^p N^p}{C} = 2^p.$$

- Visto che per le formule composte del punto medio e dei trapezi $(r_k^{(c)}(f))_N \rightarrow 4 = 2^2$, abbiamo che $p = 2$ e quindi $(E_k^{(c)}(f))_N \approx C^* h^2$.

In effetti l'errore delle formule **composte del punto medio** è

$$E_0^{(c)}(f) := I(f) - S_0^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{(b-a)}{24} h^2 f^{(2)}(\xi_N^{(0)}), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

mentre quelle **composte dei trapezi** è

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi_N^{(1)}), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

- Visto che per le formule **composte di Cavalieri-Simpson** $(r_2^{(c)}(f))_N \rightarrow 16 = 2^4$, abbiamo che $p = 4$ e quindi $(E_2^{(c)}(f))_N \approx C^* h^4$.

In effetti l'errore delle formule composte di Cavalieri-Simpson è

$$E_2^{(c)}(f) := I(f) - S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi_N^{(2)}) \approx C^* h^4.$$

Esempio. Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x} dx = 2/9.$$

mediante le formule composte note, $N = 1, 2, 4, \dots, 1024$.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$1.3e-01$	$2.8e-01$	$3.4e-03$	1	2	3
2	$3.6e-02$	$7.2e-02$	$2.3e-04$	2	3	5
4	$9.1e-03$	$1.8e-02$	$1.5e-05$	4	5	9
8	$2.3e-03$	$4.6e-03$	$1.0e-06$	8	9	17
16	$5.7e-04$	$1.1e-03$	$6.5e-08$	16	17	33
32	$1.4e-04$	$2.8e-04$	$4.1e-09$	32	33	65
64	$3.6e-05$	$7.1e-05$	$2.6e-10$	64	65	129
128	$8.9e-06$	$1.8e-05$	$1.7e-11$	128	129	257
256	$2.2e-06$	$4.5e-06$	$1.0e-12$	256	257	513
512	$5.6e-07$	$1.1e-06$	$6.6e-14$	512	513	1025
1024	$1.4e-07$	$2.8e-07$	$4.1e-15$	1024	1025	2049

Tabella 3: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x) dx$ con $f(x) = x^3 \sqrt{x} dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x) dx$, utilizzando N suddivisioni, valutiamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

Dalle tabelle vedremo che i valori relativi

- alle formule composte del **punto medio e dei trapezi tendono a 4**,
- alla formula composta di **Cavalieri-Simpson tendono a 16**,

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	3.76	3.86	14.56
2	3.93	3.96	15.00
4	3.98	3.99	15.31
8	4.00	4.00	15.53
16	4.00	4.00	15.67
32	4.00	4.00	15.77
64	4.00	4.00	15.84
128	4.00	4.00	15.89
256	4.00	4.00	15.92
512	4.00	4.00	16.06

Tabella 4: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = x^3\sqrt{x}dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

e quindi con errori rispettivamente del tipo C^*h^2 e C^*h^4 .

Esempio. Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \sqrt{x}dx = 2/3.$$

mediante le formule composte note, $N = 1, 2, 4, \dots, 2048$.

A differenza del caso precedente, la convergenza delle tre famiglie di formule è molto lenta, ed è principalmente dovuto al fatto che la funzione pur essendo continua in $[a, b]$, non appartiene nemmeno a $C^1[0, 1]$, visto che non è derivabile in 0.

Ciò nonostante risultano convergenti.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

In particolare si vede che i valori relativi alle tre **formule composte del punto medio e dei trapezi tendono a $2.83 \approx 2^{1.5}$** e quindi la convergenza è del tipo $C^*h^{1.5}$ (cf. [1, p262 e p.291]).

Esempio. Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^{100} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \text{erf}(100)$$

dove $\text{erf}(x)$ è la funzione di errore. mediante le formule composte note, $N = 1, 2, 4, \dots, 2048$.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$4.0e-02$	$1.7e-01$	$2.9e-02$	1	2	3
2	$1.6e-02$	$6.3e-02$	$1.0e-02$	2	3	5
4	$6.3e-03$	$2.3e-02$	$3.6e-03$	4	5	9
8	$2.4e-03$	$8.5e-03$	$1.3e-03$	8	9	17
16	$8.7e-04$	$3.1e-03$	$4.5e-04$	16	17	33
32	$3.2e-04$	$1.1e-03$	$1.6e-04$	32	33	65
64	$1.1e-04$	$4.0e-04$	$5.6e-05$	64	65	129
128	$4.1e-05$	$1.4e-04$	$2.0e-05$	128	129	257
256	$1.5e-05$	$5.0e-05$	$7.0e-06$	256	257	513
512	$5.2e-06$	$1.8e-05$	$2.5e-06$	512	513	1025
1024	$1.8e-06$	$6.3e-06$	$8.8e-07$	1024	1025	2049
2048	$6.5e-07$	$2.2e-06$	$3.1e-07$	2048	2049	4097

Tabella 5: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = \sqrt{x}dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	2.47	2.64	2.82
2	2.59	2.70	2.83
4	2.67	2.74	2.83
8	2.72	2.77	2.83
16	2.75	2.79	2.83
32	2.78	2.80	2.83
64	2.79	2.81	2.83
128	2.80	2.81	2.83
256	2.81	2.82	2.83
512	2.82	2.82	2.83
1024	2.82	2.82	2.83

Tabella 6: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = \sqrt{x}dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Nella prima tabella che segue esponiamo gli errori compiuti dalle regole composte per $N = 1, 2, 4, \dots, 512$.

Per $n \leq 64$ l'errore decresce lentamente, ed è comprensibile visto che l'intervallo ha ampiezza 100 e quindi il numero di campionamenti delle formule composte sono troppo pochi, ossia il valore di h troppo grande.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$8.9e-01$	$4.9e+01$	$1.6e+01$	1	2	3
2	$8.9e-01$	$2.4e+01$	$7.4e+00$	2	3	5
4	$8.9e-01$	$1.2e+01$	$3.3e+00$	4	5	9
8	$8.9e-01$	$5.4e+00$	$1.2e+00$	8	9	17
16	$8.9e-01$	$2.2e+00$	$1.6e-01$	16	17	33
32	$6.1e-01$	$6.8e-01$	$1.8e-01$	32	33	65
64	$3.1e-02$	$3.1e-02$	$1.0e-02$	64	65	129
128	$1.7e-07$	$1.7e-07$	$5.6e-08$	128	129	257
256	$1.1e-16$	$1.1e-16$	$2.2e-16$	256	257	513

Tabella 7: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^{100} f(x)dx$ con $f(x) = \exp(-x^2) dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, valutiamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	1.00	2.04	2.12
2	1.00	2.08	2.27
4	1.00	2.17	2.74
8	1.00	2.40	7.69
16	1.44	3.31	0.85
32	19.74	21.74	17.74
64	184935.89	184937.89	184933.89
128	1515188455.00	1515188459.00	252531408.50

Tabella 8: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^{100} f(x)dx$ con $f(x) = \exp(-x^2) dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Osserviamo che dal caso precedente i valori relativi alle formule composte del punto medio e dei trapezi non tendono a 4, e quelli della formula composta di Cavalieri-Simpson non tendono a 16.

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e consideriamo la formula di quadratura

$$S_M(f) := \sum_{j=0}^M w_j f_j \approx \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

dove $f_j = f(x_j)$, con $\{x_j\}_{j=0,\dots,N}$ nodi di quadratura.

Si supponga che invece di $\{f_j\}_j$ si disponga di una loro approssimazione $\{\tilde{f}_j\}_j$.

Ci si chiede come cambia il valore dell'integrale, valutando

$$\tilde{S}_M(f) := \sum_{j=0}^M w_j \tilde{f}_j \quad (9)$$

invece di $S_M(f)$.

Da (8), (9), ricaviamo per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |S_M(f) - \tilde{S}_M(f)| &= \left| \sum_{j=0}^M w_j f_j - \sum_{j=0}^M w_j \tilde{f}_j \right| = \left| \sum_{j=0}^M w_j (f_j - \tilde{f}_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^M |w_j| |f_j - \tilde{f}_j| \leq \left(\sum_{j=0}^M |w_j| \right) \cdot \max_j |f_j - \tilde{f}_j|. \end{aligned}$$

Quindi la quantità

$$\mathcal{I}(S_M) = \sum_{j=0}^M |w_j| \quad (10)$$

è un **indice di stabilità** della formula di quadratura S_M , in quanto se $\mathcal{I}(S_M)$ è grande, a piccole perturbazioni $\max_j |f_j - \tilde{f}_j|$ possono corrispondere valori degli integrali $S_M(f)$, $\tilde{S}_M(f)$ molto diversi.

Se la formula ha grado di precisione almeno 0 allora

$$\int_a^b 1 \, dx = \sum_{j=0}^M w_j. \quad (11)$$

e si ha $\sum_{j=0}^M w_j \leq \sum_{j=0}^M |w_j|$ con la disuguaglianza stretta se e solo se qualche peso w_j è negativo.

Di conseguenza, da (10), (11),

$$b - a = \int_a^b 1 \, dx = \sum_{j=0}^M w_j \leq \sum_{j=0}^M |w_j| = \mathcal{I}(S_M)$$

con la disuguaglianza stretta se qualche peso w_j è negativo.

Quindi la presenza di pesi negativi peggiora l'indice di stabilità $\sum_{j=0}^M |w_j|$, mentre se sono tutti positivi e la formula ha grado di precisione almeno 0

$$\mathcal{I}(S_M) = b - a$$

e quindi piccoli errori nel valutare la funzione f nei nodi di quadratura non comporta che $S_M(f)$ e $\tilde{S}_M(f)$ possano essere arbitrariamente distanti.

Nella tabella relativa agli indici di stabilità valutiamo la somma dei moduli dei pesi delle regole di Newton-Cotes a $n + 1$ nodi.

n	\mathcal{I}
0	2.00000e + 00
1	2.00000e + 00
2	2.00000e + 00
3	2.00000e + 00
4	2.00000e + 00
5	2.00000e + 00
6	2.00000e + 00
7	2.00000e + 00
8	2.90243e + 00
9	2.00000e + 00
10	6.12959e + 00

Tabella 9: Indice di stabilità $\mathcal{I}(S_n)$ delle formule di Newton Cotes chiuse aventi $n + 1$ nodi.

Come si vede le formule pur avendo grado di precisione almeno n , cominciano a essere meno stabili al crescere di n .

Definita la famiglia di formule di quadratura $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (con grado di precisione non necessariamente n), ognuna del tipo

$$S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \approx I(f) := \int_a^b f(x) dx \quad (12)$$

introduciamo l'errore della formula n -sima

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}).$$

Qualora $\mathcal{E}_n(f) \rightarrow 0$ la famiglia di formule $\{S_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\int_a^b f(x) dx$.

In altri termini, **la famiglia di formule $\{S_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ risulta convergente** all'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$ se

$$S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

La convergenza delle formule algebriche, ottenute integrando il polinomio interpolatore, dipende dalla famiglia di nodi prescelti.

Se consideriamo i nodi di Chebyshev $\{x_k^{(\text{ch})}\}_{k=0, \dots, n}$, per quanto visto nell'interpolazione polinomiale, abbiamo che se $f \in C^1([a, b])$ con $[a, b]$ limitato e p_n il polinomio di grado al più n che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ allora

$$\lim_n \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = 0,$$

e per un corollario precedente, deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (13)$$

La formula basata sui nodi di Chebyshev

$$\sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})})$$

essendo interpolatoria, ha grado di precisione almeno n e di conseguenza

$$\int_a^b p_n(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})}), \quad \forall p_n \in \mathbb{P}_n. \quad (14)$$

Da (13), (14) deduciamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})}) = \int_a^b f(x) dx,$$

ovvero la famiglia di formule $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, applicata a f , converge all'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$.

In generale, altre scelte di nodi non godono sempre di qualità, anche per funzioni $f \in C^\infty([a, b])$.

A tal proposito, se consideriamo i nodi di equispaziati $\{x_k^{(\text{e})}\}_{k=0, \dots, n}$, per quanto visto nell'interpolazione polinomiale, abbiamo che se $f \in C^\infty([a, b])$ con $[a, b]$ limitato e p_n il polinomio di grado al più n che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n$ allora non si può affermare

$$\lim_n \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = 0,$$

come si può verificare per $f(x) = 1/(1 + x^2)$, ovvero la funzione di Runge.

A partire da questo fatto si può dimostrare (non immediato) che se consideriamo la famiglia di formule di quadratura di Newton-Cotes $\{S_n\}$ (cioè S_n è la formula di quadratura interpolatoria avente $n + 1$ nodi equispaziati), applicata alla funzione di Runge

$$\lim S_n(f) \neq \int_{-5}^5 f(x) dx.$$

Nella tabella 1 tali risultati risultano ancora più evidenti. Le famiglie di regole di Newton-Cotes non converge all'integrale richiesto, a differenza di quanto succede utilizzando formule interpolatorie nei nodi di Chebyshev (come previsto dalla teoria).

Nel caso dell'interpolazione polinomiale a tratti, si può mostrare che se

1. $f \in C^{m+1}([a, b])$ con $[a, b]$ limitato,
2. Δ_N è una suddivisione di $[a, b]$ in N intervalli $[x_{mk}, x_{m(k+1)}]$ con $k = 0, \dots, N-1$, aventi la stessa ampiezza h ,

n	E_n^e	E_n^{ch}
10	$1.9e + 00$	$1.7e - 01$
20	$3.0e + 01$	$3.3e - 03$
30	$7.7e + 02$	$6.2e - 05$
40	$2.5e + 04$	$1.2e - 06$
50	$8.9e + 05$	$2.1e - 08$
60	$7.3e + 09$	$4.7e - 10$
70	$1.0e + 07$	$2.7e - 12$
80	$6.3e + 05$	$6.1e - 13$
90	$1.4e + 05$	$4.1e - 14$
100	$1.9e + 03$	$4.4e - 15$

Tabella 10: Nella prima colonna il parametro n pari al grado dell'interpolante polinomiale, nella seconda e terza colonna gli errori assoluti di quadratura ottenuti integrando le interpolanti in $n + 1$ nodi rispettivamente equispaziati e di Chebyshev (in $[-5, 5]$).

3. $s_{m,N}$ è l'interpolante polinomiale a tratti di grado m di f relativamente ai nodi x_0, x_1, \dots, x_{mN} ,

allora per $C^* = \max_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$ si ha

$$0 \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - s_{m,N}(x)| \leq \frac{C^*}{(m+1)!} h^{m+1} = \frac{C^*}{(m+1)!} \left(\frac{b-a}{N}\right)^{m+1}$$

e quindi per il teorema del confronto

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} |f(x) - s_{m,N}(x)| = 0.$$

Di conseguenza,

$$\int_a^b s_{m,N}(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

e siccome, per costruzione, la formula composta $S_m^{(c)}(f, a, b, N)$ basata su una regola a m nodi, corrisponde a calcolare $\int_a^b s_{m,N}(x) dx$ otteniamo

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_m^{(c)}(f, a, b, N) = \int_a^b f(x) dx,$$

ovvero che le formule composte $S_m^{(c)}(f, a, b, N)$ sono convergenti al crescere di N .

Questo implica che sotto opportune ipotesi di regolarità di f , le **formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson**, risultano **convergenti** all'aumentare del numero N di sottointervalli.

Ripetiamo quale esempio la determinazione dell'integrale definito

$$\int_{-5}^5 \frac{1}{1+x^2} dx$$

e dalla sua tabulazione si evince la convergenza delle formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, all'aumentare del numero N di sottointervalli.

Osserviamo che per un numero alto di nodi, la formula $E_2^{(c)}(f)$ propone errori molto piccoli, seppur non decrescenti al crescere di N , cosa naturale, perchè gli $E_2^{(c)}(f)$ sono prossimi alla precisione di macchina.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$7.3e+00$	$2.4e+00$	$4.0e+00$	1	2	3
2	$1.4e+00$	$2.4e+00$	$9.6e-02$	2	3	5
4	$4.6e-01$	$5.4e-01$	$1.3e-01$	4	5	9
8	$3.9e-02$	$3.8e-02$	$1.3e-02$	8	9	17
16	$2.1e-04$	$6.9e-04$	$9.1e-05$	16	17	33
32	$1.2e-04$	$2.4e-04$	$4.5e-08$	32	33	65
64	$3.0e-05$	$6.0e-05$	$2.6e-09$	64	65	129
128	$7.5e-06$	$1.5e-05$	$1.6e-10$	128	129	257
256	$1.9e-06$	$3.8e-06$	$1.0e-11$	256	257	513
512	$4.7e-07$	$9.4e-07$	$6.4e-13$	512	513	1025
1024	$1.2e-07$	$2.4e-07$	$4.0e-14$	1024	1025	2049
2048	$2.9e-08$	$5.9e-08$	$2.7e-15$	2048	2049	4097
4096	$7.3e-09$	$1.5e-08$	$4.4e-16$	4096	4097	8193
8192	$1.8e-09$	$3.7e-09$	$0.0e+00$	8192	8193	16385
16384	$4.6e-10$	$9.2e-10$	$4.4e-16$	16384	16385	32769
32768	$1.1e-10$	$2.3e-10$	$4.4e-16$	32768	32769	65537
65536	$2.9e-11$	$5.7e-11$	$0.0e+00$	65536	65537	131073
131072	$7.2e-12$	$1.4e-11$	$4.4e-16$	131072	131073	262145
262144	$1.8e-12$	$3.6e-12$	$8.9e-16$	262144	262145	524289
524288	$4.5e-13$	$9.0e-13$	$1.8e-15$	524288	524289	1048577
1048576	$1.1e-13$	$2.2e-13$	$0.0e+00$	1048576	1048577	2097153

Tabella 11: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_{-5}^5 1/(1+x^2)dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

2. Bibliografia

- [1] K. Atkinson, [Introduction to Numerical Analysis](#), Wiley, 1989.
- [2] J.F.Epperson, [An introduction to Numerical Methods and Analysis, 2nd Edition](#), Wiley, 2013.
- [3] [Wikipedia, Formule di Newton-Cotes](#).
- [4] [Wikipedia, Numerical Integration](#)
- [5] [Wikipedia, Regola del Rettangolo](#)

- [6] [Wikipedia, Regola del Trapezio](#)
- [7] [Wikipedia, Regola di Cavalieri-Simpson](#)
- [8] [Wolfram MathWorld, Formule di Newton-Cotes.](#)