

Interpolazione polinomiale

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova

7 aprile 2025

Problema. (Interpolazione polinomiale)

Siano dati $n + 1$ punti x_0, \dots, x_n a due a due distinti e i valori y_0, \dots, y_n (assunti ad esempio da una funzione $y = f(x)$).

Il problema dell'**interpolazione polinomiale** (cf. [1, p.131]) consiste nel calcolare il polinomio $p_n(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ di grado n tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Esempio

Dati 2 punti distinti x_0, x_1 e i valori y_0, y_1 , determinare il polinomio p_1 di grado 1 tale che

$$p_1(x_0) = y_0, \quad p_1(x_1) = y_1 \quad (2)$$

ovvero la retta che passa per le coppie $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.

In questa sezione mostreremo che questo polinomio interpolatore p_n esiste ed è **unico e come calcolarlo**.

Di seguito denoteremo con \mathbb{P}_n l'insieme dei polinomi il cui grado è al più n .

Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

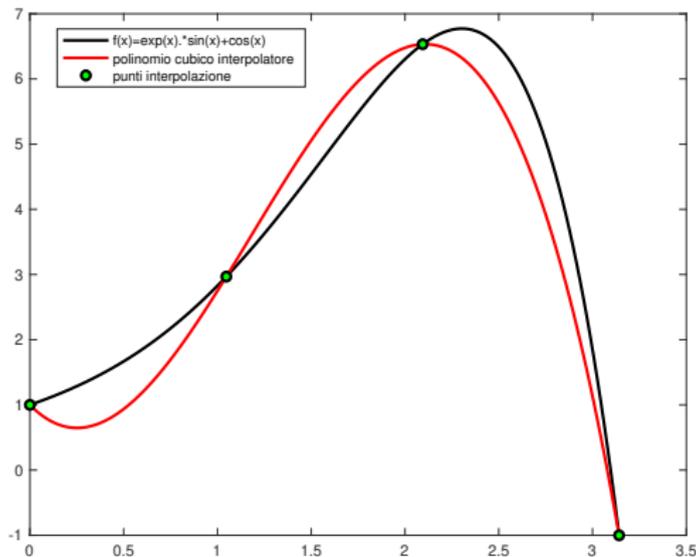


Figura: Esempio di interpolazione della funzione $f(x) = \exp(x) \sin(x) + \cos(x)$ (in nero) mediante un polinomio di grado 3 (in rosso) in 4 punti equispaziati di $[0, \pi]$ (cerchietti in verde). Sono stati esposti i grafici delle funzioni e le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0, \dots, 3}$, ove $x_k = k\pi/3$ e $y_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, 3$.

Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

Teorema (Unicità del polinomio interpolatore)

Dati $n + 1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n e i valori y_0, y_1, \dots, y_n il polinomio p_n di grado al più n tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

è al più unico.

Dimostrazione.

La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che esistano due polinomi distinti p_n e q_n di grado al più n tali che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Allora il polinomio $p_n - q_n$ ha grado n in quanto differenza di due polinomi di grado n ed è pure

$$(p_n - q_n)(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

e quindi per un certo polinomio non nullo $\gamma(x)$, dal teorema di Ruffini per la fattorizzazione dei polinomi si ha che

$$(p_n - q_n)(x) = \gamma(x) \cdot \prod_{k=0}^n (x - x_k) = \gamma(x) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

e quindi $p_n - q_n$ mye un polinomio di grado almeno $n + 1$, il che è assurdo.

Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

Per studiare l'esistenza del polinomio interpolatore, **Lagrange** (cf. [3], [6]) osservò nel 1792 che il polinomio di grado n (detto appunto di Lagrange, ma già noto a Waring nel 1779)

$$L_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

è tale che

$$L_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

dove $\delta_{k,j}$ è l'operatore di Kronecker, il cui valore è 1 se $k = j$ e 0 se $k \neq j$.

Nota.

Osserviamo che ogni L_k è un polinomio di grado n e quindi una funzione continua. Di conseguenza non è vero che vale 0 ovunque eccetto in x_k dove vale 1 (sarebbe una funzione discontinua!).

Abbiamo esclusivamente descritto il valore del polinomio di Lagrange L_k nelle ascisse di interpolazione x_j con $j = 0, \dots, n$.

Teorema (Esistenza del polinomio interpolatore)

Dati $n + 1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n e i valori y_0, y_1, \dots, y_n , il polinomio di grado al più n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) \quad (3)$$

è tale che $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

Dimostrazione.

Poichè L_k è un polinomio di grado al più n , lo è certamente lo stesso moltiplicato per lo scalare y_k e la somma di polinomi di grado al più n . Quindi sicuramente $p_n \in \mathbb{P}_n$.

Inoltre p_n interpola i dati visto che per $j = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} p_n(x_j) &= y_0 \underbrace{L_0(x_j)}_0 + \dots + y_{j-1} \underbrace{L_{j-1}(x_j)}_0 + y_j \underbrace{L_j(x_j)}_1 + y_{j+1} \underbrace{L_{j+1}(x_j)}_0 + \dots + y_n \underbrace{L_n(x_j)}_0 \\ &= y_0 \cdot 0 + \dots + y_{j-1} \cdot 0 + y_j \cdot 1 + y_{j+1} \cdot 0 + \dots + y_n \cdot 0 = y_j \end{aligned}$$

Quindi p_n è un polinomio interpolatore.

Nota.

1. Il teorema precedente è **costruttivo**, in quanto non solo permette di stabilire l'esistenza del polinomio interpolatore, ma ne evidenzia un metodo di calcolo.
2. Si osservi inoltre come ogni termine della sommatoria

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

separa (in qualche senso) il contributo delle ordinate y_k da quello dei polinomi di Lagrange L_k essenzialmente dipendenti dai punti $\{x_j\}_{j=0,\dots,n}$ (si rifletta bene su questa affermazione).

Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

Nota. (Esistenza e unicità via matrice di Vandermonde)

Se

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

è il polinomio interpolatore allora $p_n(x_j) = y_j$ per $j = 0, \dots, n$ e quindi

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_0 + a_1 x_j + \dots + a_n x_j^n = y_j \\ \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (4)$$

Definiamo

- la **matrice di Vandermonde** $V = (v_{i,j}) = (x_i^j)$, $0 \leq i, j \leq n$ ovvero

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

- $y = (y_0, \dots, y_n)^T$;
- $a = (a_k)_{k=0, \dots, n}$ i coefficienti del polinomio interpolatore $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Utilizzando questa notazione, il problema dell'interpolazione polinomiale (4) è equivalente alla risoluzione del sistema lineare

$$Va=y$$

Poiché si mostra che $\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$, ovvero la matrice V è non singolare (in alcuni testi dicono invertibile), e quindi dal teorema di Rouché-Capelli

- 1 il problema $Va = y$ ha una e una sola soluzione $a^* = (a_0^*, \dots, a_n^*)$;
- 2 dal punto precedente esistono e sono unici gli a_k^* , $k = 0, \dots, n$ che siano coefficienti del polinomio interpolatore; in altri termini, il polinomio interpolatore

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* x^k$$

si può determinare risolvendo il sistema lineare $Va = y$ avente dimensione $(n+1) \times (n+1)$, così da determinare univocamente i coefficienti a_k^* , $k = 0, \dots, n$ del polinomio interpolatore, che altro non sono che le componenti del vettore soluzione a^* .

Esempio

Calcolare il polinomio di grado 2 che assume nei nodi $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ rispettivamente i valori $y_0 = -2$, $y_1 = 11$, $y_2 = 17$.

Dalla definizione, $L_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ e quindi

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{15}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-2))(x-3)}{(1-(-2))(1-3)} = \frac{(x+2)(x-3)}{-6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-2))(x-1)}{(3-(-2))(3-1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{10}$$

I polinomi $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{P}_2$ (e quindi tali le loro combinazioni lineari), e

- $L_0(x_0) = L_0(-2) = 1$, $L_0(x_1) = L_0(1) = 0$, $L_0(x_2) = L_0(3) = 0$;
- $L_1(x_0) = L_1(-2) = 0$, $L_1(x_1) = L_1(1) = 1$, $L_1(x_2) = L_1(3) = 0$;
- $L_2(x_0) = L_2(-2) = 0$, $L_2(x_1) = L_2(1) = 0$, $L_2(x_2) = L_2(3) = 1$.

Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

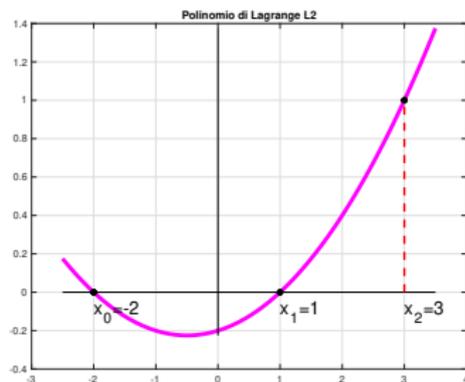
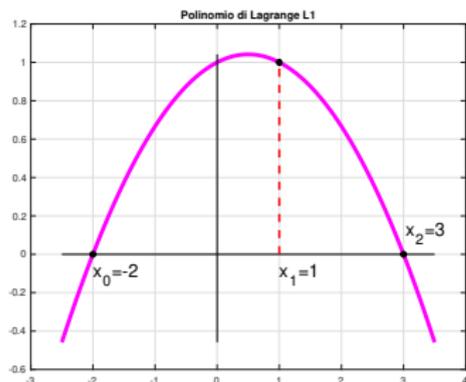
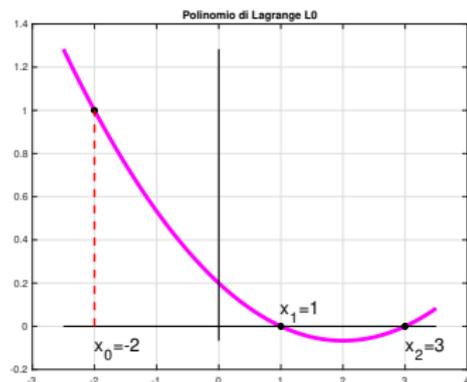


Figura: I polinomi di Lagrange L_0 , L_1 , L_2 relativi ai punti $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Essendo

- $p_2(x) = \sum_{k=0}^2 y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$,
- $y_0 = -2, y_1 = 11, y_2 = 17$

il polinomio interpolatore risulta

$$p_2(x) = -2 L_0(x) + 11 L_1(x) + 17 L_2(x).$$

In effetti è tale che

- $p(x_0) = -2 L_0(x_0) + 11 L_1(x_0) + 17 L_2(x_0) = -2 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 0 = -2$,
- $p(x_1) = -2 L_0(x_1) + 11 L_1(x_1) + 17 L_2(x_1) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 17 \cdot 0 = 11$,
- $p(x_2) = -2 L_0(x_2) + 11 L_1(x_2) + 17 L_2(x_2) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 1 = 17$,

quindi è proprio il polinomio interpolante cercato, visto che assume in

- $x_0 = -2$ il valore $y_0 = -2$,
- $x_1 = 1$ il valore $y_1 = 11$,
- $x_2 = 3$ il valore $y_2 = 17$,

come richiesto.

Nota.

Dal punto di vista pratico, (3) ha alcuni problemi.

Se dopo aver calcolato il polinomio p_N interpolante in $N + 1$ punti

$$(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$$

desideriamo ottenere il polinomio p_{N+1} interpolante in $N + 2$ punti

$$(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N), (x_{N+1}, y_{N+1})$$

la formula (3) è inefficiente poichè bisogna ricalcolare da capo tutti i polinomi di Lagrange.

Fortunatamente, esistono altre maniere di esprimere il polinomio interpolatore, come quella di [Newton](#) (cf. [1, p.138], [5], [7]), che non risentono di questo problema.

Per quanto concerne l'errore compiuto nell'approssimare una funzione f con il polinomio p_n tale che $y_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$ vale il seguente teorema,

Teorema (Errore di interpolazione, Cauchy (1840))

Sia $f \in C^{n+1}([a, b])$ e si supponga che $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ siano $n+1$ a 2 a 2 distinti e che il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ sia tale che

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Allora

$$E_n[f](x) := f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \quad (5)$$

dove $\xi \in I$ con I il più piccolo intervallo aperto contenente x_0, \dots, x_n e il valore x .

Interpolazione polinomiale (dimostrazione facoltativa)

Dimostrazione. (Errore di interpolazione, Cauchy (1840), facoltativa)

Il teorema di Rolle asserisce che se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a, b) , tale che $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui $f'(c) = 0$.

Se $x = x_i$, per qualche i , l'asserto è ovvio.

Altrimenti, sia $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$ e poniamo per $z \in [a, b]$

$$G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x), \quad (6)$$

dove

- $w(z) = \prod_{i=0}^n (z - x_i)$ è un polinomio di grado $n + 1$.
- $Q(x) = E_n[f](x) / w(x)$.

Si noti che in (6) la funzione Q viene valutata in x e non in z .

Osserviamo che essendo $G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x)$, ove

- $E_n[f](z) := f(z) - p_n(z)$.
- $w(z) = \prod_{i=0}^n (z - x_i)$ è un polinomio di grado $n + 1$.
- $Q(x) = E_n[f](x) / w(x)$.

abbiamo

$$G(x) = E_n[f](x) - w(x)Q(x) = E_n[f](x) - w(x)(E_n[f](x) / w(x)) = 0,$$

$$G(x_k) = E_n[f](x_k) - w(x_k)Q(x) = 0 - 0 \cdot Q(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n$$

Dato che

- $f \in C^{n+1}([a, b])$, $p_n \in C^\infty([a, b])$, sicuramente $E_n[f] \in C^{n+1}([a, b])$.
- $w \in C^\infty([a, b])$.
- $Q(x)$ è un numero (si osservi che Q non dipende da z),

deduciamo che $G \in C^{n+1}([a, b])$ e si annulla in $n + 2$ punti.

Interpolazione polinomiale (dimostrazione facoltativa)

Sia $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$ il più piccolo intervallo aperto contenente x, x_0, \dots, x_n . Per il teorema di Rolle [9], visto che G si annulla in $n + 2$ punti, allora

- $G^{(1)}$ si annulla in $n + 1$ punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$,
- $G^{(2)}$ si annulla in n punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$.
- $G^{(k)}$ si annulla in $n + 2 - k$ punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$.
- $G^{(n+1)}$ si annulla in 1 punto ξ di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$.

Indicata con $D^n f$ la derivata n -sima di f , abbiamo

- $D^{n+1} p_n \equiv 0$ (p_n ha grado n),
- $D^{n+1} w \equiv 0$ (w ha grado n).

visto che $Q(x)$ è costante (non dipende da z), $G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x)$,

$$\begin{aligned}G^{(n+1)}(z) &= D^{n+1}E_n[f](z) - Q(x)D^{n+1}w(z) \\ &= D^{n+1}(f(z) - p_n(z)) - Q(x)D^{n+1}w(z) \\ &= f^{(n+1)}(z) - Q(x) \cdot (n+1)!\end{aligned}\tag{7}$$

$$\text{Da } Q(x) = E_n[f](x)/w(x) \quad 0 = G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - Q(x) \cdot (n+1)! = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{E_n[f](x)}{w(x)} \cdot (n+1)!$$

per cui riarrangiando i termini

$$E_n[f](x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{w(x)}{(n+1)!} = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(n+1)!}.$$

Si osservi che è noto che esiste ξ tale che

$$E_n[f](x) := f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!}$$

ma non si sa in generale chi sia. Quindi non si può dire esattamente quanto sia l'errore compiuto.

Noto

$$M = \max_{s \in [a, b]} |f^{(n+1)}(s)|$$

si può **stimare l'errore compiuto**, in quanto per ogni $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= \left| f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \right| = |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} \\ &\leq M \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}. \end{aligned} \tag{8}$$

Visto che

$$|g(x)| \leq M|h(x)|, \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \max_{x \in [a, b]} |g(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} M|h(x)| = M \max_{x \in [a, b]} |h(x)|,$$

ponendo

- $g(x) = f(x) - p_n(x),$
- $h(x) = |\prod_{i=0}^n (x - x_i)| / (n + 1)!$

e visto che

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n + 1)!}. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| &\leq M \max_{x \in [a, b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n + 1)!} \\ &= \frac{M}{(n + 1)!} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \end{aligned}$$

e quindi risulta possibile valutare il massimo errore compiuto.

Esempio

Sia $f(x) = \exp(x)$ e sia p_4 il polinomio che interpola f nei punti equispaziati $x_i = -1 + 2i/4$, $i = 0, \dots, 4$. Stimare l'errore di interpolazione.

- Essendo $f^{(k)}(x) = \exp(x)$, per $k = 0, 1, \dots$ ed $\exp(x)$ una funzione crescente, abbiamo

$$M = \|f^{(5)}\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |\exp(x)| = \exp(1) \approx 2.7183.$$

- Inoltre, come si può vedere dal grafico in figura, $\prod_{i=0}^4 |x - x_i| \leq 0.12$.
- Visto che $5! = 120$, abbiamo che se $E_n[f]$ è il massimo errore compiuto in $[-1, 1]$ nell'approssimare la funzione f con l'interpolante p_4 nei nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0, \dots, 4}$, dal teorema 0.3, fissato $x \in [-1, 1]$

$$|E_4[f](x)| = |f^{(5)}(\xi)| \frac{\prod_{i=0}^4 |(x - x_i)|}{5!} \leq \frac{\exp(1) \cdot 0.12}{120} \approx 0.0027.$$

- L'esperimento numerico in figura mostra che in effetti l'errore è minore di $1.2 \cdot 10^{-3} < 2.7 \cdot 10^{-3}$. Si osservi come il grafico sia tale che $E_4[f]$ si annulla ovviamente nei 5 punti di interpolazione x_i , $i = 0, \dots, 4$.

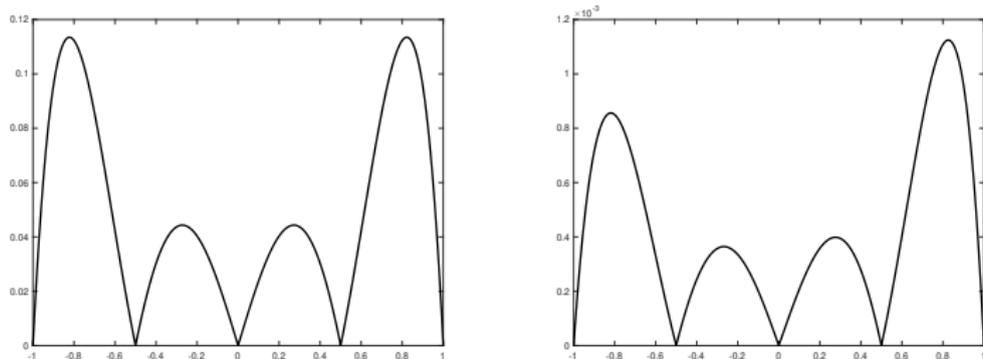


Figura:

A sinistra, il grafico di $\prod_{i=0}^4 |x - x_i|$ dove $x_i = -1 + 2i/4$, $i = 0, \dots, 4$.

A destra, il grafico dell'errore $|E_n[f]|$ in $[-1, 1]$ che evidentemente è sempre minore di $1.2 \cdot 10^{-3}$ e quindi della stima $2.7 \cdot 10^{-3}$. Tale errore è nullo nei punti x_0, \dots, x_4 (punti di interpolazione).

Convergenza dell'interpolazione polinomiale

Relativamente al problema della **scelta dei punti in cui interpolare** la funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, spesso si considerano le seguenti distribuzioni:

- 1 nodi **equispaziati**: fissato n , i punti sono

$$x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n; \quad (10)$$

- 2 nodi di **Chebyshev** (scalati): fissato n , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (11)$$

con

$$t_k = \cos \left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi \right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (12)$$

- 3 nodi di **Chebyshev-Lobatto** (scalati): fissato n , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (13)$$

con

$$t_k = -\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (14)$$

Nota. (Interpretazione geometrica dei punti di Chebyshev-Lobatto)

Il set di $n + 1$ punti di Chebyshev-Lobatto in $[-1, 1]$, utili per l'interpolazione polinomiale a grado n , si ottengono proiettando i punti equispaziati nell'angolo della semicirconferenza $\gamma = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, \pi]\}$ sull'asse delle ascisse.

Nell'esempio,

- i punti in rosso sulla circonferenza sono $(\cos(k\pi/6), \sin(k\pi/6))$ con $k = 0, \dots, 6$,
- i punti in blu sono $(\cos(k\pi/6), 0)$ con $k = 0, \dots, 6$ cioè quelli di (14), a parte l'ordinamento.

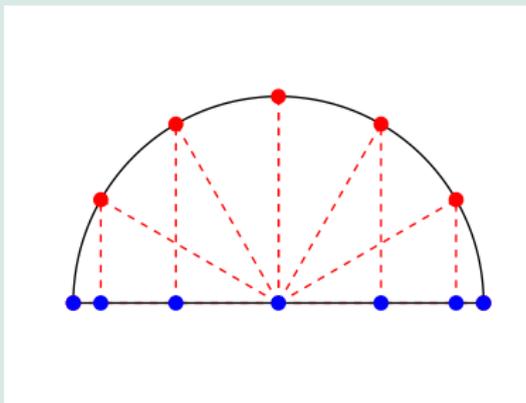


Figura: Interpretazione geometrica dell'insieme dei punti di Chebyshev-Lobatto utili per determinare un'interpolante polinomiale di grado $n = 6$.

Una delle questioni rilevanti è se aumentando il numero di nodi, la successione di polinomi interpolatori p_n converge uniformemente alla funzione f da approssimare, ovvero

$$\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

dove $-\infty < a < b < +\infty$.

Se ciò accade, al crescere di n , il polinomio interpolatore approssima ovunque e arbitrariamente bene la funzione f .

Interpolazione polinomiale

Operativamente, utilizzando la notazione $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$,

- per $n = 1$,

1 si definisce il set di nodi $X_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\}$,

2 si calcola il polinomio p_1 interpolante le coppie

$$(x_0^{(1)}, f(x_0^{(1)})), (x_1^{(1)}, f(x_1^{(1)})),$$

3 si valuta $\|E_1[f]\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_1(x)|$.

- per $n = 2$,

1 si definisce il set di nodi $X_n = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\}$,

2 si calcola il polinomio p_2 interpolante le coppie

$$(x_0^{(1)}, f(x_0^{(1)})), (x_1^{(1)}, f(x_1^{(1)})), (x_2^{(2)}, f(x_2^{(2)})),$$

3 si valuta $\|E_2[f]\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_2(x)|$.

- fissato n generico,

1 si definisce il set di nodi $X_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$,

2 si calcola il polinomio p_n interpolante le coppie

$$(x_0^{(n)}, f(x_0^{(n)})), (x_1^{(n)}, f(x_1^{(n)})), \dots (x_n^{(n)}, f(x_n^{(n)})),$$

3 si valuta $\|E_n[f]\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$.

Quindi si guarda se per $n \rightarrow +\infty$ la sequenza dei massimi errori $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$.

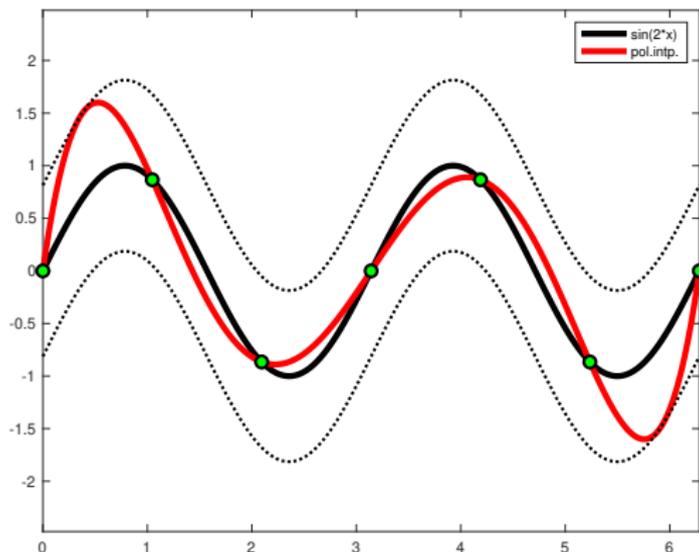


Figura: Grafico che illustra il polinomio p_6 interpolante di grado 6 su 7 nodi equispaziati di $[0, 2\pi]$ della funzione $f(x) = \sin(2x)$, (la funzione ha la linea continua in nero, il polinomio interpolatore è in rosso, in tratteggiato la striscia $f(x) \pm M$ dove $M = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_6(x)|$).

Nota.

Supponiamo che

- $f \in C^\infty([a, b])$;
- $\{x_k\}_{k=0, \dots, n} \subset [a, b]$ a 2 a 2 distinti, ad esempio equispaziati o di tipo Chebyshev.

Da

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{s \in [a, b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a, b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

se $\max_{s \in [a, b]} |f^{(n+1)}(s)|$ è sufficientemente grande per ogni n , allora potrebbe accadere che

$$\max_{s \in [a, b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a, b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

non sia infinitesima per $n \rightarrow +\infty$ e quindi che possa succedere che

$$\|E_n[f]\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)|$$

non converga a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

In generale,

Teorema (Faber (1914))

Per ogni distribuzione di nodi esiste almeno una funzione $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, tale che l'errore di interpolazione $\|E_n[f]\|_\infty$ non converge a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

Per contro

Teorema

Per ogni funzione $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, esiste almeno una distribuzione di nodi tale che $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

e

Teorema (Bernstein (1916))

Per ogni funzione $f \in C^1([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, allora se p_n è l'interpolante di f in $n + 1$ nodi di Chebyshev, $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Esempio

Sia f la funzione di *Runge* (scoperta nel 1901)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]. \quad (15)$$

Si dimostra che il polinomio p_n che interpola f in $n + 1$ nodi equispaziati, **non converge uniformemente a f** (vedasi relativa figura, e le forti differenze tra p_n e f vicino agli estremi $-5, 5$).

Nelle tabelle e figure che seguono, illustriamo il fenomeno di Runge, e di come l'interpolante in nodi equispaziati non converga uniformemente alla funzione di Runge nell'intervallo $[-5, 5]$, nonostante la stessa appartenga a $C^\infty([-5, 5])$.

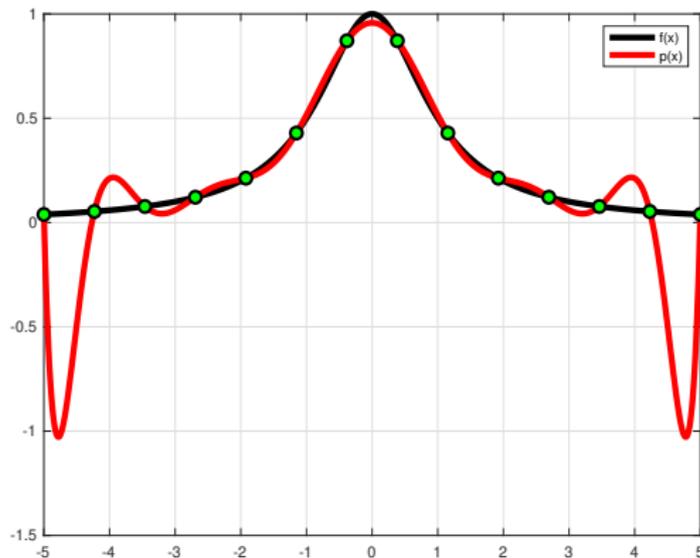


Figura: Grafico che illustra il polinomio interpolante di grado 12 su 13 nodi equispaziati della funzione di Runge, (la funzione ha la linea continua, il polinomio interpolatore è tratteggiato, si osservino le oscillazioni agli estremi).

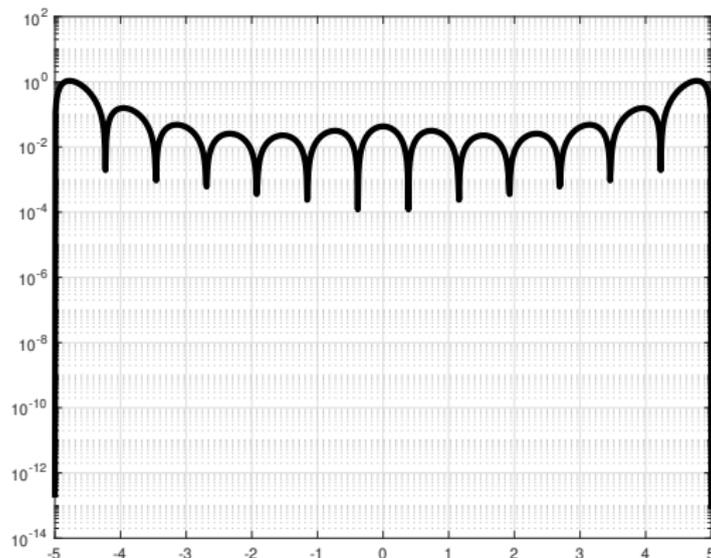


Figura: Grafico che illustra l'errore tra il polinomio p_{12} di grado 12 interpolante su 13 nodi equispaziati la funzione di Runge e la funzione di Runge.

- Fortunatamente ciò non succede in questo caso per i **nodi di Chebyshev**, per cui comunque esistono funzioni continue f ma non di classe C^1 tali che l'interpolante p_n non converge puntualmente a f .
- Nel controesempio di Runge in cui $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, in virtù del teorema di Bernstein, essendo $f \in C^\infty([-5, 5])$ e quindi in particolare $f \in C^1([-5, 5])$, possiamo affermare che se i nodi di interpolazione sono quelli di Chebyshev allora $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$.
- In effetti in tabella successiva, si vede che l'errore in tali set di nodi ha numericamente tale proprietà, differentemente dall'interpolante in nodi equispaziati.

n	E_n^e	E_n^c
1	9.615e - 01	9.615e - 01
2	6.462e - 01	6.462e - 01
3	7.070e - 01	8.289e - 01
4	4.384e - 01	4.600e - 01
5	4.327e - 01	6.386e - 01
6	6.169e - 01	3.112e - 01
7	2.474e - 01	4.596e - 01
8	1.045e + 00	2.047e - 01
9	3.003e - 01	3.191e - 01
10	1.916e + 00	1.322e - 01
20	5.982e + 01	1.774e - 02
30	2.388e + 03	2.426e - 03
40	1.047e + 05	3.399e - 04
50	4.822e + 06	4.622e - 05
60	1.796e + 11	6.381e - 06
70	4.171e + 07	8.755e - 07
80	6.774e + 05	1.196e - 07
90	1.498e + 05	1.648e - 08
100	5.177e + 03	2.256e - 09

Tabella: Grado n ed errore $\|E_n[f]\|_\infty$ con p_n interpolante f risp. in $n + 1$ nodi equispaziati e di Chebyshev (denotato rispettivamente con E_n^e , E_n^c).

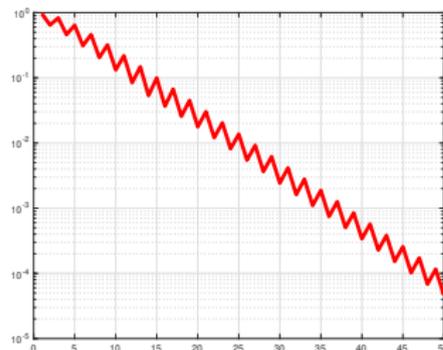
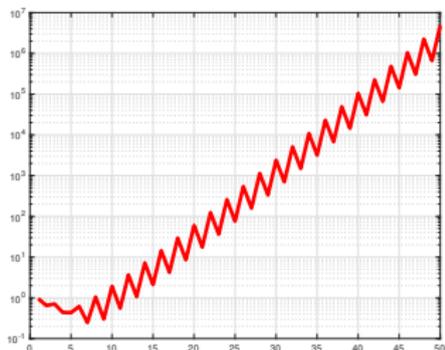


Figura: Grado n ed errore $E_n[f] = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_n(x)|$ con p_n interpolante f rispettivamente in $n + 1$ nodi equispaziati (figura a sinistra) e di Chebyshev (figura a destra), in scala semilogaritmica.

Siano $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.

Si ponga per semplicità di notazione $f_k := f(x_k)$ e si supponga di avere al suo posto dei valori approssimati \tilde{f}_k (ad esempio perché ottenuti approssimando tali quantità con numeri macchina o per noti errori di misura).

Definiamo

- il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola $(x_j, f_j)_{j=0, \dots, n}$;
- il polinomio $\tilde{p}_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola $(x_j, \tilde{f}_j)_{j=0, \dots, n}$.

Si desidera che se è piccola la massima perturbazione sui dati

$$\delta_{\max} = \max_k |f_k - \tilde{f}_k|$$

allora lo sia pure il massimo errore tra i polinomi p_n, \tilde{p}_n ,

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)|.$$

ovvero che i polinomi interpolatori i dati esatti e quelli approssimati non siano troppo distanti tra loro (relativamente alla massima perturbazione sui dati δ_{\max}).

Si mostra che

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|.$$

Il valore

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

é noto come **costante di Lebesgue** dell'insieme di punti x_0, \dots, x_n e quindi

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Osserviamo che

- Λ_n dipende esclusivamente dai polinomi di Lagrange e quindi **dipende esclusivamente dai punti di interpolazione**,
- Λ_n é un **indice di stabilità**, ovvero piú grande e é piú a piccole perturbazioni \tilde{f}_k sugli f_k , $k = 0, \dots, n$ possono corrispondere polinomi interpolatori p_n , \tilde{p}_n molto diversi tra loro (alta sensibilità a perturbazioni sui dati).

Nota. (Facoltativa)

Mostriamo il risultato precedente.

Supponiamo che $f_k \approx \tilde{f}_k$ (per esempio per via dell'arrotondamento si f_k). Generalizzando la disuguaglianza triangolare

$$|\gamma_1 + \gamma_2| \leq |\gamma_1| + |\gamma_2|$$

abbiamo che

$$\left| \sum_k \gamma_k \right| \leq \sum_k |\gamma_k|$$

da cui per $\gamma_k = a_k b_k$, visto che $|a_k b_k| = |a_k| |b_k|$,

$$\left| \sum_k a_k b_k \right| \leq \sum_k |a_k b_k| = \sum_k |a_k| |b_k| \leq \sum_k (\max_k |a_k|) |b_k| = (\max_k |a_k|) \sum_k |b_k|,$$

e posti $a_k = f_k - \tilde{f}_k$, $b_k = L_k(x)$ necessariamente

$$\left| \sum_k (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x) \right| \leq (\max_k |f_k - \tilde{f}_k|) \sum_k |L_k(x)|. \quad (16)$$

Visto che il polinomio

- $\tilde{p}_n \in \mathbb{P}_n$ interpola $(x_j, \tilde{f}_j)_{j=0, \dots, n}$ è $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x)$,
- $p_n \in \mathbb{P}_n$ interpola $(x_j, f_j)_{j=0, \dots, n}$ è $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$.

da

$$\left| \sum_k (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x) \right| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_k |L_k(x)|. \quad (17)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f_k L_k(x) - \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^n (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x) \right| \\ &\leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^n |L_k(x)|, \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| &\leq \max_{x \in [a, b]} \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^n |L_k(x)| \\ &\leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|. \end{aligned}$$

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di $n + 1$ punti nell'intervallo $[-1, 1]$:

- **punti equispaziati**: si dimostra che asintoticamente (Turetskii, 1940)

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en \log(n)};$$

- **punti di Chebyshev**: corrispondono a $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)$ dove $k = 1, \dots, n + 1$; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \left(\log(n+1) + 0.578 + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) \right).$$

Questo ci fa capire, vista la crescita esponenziale dell'uno e quella logaritmica dell'altro, che dal punto della stabilità dell'interpolazione è di gran lunga preferibile interpolare nei punti di Chebyshev.

n	Λ_n^{eq}	Λ_n^{ch}
5	2.208e + 00	1.989e + 00
10	1.785e + 01	2.429e + 00
15	2.832e + 02	2.687e + 00
20	5.890e + 03	2.870e + 00
25	1.379e + 05	3.012e + 00
30	3.448e + 06	3.128e + 00
35	9.001e + 07	3.226e + 00
40	2.422e + 09	3.311e + 00
45	6.665e + 10	3.386e + 00
50	1.868e + 12	3.453e + 00
55	5.518e + 13	3.514e + 00
60	8.354e + 16	3.569e + 00
65	7.507e + 15	3.620e + 00
70	3.292e + 16	3.667e + 00
75	1.339e + 17	3.711e + 00
80	1.286e + 17	3.752e + 00
85	3.831e + 18	3.791e + 00
90	5.980e + 18	3.827e + 00
95	8.922e + 16	3.862e + 00
100	3.790e + 17	3.894e + 00

Tabella: Valore n e costanti di Lebesgue in n punti equispaziati di $[-1, 1]$ e nei punti di Chebyshev $\cos((2k - 1) \cdot \pi / (2 \cdot n))$, $k = 1, \dots, n$. Se ne evince la maggiore stabilità dell'interpolazione nei nodi di Chebyshev.



K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).



V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.



W. Gautschi, *Interpolation before and after Lagrange*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Vol. 70, 4 (2012), pp.347-368.



Wikipedia, Fenomeno di Runge.



Wikipedia, Interpolazione polinomiale.



Wikipedia, Interpolazione di Lagrange



Wikipedia, Newton polynomial.



Wikipedia, Nodi di Chebyshev.



Wikipedia, Teorema di Rolle



Wikipedia, Vandermonde matrix.