

Interpolazione polinomiale ¹

A. Sommariva ²

Keywords: Interpolazione polinomiale, esistenza ed unicità, interpolazione di Lagrange, errore di interpolazione, il problema della convergenza (controesempio di Runge), interpolazione di Chebyshev, stabilità dell'interpolazione.

Revisione: 11 maggio 2021

1. Interpolazione polinomiale

Problema 1.1 (Interpolazione polinomiale). *Siano dati $n + 1$ punti x_0, \dots, x_n a due a due distinti e i valori y_0, \dots, y_n (assunti ad esempio da una funzione $y = f(x)$).*

Il problema dell'interpolazione polinomiale (cf. [1, p.131]) consiste nel calcolare il polinomio p_n di grado n tale che

$$\boxed{p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.} \quad (1)$$

Esempio. Dati 2 punti distinti x_0, x_1 e i valori y_0, y_1 , determinare il polinomio p_1 di grado 1 tale che

$$p_1(x_0) = y_0, \quad p_1(x_1) = y_1 \quad (2)$$

ovvero la retta che *passa* per le coppie $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.

In questa sezione mostreremo che questo polinomio interpolatore p_n esiste ed è unico e come calcolarlo.

Di seguito denoteremo con \mathbb{P}_n l'insieme dei polinomi il cui grado è al più n .

Teorema 1.2 (Unicità del polinomio interpolatore). *Dati $n+1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n e i valori y_0, y_1, \dots, y_n il polinomio p_n di grado al più n tale che*

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

è al più unico.

Dimostrazione 1.3. *La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che esistano due polinomi distinti p_n e q_n di grado al più n tali che*

$$p_n(x_i) = y_i, \quad q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

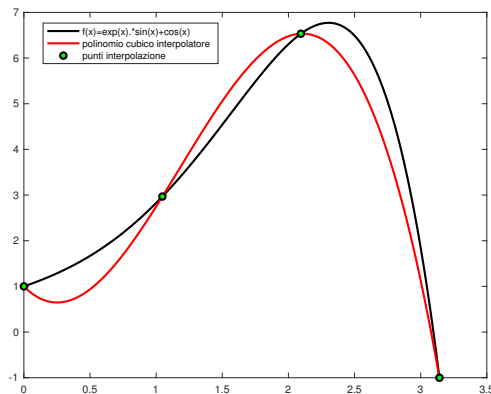


Figura 1: Esempio di interpolazione della funzione $f(x) = \exp(x) \sin(x) + \cos(x)$ mediante un polinomio di grado 3 in 4 punti equispaziati di $[0, \pi]$.

Allora

$$(p_n - q_n)(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

e quindi per un certo $\gamma \neq 0$ si ha che

$$(p_n - q_n)(x) = \gamma \cdot \prod_{k=0}^n (x - x_k) = \gamma \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

è un polinomio di grado $n + 1$, il che è assurdo, visto che la differenza di due polinomi di grado n è un polinomio di grado n .

Per studiare l'esistenza del polinomio interpolatore, [Lagrange](#) (cf. [3], [6]) osservò che il polinomio di grado n

$$L_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (3)$$

è tale che $L_k(x_j) = \delta_{kj}$ dove δ_{kj} è l'operatore di Kronecker, il cui valore è 1 se $k = j$ e 0 altrimenti.

Teorema 1.4 (Esistenza del polinomio interpolatore). Dati $n+1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n e i valori y_0, y_1, \dots, y_n , il polinomio di grado al più n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x) \quad (4)$$

è tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Dimostrazione 1.5. Poichè L_k è un polinomio di grado al più n , lo è certamente lo stesso moltiplicato per lo scalare y_k e la somma di polinomi di grado al più n . Quindi sicuramente $p_n \in \mathbb{P}_n$.

Inoltre p_n interpola i dati visto che

$$p_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k \delta_{k,j} = y_j, \quad j = 0, \dots, n. \quad (5)$$

Quindi p_n è un polinomio interpolatore.

Nota 1.6. 1. Il teorema precedente è costruttivo, in quanto non solo permette di stabilire l'esistenza del polinomio interpolatore, ma ne evidenzia un metodo di calcolo.

2. Si osservi inoltre come ogni termine della sommatoria

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

separa (in qualche senso) il contributo delle ordinate y_k da quello dei polinomi di Lagrange L_k essenzialmente dipendenti dai punti $\{x_j\}_{j=0, \dots, n}$ (si rifletta bene su questa affermazione).

Nota 1.7 (Matrice di Vandermonde). Esistono altre dimostrazioni dell'esistenza e unicità del polinomio interpolatore.

Se $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$ allora le condizioni di interpolazione $p_n(x_j) = y_j$ per $j = 0, \dots, n$ diventano

$$a_0 + a_1x_j + \dots + a_nx_j^n = y_j, \quad j = 0, \dots, n. \quad (6)$$

Posto

- $V = (v_{i,j}) = (x_j^i)$, $0 \leq i, j \leq n$ è la *matrice di Vandermonde* dei nodi di interpolazione;
- $y = (y_0, \dots, y_n)^T$;
- $a = (a_k)_{k=0, \dots, n}$ i coefficienti del polinomio interpolatore $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{k+1}x^k$.

le condizioni (6) sono equivalenti al risolvere il sistema lineare $Va = y$.

Poiché si mostra che $\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$, ovvero V è non singolare, mediante strumenti dell'algebra lineare otteniamo che

- il problema $Va = y$ ha una e una sola soluzione,
- il polinomio interpolatore $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k$ si può determinare risolvendo il sistema lineare $Va = y$, avente dimensione $(n+1) \times (n+1)$.

Esempio. Calcolare il polinomio di grado 2 che assume nei nodi $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ rispettivamente i valori $y_0 = -2$, $y_1 = 11$, $y_2 = 17$.

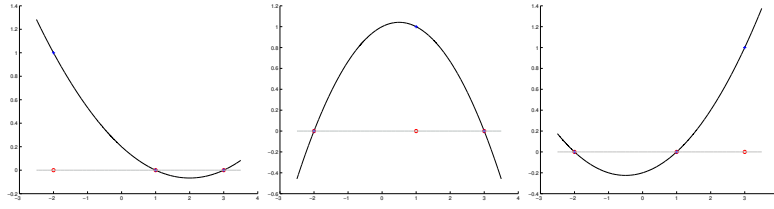


Figura 2: I polinomi di Lagrange L_0, L_1, L_2 relativi ai punti $x_0 = -2, x_1 = 1, x_2 = 3$.

Come si vede dalla definizione,

$$\begin{aligned}
 L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(-2 - 1)(-2 - 3)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{15} \\
 L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-2))(x - 3)}{(1 - (-2))(1 - 3)} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{-6} \\
 L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - (-2))(x - 1)}{(3 - (-2))(3 - 1)} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{10}
 \end{aligned}$$

I polinomi $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{P}_2$ (e quindi tali le loro combinazioni lineari), e

$$\begin{aligned}
 L_0(x_0) &= L_0(-2) = 1, L_0(x_1) = L_0(1) = 0, L_0(x_2) = L_0(3) = 0 \\
 L_1(x_1) &= L_1(1) = 1, L_1(x_0) = L_1(-2) = 0, L_1(x_2) = L_1(3) = 0 \\
 L_2(x_2) &= L_2(3) = 1, L_2(x_0) = L_2(-2) = 0, L_2(x_1) = L_2(1) = 0
 \end{aligned}$$

Inoltre il polinomio interpolatore risulta

$$p_2(x) = -2L_0(x) + 11L_1(x) + 17L_2(x)$$

è tale che

$$p(x_0) = -2L_0(x_0) + 11L_1(x_0) + 17L_2(x_0) = -2 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 0 = -2,$$

$$p(x_1) = -2L_0(x_1) + 11L_1(x_1) + 17L_2(x_1) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 17 \cdot 0 = 11,$$

$$p(x_2) = -2L_0(x_2) + 11L_1(x_2) + 17L_2(x_2) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 1 = 17,$$

e quindi è proprio il polinomio interpolante cercato.

Nota 1.8. Dal punto di vista pratico, (4) ha alcuni problemi.

Se dopo aver calcolato il polinomio p_N interpolante in $N + 1$ punti

$$(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$$

desideriamo ottenere il polinomio p_{N+1} interpolante in $N + 2$ punti

$$(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N), (x_{N+1}, y_{N+1})$$

la formula (4) è inefficiente poiché bisogna ricalcolare da capo tutti i polinomi di Lagrange.

Fortunatamente, esistono altre maniere di esprimere il polinomio interpolatore, come quella di *Newton* (cf. [1, p.138], [5], [7]), che non risentono di questo problema.

Per quanto concerne l'errore compiuto nell'approssimare una funzione f con il polinomio p_n tale che $y_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$ vale il seguente teorema,

Teorema 1.9 (Errore di interpolazione, Cauchy (1840)). *Sia $f \in C^{n+1}([a, b])$ e si supponga che $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ siano a 2 a 2 distinti e che il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ sia tale che*

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Allora

$$E_n[f](x) := f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \quad (7)$$

dove $\xi \in I$ con I il più piccolo intervallo aperto contenente x_0, \dots, x_n e il valore x .

Dimostrazione 1.10 (Errore di interpolazione, Cauchy (1840), facoltativa). *Il teorema di Rolle asserisce che se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a, b) , tale che $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui $f'(c) = 0$.*

Se $x = x_i$, per qualche i , l'asserto è ovvio.

Altrimenti, sia $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$ e poniamo per $z \in [a, b]$

$$\boxed{G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x)}, \quad (8)$$

dove

- $w(z) = \prod_{i=0}^n (z - x_i)$ è un polinomio di grado $n + 1$,
- $Q(x) = E_n[f](x)/w(x)$.

Si noti che in (8) la funzione Q viene valutata in x e non in z .

Osserviamo che essendo $G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x)$, ove

- $E_n[f](z) := f(z) - p_n(z)$,
- $w(z) = \prod_{i=0}^n (z - x_i)$ è un polinomio di grado $n + 1$,
- $Q(x) = E_n[f](x)/w(x)$.

abbiamo

$$G(x) = E_n[f](x) - w(x)Q(x) = E_n[f](x) - w(x)(E_n[f](x)/w(x)) = 0,$$

$$G(x_k) = E_n[f](x_k) - w(x_k)Q(x) = 0 - 0 \cdot Q(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n$$

Dato che

- $f \in C^{n+1}([a, b])$, $p_n \in C^\infty([a, b])$, sicuramente $E_n[f] \in C^{n+1}([a, b])$,
- $w \in C^\infty([a, b])$,
- $Q(x)$ è un numero (si osservi che Q non dipende da z),

deduciamo che $G \in C^{n+1}([a, b])$ e si annulla in $n + 2$ punti.

Sia $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$ il più piccolo intervallo aperto contenente x, x_0, \dots, x_n . Per il teorema di Rolle [9], visto che G si annulla in $n + 2$ punti, allora

- $G^{(1)}$ si annulla in $n + 1$ punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$,
- $G^{(2)}$ si annulla in n punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$,
- $G^{(k)}$ si annulla in $n + 2 - k$ punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$,
- $G^{(n+1)}$ si annulla in 1 punto ξ di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$.

Indicata con $D^n f$ la derivata n -sima di f , abbiamo

- $D^{n+1}p_n \equiv 0$ (p_n ha grado n),
- $D^{n+1}w \equiv 0$ (w ha grado n),

visto che $Q(x)$ è costante (non dipende da z), $G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x)$,

$$\begin{aligned} G^{(n+1)}(z) &= D^{n+1}E_n[f](z) - Q(x)D^{n+1}w(z) \\ &= D^{n+1}(f(z) - p_n(z)) - Q(x)D^{n+1}w(z) \\ &= f^{(n+1)}(z) - Q(x) \cdot (n + 1)! \end{aligned} \quad (9)$$

Da $Q(x) = E_n[f](x)/w(x)$

$$0 = G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - Q(x) \cdot (n + 1)! = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{E_n[f](x)}{w(x)} \cdot (n + 1)!$$

per cui riarrangiando i termini

$$E_n[f](x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{w(x)}{(n + 1)!} = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n + 1)!}.$$

Nota 1.11. Si osservi che è noto che esiste ξ ma non si sa dire in generale chi sia. Quindi non si può dire esattamente quanto sia l'errore compiuto.

Se è nota $M = \max_{s \in [a, b]} |f^{(n+1)}(s)|$ è comunque possibile stimare l'errore compiuto, in quanto

$$\begin{aligned} |E_n[f](x)| &= |f(x) - p_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n + 1)!} \right| \\ &\leq |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n + 1)!} = M \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n + 1)!}. \end{aligned} \quad (10)$$

Una conseguenza, visto che se per ogni $x \in [a, b]$ si ha che $|g(x)| \leq M|h(x)|$, $M \geq 0$, necessariamente $\max_{x \in [a, b]} |g(x)| \leq M \max_{x \in [a, b]} |h(x)|$ è che per $g(x) = f(x) - p_n(x)$, $h(x) = \frac{|\prod_{i=0}^n (x-x_i)|}{(n+1)!}$

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq M \max_{x \in [a, b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x-x_i)|}{(n+1)!}.$$

e quindi risulta possibile valutare il massimo errore compiuto.

Esempio. Sia $f(x) = \exp(x)$ sia p_4 il polinomio che la interpola nei punti equispaziati $x_i = -1 + 2i/4$, $i = 0, \dots, 4$. Stimare l'errore di interpolazione.

Essendo $f^{(k)}(x) = \exp(x)$, per $k = 0, 1, \dots$ ed $\exp(x)$ una funzione crescente, abbiamo

$$M = \|f^{(5)}\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |\exp(x)| = \exp(1) \approx 2.7183.$$

Inoltre, come si può vedere dal grafico in figura, $\prod_{i=0}^4 |x - x_i| \leq 0.12$. Visto che $5! = 120$, abbiamo che se $E_n[f]$ è il massimo errore compiuto in $[-1, 1]$ nell'approssimare la funzione f con l'interpolante p_4 nei nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0, \dots, 4}$, dal teorema 1.9, fissato $x \in [-1, 1]$

$$|E_4[f](x)| = |f^{(5)}(\xi)| \frac{\prod_{i=0}^4 |x - x_i|}{(n+1)!} \leq \frac{\exp(1) \cdot 0.12}{120} \approx 0.0027.$$

L'esperimento numerico in figura mostra che in effetti l'errore è minore di $1.2 \cdot 10^{-3} < 2.7 \cdot 10^{-3}$. Si osservi come il grafico sia tale che $E_4[f]$ si annulla ovviamente nei 5 punti di interpolazione x_i , $i = 0, \dots, 4$.

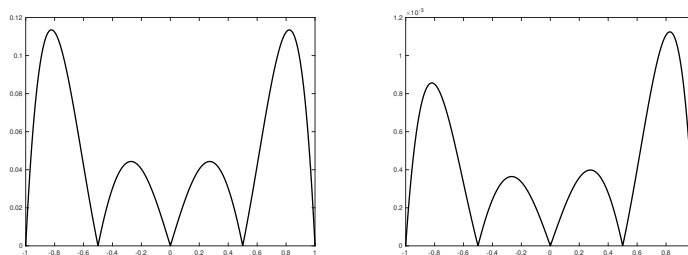


Figura 3: A sinistra, il grafico di $\prod_{i=0}^4 |x - x_i|$ dove $x_i = -1 + 2i/4$, $i = 0, \dots, 4$. A destra, il grafico dell'errore $|E_n[f]|$ in $[-1, 1]$ che evidentemente è sempre minore di $2.7 \cdot 10^{-3}$. Tale errore è nullo nei punti x_0, \dots, x_4 .

Un serio problema riguarda la **scelta dei punti in cui interpolare** la funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mostriamo alcuni casi notevoli.

1. nodi equispaziati: fissato n , i punti sono

$$x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n; \quad (11)$$

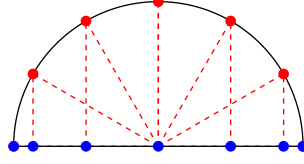


Figura 4: Interpretazione geometrica dell'insieme dei punti di Chebyshev-Lobatto utili per determinare un'interpolante polinomiale di grado $n = 6$.

2. nodi di **Chebyshev** (scalati): fissato n , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (12)$$

con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (13)$$

3. nodi di **Chebyshev-Lobatto** (scalati): fissato n , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (14)$$

con

$$t_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (15)$$

Nota 1.12. *Il set di $n+1$ punti di Chebyshev-Lobatto in $[-1, 1]$, utili per l'interpolazione polinomiale a grado n , si ottengono proiettando i punti equispaziati nell'angolo della semicirconferenza $\gamma = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, \pi]\}$ sull'asse delle ascisse. Nell'esempio, i punti in rosso sulla circonferenza sono $(\cos(k\pi/6), \sin(k\pi/6))$ con $k = 0, \dots, 6$, mentre quelli in blu sono $(\cos(k\pi/6), 0)$ con $k = 0, \dots, 6$.*

Una delle questioni rilevanti è se aumentando il numero di nodi, la successione di polinomi interpolatori p_n **converge uniformemente** alla funzione f da approssimare, ovvero

$$\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

dove $-\infty < a < b < +\infty$.

Siano $\{x_k\}_{k=0, \dots, n} \subset [a, b]$ a 2 a 2 distinti, $f \in C^\infty([a, b])$. Dalla stima dell'errore di interpolazione, per $\xi \in (a, b)$,

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} \\ &\leq \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (16)$$

e quindi

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

Da

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

se $\max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)|$ è sufficientemente grande per ogni n , allora potrebbe accadere che

$$\max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

non sia infinitesima per $n \rightarrow +\infty$ e quindi che *possa* succedere che

$$\|E_n[f]\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$$

non converga a 0.

In generale,

Teorema 1.13 (Teorema di Faber (1914)). *Per ogni distribuzione di nodi esiste almeno una funzione $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, tale che l'errore di interpolazione $\|E_n[f]\|_\infty$ non converge a 0 per $n \rightarrow +\infty$.*

Per contro

Teorema 1.14. *Per ogni funzione $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, esiste almeno una distribuzione di nodi tale che $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.*

e

Teorema 1.15 (Teorema di Bernstein). *Per ogni funzione $f \in C^1([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, allora se p_n è l'interpolante di f in $n+1$ nodi di Chebyshev, $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.*

Esempio. Sia f la funzione di [Runge](#) (scoperta nel 1901)

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].} \tag{17}$$

Si dimostra che il polinomio p_n che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati, non converge uniformemente a f (vedasi relativa figura, e le forti differenze tra p_n e f vicino agli estremi $-5, 5$).

Nelle tabelle e figure che seguono, illustriamo il fenomeno di Runge, e di come l'interpolante in nodi equispaziati non converga uniformemente alla funzione di Runge nell'intervallo $[-5, 5]$, nonostante la stessa appartenga a $C^\infty([-5, 5])$.

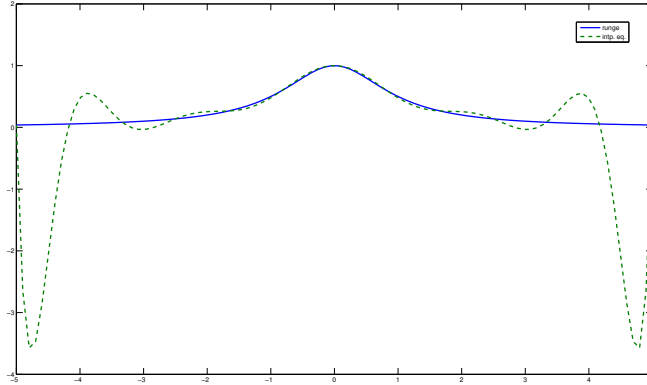


Figura 5: Grafico che illustra il polinomio interpolante di grado 12 su 13 nodi equispaziati della funzione di Runge, (la funzione ha la linea continua, il polinomio interpolatore è tratteggiato, si osservino le oscillazioni agli estremi).

Fortunatamente ciò non succede in questo caso per i nodi di Chebyshev, per cui comunque esistono funzioni continue f ma non di classe C^1 tali che l'interpolante p_n non converge puntualmente a f .

Nel controesempio di Runge in cui $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, in virtù del teorema di Bernstein, essendo $f \in C^\infty([-5, 5])$ e quindi in particolare $f \in C^1([-5, 5])$, possiamo affermare che se i nodi di interpolazione sono quelli di Chebyshev allora $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$.

In effetti in tabella, si vede che l'errore in tali set di nodi ha numericamente tale proprietà, diversamente dall'interpolante in nodi equispaziati.

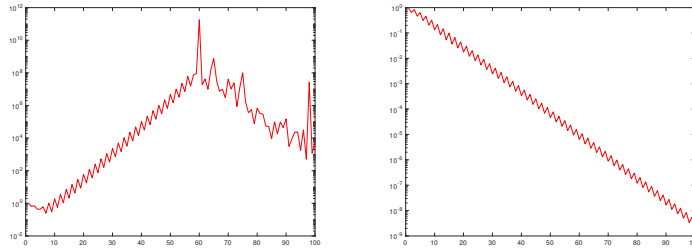


Figura 6: Grado n ed errore $E_n[f] = \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - p_n(x)|$ con p_n interpolante f rispettivamente in $n + 1$ nodi equispaziati (figura a sinistra) e di Chebyshev (figura a destra), in scala semilogaritmica.

Sia $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ (per $k = 0, \dots, n$, x_k a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione $f_k := f(x_k)$.

n	E_n^e	E_n^c
1	9.615e - 01	9.615e - 01
2	6.462e - 01	6.462e - 01
3	7.070e - 01	8.289e - 01
4	4.384e - 01	4.600e - 01
5	4.327e - 01	6.386e - 01
6	6.169e - 01	3.112e - 01
7	2.474e - 01	4.596e - 01
8	1.045e + 00	2.047e - 01
9	3.003e - 01	3.191e - 01
10	1.916e + 00	1.322e - 01
20	5.982e + 01	1.774e - 02
30	2.388e + 03	2.426e - 03
40	1.047e + 05	3.399e - 04
50	4.822e + 06	4.622e - 05
60	1.796e + 11	6.381e - 06
70	4.171e + 07	8.755e - 07
80	6.774e + 05	1.196e - 07
90	1.498e + 05	1.648e - 08
100	5.177e + 03	2.256e - 09

Tabella 1: Grado n ed errore $\|E_n[f]\|_\infty$ con p_n interpolante f risp. in $n + 1$ nodi equispaziati e di Chebyshev (denotato rispettivamente con E_n^e, E_n^c).

Come è noto, indicato con L_k il k -simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$$

con

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}.$$

Supponiamo che i valori di f_k siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con \tilde{f}_k . Quindi

- il polinomio $\tilde{p}_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola le coppie $(x_j, \tilde{f}_j)_{j=0, \dots, n}$ è $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x)$.
- il polinomio $\tilde{p}_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola le coppie $(x_j, f_j)_{j=0, \dots, n}$ è $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$

da $|\sum_k a_k b_k| \leq \sum_k |a_k| |b_k| \leq (\max_k a_k) \sum_k |b_k|$, per $a_k = f_k - \tilde{f}_k, b_k = L_k(x)$,

$$\begin{aligned} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f_k L_k(x) - \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^n (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |f_k - \tilde{f}_k| |L_k(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^n |L_k(x)| \end{aligned}$$

e che se $C > 0$,

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|, x \in [a, b] \Rightarrow \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} C \cdot |g(x)| = C \cdot \max_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

per cui per $f(x) = p_n(x) - \tilde{p}_n(x)$, $C = \max_k |f_k - \tilde{f}_k|$, $g(x) = \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$,

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|.$$

Il valore

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

è noto come costante di Lebesgue e da

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

ricaviamo

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Osserviamo che il numero Λ_n dipende esclusivamente dai polinomi di Lagrange e quindi esclusivamente dai punti di interpolazione.

Il valore Λ_n è nota come **costante di Lebesgue** (1910) dell'insieme di punti x_0, \dots, x_n . Si vede immediatamente che è un indice di stabilità dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [2, p.139-140]).

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di $n + 1$ punti nell'intervallo $[-1, 1]$:

- punti equispaziati: si dimostra che asintoticamente (Turetskii, 1940)

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en \log(n)};$$

- punti di Chebyshev: corrispondono a $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)$ dove $k = 1, \dots, n + 1$; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) \right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

dove $\gamma \approx 0.577$ è la *costante di Eulero-Mascheroni*;

n	Λ_n^{eq}	Λ_n^{ch}
5	2.208e + 00	1.989e + 00
10	1.785e + 01	2.429e + 00
15	2.832e + 02	2.687e + 00
20	5.890e + 03	2.870e + 00
25	1.379e + 05	3.012e + 00
30	3.448e + 06	3.128e + 00
35	9.001e + 07	3.226e + 00
40	2.422e + 09	3.311e + 00
45	6.665e + 10	3.386e + 00
50	1.868e + 12	3.453e + 00
55	5.518e + 13	3.514e + 00
60	8.354e + 16	3.569e + 00
65	7.507e + 15	3.620e + 00
70	3.292e + 16	3.667e + 00
75	1.339e + 17	3.711e + 00
80	1.286e + 17	3.752e + 00
85	3.831e + 18	3.791e + 00
90	5.980e + 18	3.827e + 00
95	8.922e + 16	3.862e + 00
100	3.790e + 17	3.894e + 00

Tabella 2: Valore n e costanti di Lebesgue in n punti equispaziati di $[-1, 1]$ e nei punti di Chebyshev $\cos((2k - 1) \cdot \pi / (2 \cdot n))$, $k = 1, \dots, n$. Se ne vince la maggiore stabilità dell'interpolazione nei nodi di Chebyshev.

2. Bibliografia.

- [1] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
- [2] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- [3] W. Gautschi, *Interpolation before and after Lagrange*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Vol. 70, 4 (2012), pp.347–368.
- [4] [Wikipedia, Fenomeno di Runge.](#)
- [5] [Wikipedia, Interpolazione polinomiale.](#)
- [6] [Wikipedia, Interpolazione di Lagrange](#)
- [7] [Wikipedia, Newton polynomial.](#)
- [8] [Wikipedia, Nodi di Chebyshev.](#)
- [9] [Wikipedia, Teorema di Rolle](#)
- [10] [Wikipedia, Vandermonde matrix.](#)