

# Approssimazione polinomiale

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

28 aprile 2025

### Problema.

Siano date

- le ascisse  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ ;
  - le ordinate  $y_1, \dots, y_N$ .
- 1 Nel caso dell'interpolazione polinomiale si è cercato un polinomio  $p_m$  di grado  $m = N - 1$ , tale che  $p_m(x_k) = y_k$  per  $k = 1, \dots, N$ .
  - 2 Nel caso cerchiamo di approssimare questi dati con un polinomio di grado strettamente inferiore a  $m$ , cosa risulta meglio fare?

### Esempio

Date le ascisse

$$x_1 = 0, x_2 = h, x_3 = 2h, \dots, x_{20} = 2\pi, \quad \text{con } h = \frac{2\pi}{19}$$

e i valori  $y_k = \sin(x_k)$  con  $k = 1, \dots, 20$ , cercare il polinomio di grado 3 che meglio approssima (in qualche senso da definire, che diremo poi ai minimi quadrati) i dati.

Si noti che nell'esempio, il grado è 4 e i punti non sono 5 come nell'interpolazione polinomiale bensì 20 ed è quindi improbabile soddisfare tutti i vincoli richiesti.

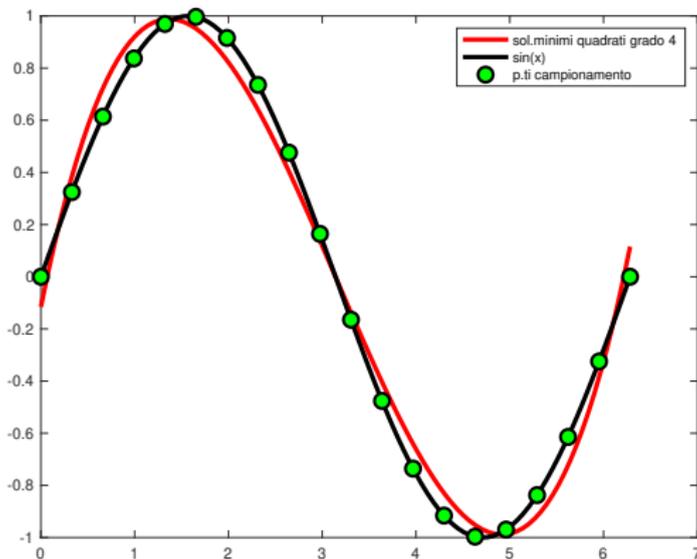


Figura: In nero il grafico di  $f(x) = \sin(x)$ , in rosso un polinomio approssimante (in qualche senso ancora da definire, che sarà detto in seguito ai minimi quadrati) di grado  $m = 4$ , in verde le coppie  $(x_k, y_k)$ , con  $y_k = f(x_k)$  per  $k = 1, \dots, 20$ .

## (Motivazione)

Dato un campionamento  $\{(x_i, y_i)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , dove  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ , nell'approssimazione ai **minimi quadrati** si cerca inizialmente un polinomio

$$\mathcal{L}_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_m x^m$$

di grado  $m < N$ , in cui tipicamente  $m \ll N$ , per cui i coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_m$  risolvano

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_m \cdot x_1^m = y_1 \\ a_0 + a_1 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_2^m = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1 \cdot x_N + \dots + a_m \cdot x_N^m = y_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_m \cdot x_1^m - y_1 = 0 \\ a_0 + a_1 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_2^m - y_2 = 0 \\ \dots \\ a_0 + a_1 \cdot x_N + \dots + a_m \cdot x_N^m - y_N = 0 \end{cases}$$

Tale problema sovradeterminato (più equazioni che incognite) può non avere soluzione. Si nota

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_m \cdot x_1^m - y_1 = 0 \\ a_0 + a_1 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_2^m - y_2 = 0 \\ \dots \\ a_0 + a_1 \cdot x_N + \dots + a_m \cdot x_N^m - y_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_m \cdot x_1^m - y_1)^2 = 0 \\ (a_0 + a_1 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_2^m - y_2)^2 = 0 \\ \dots \\ (a_0 + a_1 \cdot x_N + \dots + a_m \cdot x_N^m - y_N)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_m \cdot x_1^m - y_1)^2 + \dots + (a_0 + a_1 \cdot x_N + \dots + a_m \cdot x_N^m - y_N)^2 = 0$$

Così si cercano i coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_m$  per cui sia minima (ovvero più vicina a 0)

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \mathcal{L}_m(x_i))^2 = (a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_m \cdot x_1^m - y_1)^2 + \dots + (a_0 + a_1 \cdot x_N + \dots + a_m \cdot x_N^m - y_N)^2.$$

Quindi,

- dato un campionamento  $\{(x_i, y_i)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , dove  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ ,
- ricordato che se  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  allora  $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}$ ,

nell'approssimazione ai **minimi quadrati** si cerca un polinomio  $\mathcal{L}_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$  di grado  $m < N$ , in cui tipicamente  $m \ll N$ , tale che sia minima

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \mathcal{L}_m(x_i))^2$$

o equivalentemente, posto  $\mathbf{y} = (y_i)_i$ , quando lo é

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - (\mathcal{L}_m(x_i))_{i=1, \dots, N}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \mathcal{L}_m(x_i))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m))^2} \end{aligned}$$

ovvero che risolve il problema di ottimizzazione in  $m + 1$  variabili  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_m)$

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m+1}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m))^2}. \quad (1)$$

## Teorema (Esistenza ed unicità)

- 1 Se  $\{x_k\}_{k=1,\dots,N}$  sono punti a 2 a 2 distinti, allora l'approssimante ai minimi quadrati di grado  $m < N$  delle coppie  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1,\dots,N}$  esiste ed è unica.
- 2 Il polinomio  $\mathcal{L}_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k^* x^k$  è soluzione ai minimi quadrati se e solo se, posto  $\mathbf{y} = (y_j)$ , il vettore  $\mathbf{a} = (a_i^*)$  **risolve** il sistema delle **equazioni normali**

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{a} = \mathbf{V}^T \mathbf{y}$$

dove  $V$  è la matrice di Vandermonde rettangolare di dimensione  $N \times (m + 1)$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{N-1} & x_{N-1}^2 & \dots & x_{N-1}^m \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^m \end{bmatrix}$$

## Nota.

- La matrice  $V^T$  è la trasposta della matrice  $V$  ovvero  $(V^T)_{i,j} = V_{j,i}$ .
- Si noti che  $V^T V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $V^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , ovvero il sistema delle equazioni normali è di piccole dimensioni visto che tipicamente  $m \ll N$ .

## Dimostrazione. (Facoltativa)

Sia  $V$  la matrice di Vandermonde rettangolare di dimensione  $N \times (m + 1)$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{N-1} & x_{N-1}^2 & \dots & x_{N-1}^m \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^m \end{bmatrix}$$

- Si mostra che  $V^T V \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$  è *simmetrica e definita positiva* (e quindi *non singolare* poiché tutti gli autovalori  $\lambda_i > 0$  e quindi  $\det(V^T V) = \prod_{i=1}^{m+1} \lambda_i > 0$ ).
- si vede che il polinomio  $\mathcal{L}_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k^* x^k$  è soluzione ai minimi quadrati se e solo se il vettore  $\mathbf{a} = (a_i^*)$  *risolve* il sistema delle *equazioni normali*

$$V^T V \mathbf{a} = V^T \mathbf{y}$$

per  $\mathbf{y} = (y_i)$ , ed essendo  $V^T V$  non singolare, necessariamente la soluzione  $\mathbf{a}$  è unica.

## Teorema (Minimi quadrati qualora $m = N - 1$ )

Nelle ipotesi fissate, se  $m = N - 1$  allora la soluzione del problema ai minimi quadrati coincide col polinomio interpolatore le coppie  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ .

## Traccia. (Facoltativo)

Si osservi che per  $m = N - 1$ ,

- la soluzione ai minimi quadrati  $\mathcal{L}_m(x) = a_0^* + a_1^* x_i + \dots + a_m^* x_i^m$  è la soluzione del problema

$$0 \leq \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m+1}} \sum_{i=1}^N (y_i - (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m))^2; \quad (2)$$

- essendo  $m = N - 1$  possiamo determinare il polinomio interpolatore  $p_m(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x_i + \dots + \bar{a}_m x_i^m$  e visto che è tale che  $p_m(x) = y_i$  per  $i = 1, \dots, N$  necessariamente

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x_i + \dots + \bar{a}_m x_i^m = y_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^N (y_i - (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x_i + \dots + \bar{a}_m x_i^m))^2 = \sum_{i=1}^N 0^2 = 0.$$

Di conseguenza, da (2), per  $m = N - 1$  si ha che la soluzione ai minimi quadrati  $\mathcal{L}_m(x)$  coincide col polinomio  $p_m$  di grado  $m$  che interpola le coppie  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, N}$ .

### Nota. (Storica)

- *Inizialmente la scoperta venne attribuita a Legendre nel 1805 che la pubblicò in *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, ed era pubblicata in molti manuali già nel 1870.*
- *Gauss, sostenne di aver sviluppato quel metodo già prima di Legendre, nel 1795. Tale discussione portò ad una aspra disputa tra i due noti matematici.*
- *In seguito, unendo tali concetti a questioni probabilistiche, Gauss permise di migliorare il calcolo delle orbite celesti.*
- *D'altra parte già nel 1801 fu in grado di predire (dopo 100 ore di calcoli!) la complicata orbita dell'asteroide Ceres, di cui aveva solo 22 osservazioni dell'astronomo italiano Piazzi (cf. [Gauss and Ceres](#)). L'orbita predetta da Gauss era particolarmente diversa da quella suggerita da altri astronomi ma si rivelò esatta, rendendolo apprezzato anche al di fuori della matematica.*

### Proposito. (Curve fitting e dati inesatti)

- Forniti i dati  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , lo scopo del **curve fitting** degli scopi è quello di determinare una funzione  $f \in \mathcal{F}$ , con  $\mathcal{F}$  fissato, tale che  $f$  meglio approssimi i dati  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$  in qualche senso da definire.

**Esempio:** posta  $\mathcal{F} = \{f : f(x) = a + b \exp(c \cdot x), a, b, c \in \mathbb{R}\}$ , determinare  $a, b, c$  tali che  $f(x) = a + b \exp(c \cdot x)$  meglio approssimi i dati  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$  in qualche senso da definire.

- In questa sezione consideriamo il caso in cui  $\mathcal{F} = \mathbb{P}_m$ , ovvero i polinomi di grado al più  $m$ , e determiniamo una funzione  $f \in \mathbb{P}_m$ , tale che  $f$  meglio approssimi i dati nel senso dei minimi quadrati.
- Nelle scienze applicate capita frequentemente che gli esperimenti producano set di dati  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$  dove le ascisse sono distinte.  
*In particolare spesso i valori  $y_i$  sono inesatti, ad esempio per errori di misura o approssimazione. Il curve fitting permette in qualche senso di evidenziare una curva, tra un insieme di potenziali candidate, che meglio li approssima, **filtrando il rumore**.*

## Definizione (Regressione lineare)

Se  $\mathcal{F} = \mathbb{P}_1$ , ovvero calcoliamo la soluzione ai minimi quadrati  $\mathcal{L}_1$ , si parla di *regressione lineare*.

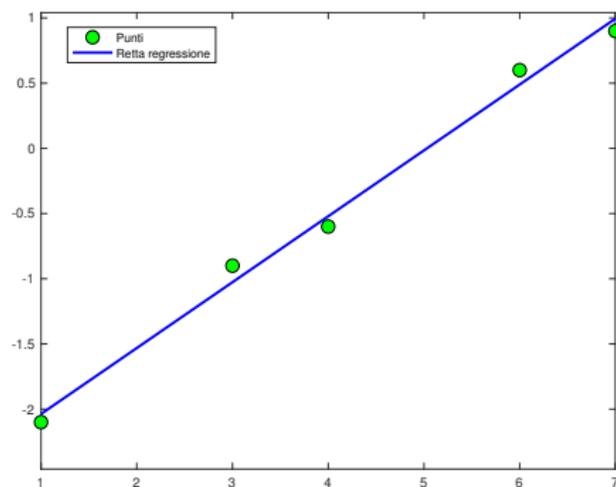
## Esempio

Si considerino i dati della seguente tabella

|       |      |      |      |     |     |
|-------|------|------|------|-----|-----|
| $x_i$ | 1    | 3    | 4    | 6   | 7   |
| $y_i$ | -2.1 | -0.9 | -0.6 | 0.6 | 0.9 |

Si disegni il grafico della soluzione al problema di regressione lineare.

I risultati sono evidenziati in figura, dove la retta di regressione è quella che **meglio** approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.



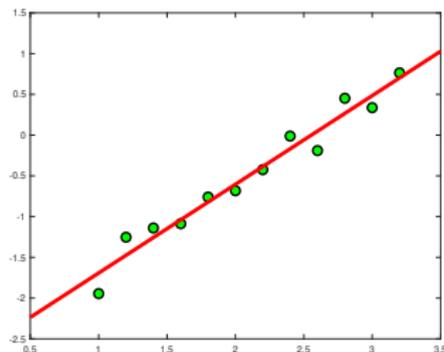
**Figura:** Dati e retta di regressione lineare. In questo esempio la soluzione risulta  $p_1(x) = 0.505263157894737 \cdot x - 2.542105263157894$ .

## Esempio

Data la tabella

|     |        |     |        |
|-----|--------|-----|--------|
| 1.0 | -1.945 | 2.2 | -0.424 |
| 1.2 | -1.253 | 2.4 | -0.012 |
| 1.4 | -1.140 | 2.6 | -0.190 |
| 1.6 | -1.087 | 2.8 | +0.452 |
| 1.8 | -0.760 | 3.0 | +0.337 |
| 2.0 | -0.682 | 3.2 | +0.764 |

calcolare la retta che approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.



**Figura:** In verde i dati di campionamento, in rosso l'approssimante ai minimi quadrati di grado  $m = 1$  (retta che meglio approssima i punti nel senso dei minimi quadrati).

### Nota.

Negli esempi precedenti ovviamente *non esiste una retta che interpola tutti i punti*, visto che geometricamente non giacciono su una retta. Valutiamo quanto succede nell'ultimo esempio.

Se una tale retta esistesse, allora detta  $y = a_0 + a_1x$  la soluzione al problema ai minimi quadrati, avremmo che per ogni coppia  $(x_k, y_k)$  della tabella sarebbe  $a_0 + a_1x_k = y_k$ ,  $k = 1, \dots, 12$  ovvero che sarebbe risolvibile il sistema in  $N = 2$  incognite e  $m = 12$  equazioni

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 1 = -1.945 \\ a_0 + a_1 \cdot 1.2 = -1.253 \\ a_0 + a_1 \cdot 1.4 = -1.140 \\ \dots \\ a_0 + a_1 \cdot 3.0 = +0.337 \\ a_0 + a_1 \cdot 3.2 = +0.764 \end{cases}$$

mentre purtroppo si verifica facilmente che non ne ha (basta prendere le prime 3 equazioni e notare che non hanno una soluzione comune).

Ciò nonostante esiste la retta di miglior approssimazione ai minimi quadrati, ovvero il grafico delle coppie  $(x, \mathcal{L}_1(x))$ , con  $\mathcal{L}_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x$  minimizzante

$$\sqrt{(a_0 + a_1 \cdot 1 - (-1.945))^2 + (a_0 + a_1 \cdot 1.2 - (-1.253))^2 + \dots + (a_0 + a_1 \cdot 3.2 - 0.764)^2}$$

Si calcola numericamente che

$$\mathcal{L}_1(x) \approx -2.780034965034965 + 1.088111888111888 \cdot x.$$

In alcuni problemi, i dati sono soggetti a rumore e uno vuole in qualche senso **togliere il rumore**.

### Esempio

Consideriamo quali dati  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, 40}$  in cui

- $x_i = -1 + (i - 1) \cdot \frac{2}{39} \in [-1, 1]$ ,
- $y_i = \sin(10 \cdot x_i) + 10^{-3} \mu_i$

dove  $\mu_i$  è un numero random in  $[-0.5, 0.5]$ .

Determinare il polinomio di miglior approssimazione per  $m = 5, 10, 15, 30$  e vedere come approssima  $f^*(x) = \sin(10 \cdot x)$ .

In qualche modo simuliamo dei dati  $y_i^* = \sin(x_i)$  cui abbiamo aggiunto il rumore  $10^{-3} \mu_i$ .

- L'intento è approssimare la funzione  $f^*(x) = \sin(10x)$  **togliendo** il rumore.
- **Non ha senso calcolare l'interpolante polinomiale**, perché si riprodurrebbero i rumori e non la funzione cercata.

In figura, mostriamo i risultati ottenuti utilizzando le approssimanti  $\mathcal{L}_m$  ai minimi quadrati di grado rispettivamente  $m = 5, m = 10, m = 15, m = 30$ .

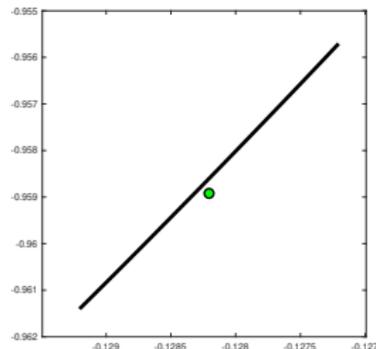
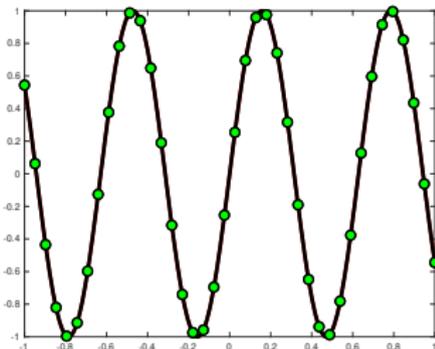


Figura: Figura a sinistra. Funzione  $f^*(x) = \sin(10 \cdot x)$  e i campionamenti inesatti.

Figura a destra. Funzione  $f^*(x) = \sin(10 \cdot x)$  in un intorno di  $x = -0.128$  e dato inesatto.

Le pendenze non coincidono per la grafica di Matlab.

# Approssimazione polinomiale e dati inesatti

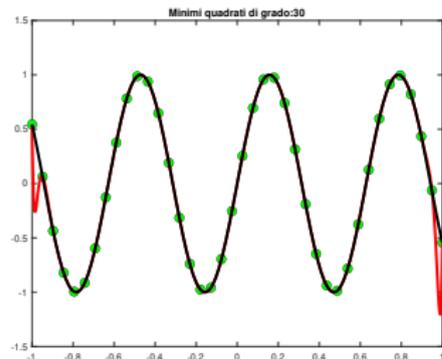
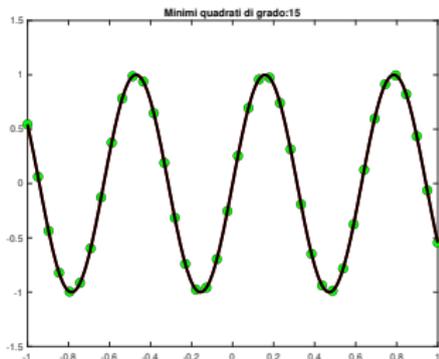
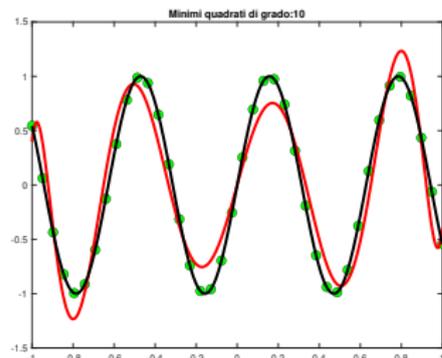
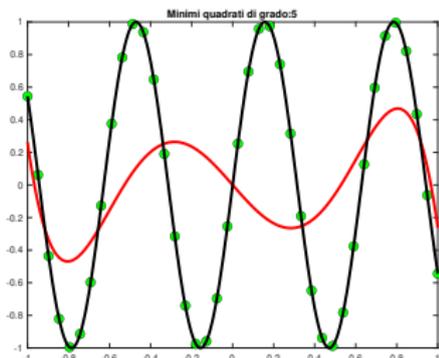


Figura: Dati inesatti (in verde) e in rosso approssimanti ai minimi quadrati di grado  $m = 5$ ,  $m = 10$ ,  $m = 15$ ,  $m = 30$ . In nero  $f(x) = \sin(10x)$ .

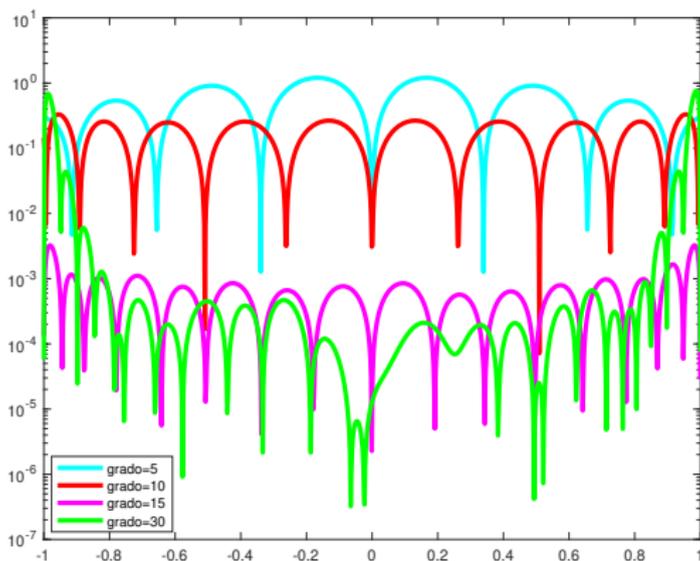


Figura: Rappresentazione grafica di  $E_m(x) = |p_m(x) - f(x)|$ , dove  $p_m$  é l'approssimante di grado  $m = 5, m = 10, m = 15, m = 30$  (in blu) nel ricostruire  $f^*(x) = \sin(10 \cdot x)$ , noti dati inesatti.

- In virtù dei 6 cambi di convessità / concavità della funzione  $f^*$ , è chiaro che un **polinomio di grado basso non fornisca risultati apprezzabili**.  
Ad esempio un polinomio di grado 5 può avere al più 4 cambi di convessità / concavità, e non può essere adatto allo scopo.
- Un polinomio  $\mathcal{L}_m$  di **grado  $m$  troppo alto approssimerebbe la funzione con rumore** e non  $f^*$ .
- Nel nostro esempio,  $m = 15$  sembra essere un **buon compromesso**.
- Si noti come a grado  $m = 30$  comincino a sorgere oscillazioni agli estremi. Inoltre per problemi dovuti a `polyfit`, il risultato non è quello corretto teoricamente.

La tabella che segue, mostra gli errori

$$E_m(f^*) = \max_{x \in [-1,1]} |f^*(x) - \mathcal{L}_m(x)|, \quad E_m(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{40} |y_i - \mathcal{L}_m(x_i)|^2,$$

con  $\mathbf{y} = (y_i)_i$  vettore dei dati perturbati, evidenziando un miglioramento di entrambe fino a grado  $m = 20$  e un peggioramento nell'approssimare la funzione **senza rumore**  $f^*$  pur approssimando sempre meglio i dati (nel senso dei minimi quadrati).

| $m$ | $E_m(f^*)$  | $E_m(\mathbf{y})$ |
|-----|-------------|-------------------|
| 5   | $1.2e + 00$ | $4.0e + 00$       |
| 10  | $3.3e - 01$ | $1.2e + 00$       |
| 15  | $4.0e - 03$ | $5.1e - 03$       |
| 20  | $5.7e - 03$ | $2.3e - 03$       |
| 25  | $3.6e - 02$ | $2.2e - 03$       |
| 30  | $1.7e + 00$ | $1.8e - 03$       |

Tabella: Grado  $m$  ed errori

- $E_m(f^*) = \max_{x \in [-1,1]} |f^*(x) - \mathcal{L}_m(x)|$ ,
- $E_m(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{40} |y_i - \mathcal{L}_m(x_i)|^2$ ,

dove  $f^*(x) = \sin(10x)$ ,  $\mathbf{y} = (y_i)_i$  con  $y_i = f^*(x_i) + 10^{-3}$ .

Il valore  $E_m(f^*)$  evidenzia un valore ottimo  $m = 15$  nell'approssimare la funzione  $f^*$  non affetta da rumore.

Il valore  $E_m(\mathbf{y})$ , come atteso, mostra un costante miglioramento nell'approssimare i dati affetti da rumore.

# Appendice facoltativa

## Teorema (Qualità dell'approssimazione, (punti equispaziati))

Sia  $\mathcal{L}_m$  è la miglior approssimante polinomiale ai minimi quadrati di grado  $m > 0$ , relativamente alle coppie

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_{N_m}, f(x_{N_m}))$$

con

- $x_j = a + (j - 1)h$ , in cui  $j = 1, \dots, N_m$ ,  $h = \frac{b-a}{N_m-1}$
- $N_m \geq 2m^2 + 1$ .

Se  $f \in C^k([a, b])$ ,  $k > 1$ , allora esiste una costante  $c_k$ , indipendente da  $m$ , per cui

$$\|\mathcal{L}_m - f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| \leq c_k m^{1-k} = c_k \cdot \frac{1}{m^{k-1}}$$

- Il teorema dice che nelle condizioni fissate, piú la funzione é **regolare** e piú é **lecito** aspettarsi un errore piú piccolo (ammesso  $c_k$  non cresca troppo).
- Si noti che nelle ipotesi indicate, per il teorema dei due carabinieri, per  $n \rightarrow \infty$  la successione di polinomi  $\mathcal{L}_m$  **converge uniformemente** a  $f$ .

## Esempio

Calcolare le approssimazioni  $\mathcal{L}_m$  ai minimi quadrati delle funzioni

1  $f_1(x) = x^{30} \in C^\infty([0, 1]),$

2  $f_2(x) = x^{7/2} \in C^3([0, 1]),$

3  $f_3(x) = \exp(x) \in C^\infty([0, 1]).$

in  $N_m = 2m^2 + 1$  nodi equispaziati, con  $m = 1, 2, \dots, 9, 10, 15, 20.$

Verificare *numericamente* la convergenza uniforme di  $\mathcal{L}_m$  a  $f$ , al crescere di  $m.$

Come richiesto, al variare di  $m$ , sceglieremo  $N_m = 2m^2 + 1$ , ovvero quali ascisse di campionamento

$$x_k = a + kh, \text{ con } k = 1, \dots, N_m$$

dove

$$h = \frac{b - a}{n_m - 1} = \frac{1}{2m^2 + 1 - 1} = \frac{1}{2m^2}.$$

- Il calcolo della soluzione ai minimi quadrati viene eseguito utilizzando la funzione Matlab `polyfit`;
- se le ordinate sono valutazioni di una funzione  $f$  nei punti  $x_1 < \dots < x_N$ , ovvero  $y_k = f(x_k)$ , negli esperimenti che seguono, per avere una stima dell'errore commesso

$$E_m(f) = \|\mathcal{L}_m - f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)|,$$

lo valutiamo in una discretizzazione  $\Delta$  *sufficientemente fitta* di  $[0, 1]$ , ovvero

$$\Delta = \{x_j = (j-1)/9999, \quad k = 1, \dots, 10000\},$$

ottenendo

$$E_m^*(f) = \max_{x_j \in \Delta} |\mathcal{L}_m(x_j) - f(x_j)| \approx \max_{x \in [0,1]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| = E_m(f).$$

I risultati sono rappresentati in tabella.

Si noti che

- Visto che  $f_1(x) = x^{30} \in C^\infty([0, 1])$  ci aspettiamo che per  $m \geq 30$ , poiché  $f_1$  è un polinomio di grado 30, sia in aritmetica esatta  $\mathcal{L}_m = f_1$ . Quindi per  $m \geq 30$  ci aspettiamo un errore  $E_m^*(f) = \max_{x \in [0, 1]} |\mathcal{L}_m(x) - f_1(x)|$  nullo.
- Visto che  $f_2(x) = x^{7/2} \in C^3([0, 1])$  ci aspettiamo dalle stime teoriche del teorema precedente una **convergenza non troppo rapida**.
- Visto che  $f_3(x) = \exp(x) \in C^\infty([0, 1])$  ci aspettiamo dalle stime teoriche del teorema precedente una **convergenza molto rapida**.

| $m$ | $E_m^*(f_1)$ | $E_m^*(f_2)$ | $E_m^*(f_3)$ | $N_m$ |
|-----|--------------|--------------|--------------|-------|
| 1   | $6.9e-01$    | $3.0e-01$    | $1.4e-01$    | 3     |
| 2   | $4.0e-01$    | $5.2e-02$    | $9.6e-03$    | 9     |
| 3   | $3.4e-01$    | $4.3e-03$    | $7.3e-04$    | 19    |
| 4   | $2.8e-01$    | $3.2e-04$    | $4.1e-05$    | 33    |
| 5   | $2.1e-01$    | $6.2e-05$    | $1.9e-06$    | 51    |
| 6   | $1.4e-01$    | $1.7e-05$    | $7.3e-08$    | 73    |
| 7   | $8.6e-02$    | $6.1e-06$    | $2.5e-09$    | 99    |
| 8   | $4.9e-02$    | $2.5e-06$    | $7.2e-11$    | 129   |
| 9   | $2.6e-02$    | $1.1e-06$    | $1.9e-12$    | 163   |
| 10  | $1.3e-02$    | $5.6e-07$    | $4.5e-14$    | 201   |
| 15  | $1.1e-04$    | $3.7e-08$    | $2.0e-15$    | 451   |
| 20  | $9.4e-08$    | $5.4e-09$    | $1.8e-15$    | 801   |

**Tabella:** Nella tabella indichiamo il grado  $m = 1, \dots, 10, 15, 20$ , gli errori compiuti dalle approssimazioni ai minimi quadrati  $E_m^*(f_1)$ ,  $E_m^*(f_2)$ ,  $E_m^*(f_3)$  e il numero di punti di campionamento. Non deve sorprendere la **prima colonna**, visto che stiamo approssimando un polinomio di grado 30 con altri di grado minore. Si ricordi che  $f_1(x) = x^{30}$ ,  $f_2(x) = x^{7/2}$ ,  $f_3(x) = \exp(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

## Teorema (Errore approssimante ai minimi quadrati su opportuni campionamenti)

Se  $\mathcal{L}_m$  è la miglior approssimante polinomiale di grado  $m > 0$ , relativamente alle coppie  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_N, f(x_N))$  con  $a \leq x_1 < \dots < x_N \leq b$  e

- $h_m = \max_{i=1, \dots, N-1} (x_{i+1} - x_i) \leq \theta(b-a)/m^2$ ,
- $\theta \in (0, 1)$  (indipendente da  $m$ ),

allora per ogni  $f \in C^k([a, b])$ ,  $k > 1$ , esiste una costante  $c_k$ , indipendente da  $m$ , per cui

$$\max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| \leq c_k m^{1-k}.$$

## Corollario (Punti equispaziati)

Se  $\mathcal{L}_m$  è la miglior approssimante polinomiale di grado  $m > 0$ , relativamente alle coppie  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_{N_m}, f(x_{N_m}))$  con

- $x_j = a + (j-1) \frac{b-a}{N_m-1}$ ,  $j = 1, \dots, N_m$ ,
- $N_m \geq 2m^2 + 1$ .

Allora per ogni  $f \in C^k([a, b])$ ,  $k > 1$ , esiste una costante  $c_k$ , indipendente da  $m$ , per cui

$$\|\mathcal{L}_m - f\|_{\text{inf}} = \max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| \leq c_k m^{1-k}.$$

## Esempio

Sia  $f \in C^5([a, b])$  (ovvero  $k = 5$  nel corollario precedente). Se disponiamo dei dati  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=1, \dots, N_m}$  con  $N_m \geq 2m^2 + 1$ , sappiamo che  $\|\mathcal{L}_m(x) - f\|_{\text{inf}} \leq c_k m^{1-k}$ .

(a) Supponiamo

- di disporre di  $N_m = 20$  punti equispaziati  $\{x_k\}_{k=1, \dots, 20}$  in  $[a, b]$ ,
- di calcolare l'approssimante  $\mathcal{L}_3$  ai minimi quadrati delle coppie  $(x_k, f(x_k))$ ,  $k = 1, \dots, 20$ , ovvero  $m = 3$  nel corollario precedente.

Essendo  $20 = N_m \geq 2m^2 + 1 = 19$ , risulta

$$\max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| \leq c_k m^{1-k} = c_k 3^{1-5} = \frac{c_k}{81}.$$

(b) Supponiamo

- di disporre di  $N_m = 300$  punti equispaziati  $\{x_k\}_{k=1, \dots, 300}$  in  $[a, b]$ ,
- di calcolare l'approssimante  $\mathcal{L}_{10}$  ai minimi quadrati delle coppie  $(x_k, f(x_k))$ ,  $k = 1, \dots, 300$ , ovvero  $m = 10$  nel corollario precedente.

Essendo  $300 = N_m \geq 2m^2 + 1 = 201$ , risulta

$$\max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| \leq c_k m^{1-k} = c_k 10^{1-5} = \frac{c_k}{10^4}.$$

### Commento

- Il teorema asserisce che la soluzione ai minimi quadrati  $\mathcal{L}_m$  di grado  $m$ , su un *set di nodi sufficientemente fitti* (ovvero l'intervallo di ampiezza maggiore è sufficientemente piccolo), darà
  - (a) *uniformemente* una buona approssimazione della funzione  $f$  da approssimare,
  - (b) tendenzialmente *migliore se la funzione è molto regolare* vista la presenza di  $m^{1-k}$ , supponendo  $c_k$  non cresca troppo.
- Non dice molto del valore della costante  $c_k$ , e quindi il termine  $c_k m^{1-k}$  non è direttamente valutabile.
- Al crescere di  $m$ , il fattore  $c_k m^{1-k} \rightarrow 0$  e quindi per set di nodi  $\{x_k\}_{k=1}^N$  sufficientemente fitti, la successione  $\{\mathcal{L}_m\}_m$  converge uniformemente a  $f \in C^k([a, b])$ , qualora sia  $k > 1$ .

## Esempio (. Minimi quadrati e set di nodi equispaziati suff. fitti)

Supponiamo che al variare di  $m$ , si calcoli l'approssimante polinomiale  $\mathcal{L}_m$  delle coppie  $(x_k, f(x_k))_{k=1, \dots, N_m}$ , in cui

- $f \in C^k([a, b])$ ,  $k > 1$ ;
- $x_j = a + (b - a) \cdot \frac{j-1}{N_m-1}$  con  $j = 1, \dots, N_m = 2m^2 + 1$ , ovvero  $N_m$  punti equispaziati in  $[a, b]$ , con passo  $h_m = \frac{b-a}{N_m-1}$ .

In virtù del precedente corollario si ha

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| \leq c_k m^{1-k}. \quad (3)$$

Se si considera in particolare una sequenza di approssimazioni  $\{\mathcal{L}_m\}_{m=1, 2, \dots}$  con queste proprietà, allora da (3) abbiamo che per il teorema del confronto

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\mathcal{L}_m - f\|_\infty = \lim_{m \rightarrow +\infty} \max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| = 0,$$

ovvero *la successione di polinomi  $\{\mathcal{L}_m\}_{m=1, 2, \dots}$  converge uniformemente a  $f$  in  $[a, b]$ .*