

Interpolazione polinomiale a tratti e spline ¹

A. Sommariva ²

Keywords: Interpolazione polinomiale. Funzioni polinomiali a tratti. Interpolazione spline. Errore dell'interpolante spline cubica.

Revisione: 11 maggio 2021

1. Un problema dell'interpolazione polinomiale

Si è visto che nel caso dell'interpolazione polinomiale, dati $n + 1$ punti $a = x_0 < \dots < x_n = b$, e i valori y_0, \dots, y_n , ad esempio ivi assunti da una funzione $y = f(x)$, esiste uno ed un solo polinomio p_n di grado n tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Nel caso di nodi equispaziati

$$x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n; \quad (2)$$

al crescere di n , non si può garantire che $f(x) - p_n(x)$ tenda a 0 (si ricordi il fenomeno di Runge!).

Piú in generale per un teorema di Faber (cf. [2, p.132], qualsiasi sia l'insieme di nodi relativi all'intervallo limitato $[a, b]$ esiste una funzione continua f tale che l'interpolante P_n in tale insieme di punti non converge uniformemente a f (per $n \rightarrow \infty$).

In altre parole al tendere di $n \rightarrow +\infty$, non si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0.$$

Di conseguente sorge spontaneo porsi il seguente

Problema 1.1. *Qualora si possenga un gran numero di punti, anche equispaziati, risulta possibile calcolare un'approssimante di tipo polinomiale per cui al crescere di n si abbia $p_n \rightarrow f$ (uniformemente)?*

Definizione 1.2 (Funzioni polinomiali a tratti). *Sia dato un intervallo $[a, b]$ e sia $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Una funzione f si dice polinomiale a tratti se la sua restrizione ad ogni intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n - 1$ è un polinomio.*

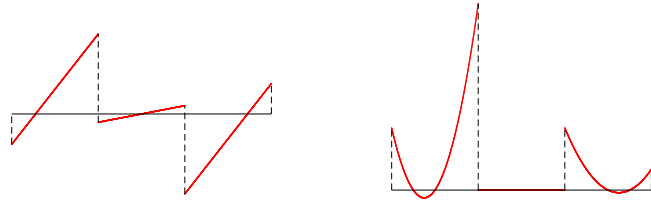


Figura 1: A sinistra: polinomi a tratti di grado 1. A destra: polinomi a tratti di grado 2.

Definizione 1.3 (Interpolante polinomiale a tratti di grado s). Siano $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ e si supponga che sia

$$t_k = x_{s \cdot k} < x_{s \cdot k + 1} < \dots < x_{s \cdot (k+1) - 1} < x_{s \cdot (k+1)} = t_{k+1}.$$

Si consideri la funzione p_s^* tale che in ogni subintervallo $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$, sia il polinomio di grado s interpolante nei punti $x_{k \cdot s}, \dots, x_{(k+1) \cdot s}$ i valori $y_{k \cdot s}, \dots, y_{(k+1) \cdot s}$.

Tale p_s^* si chiama funzione polinomiale a tratti di grado s , interpolante le coppie $(x_j, y_j)_{j=0, \dots, n}$.

In altri termini p_s^* si ottiene *incollando* per continuità interpolanti polinomiali di grado s^* in sottointervalli $[t_k, t_{k+1}]$ ove in generale i punti di raccordo $t_1 = x_s, t_2 = x_{2s}, t_3 = x_{3s}, \dots$ sono punti angolosi della funzione interpolante.

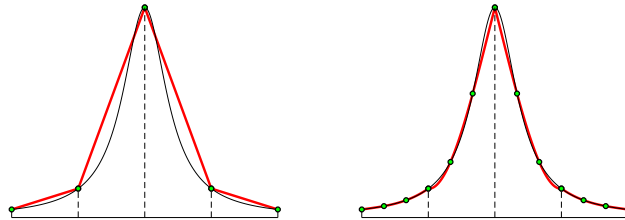


Figura 2: La funzione di Runge (in nero). A sinistra la interpolante polinomiale a tratti p_1^* a tratti di grado 1, a destra, la interpolante polinomiale a tratti p_3^* a tratti di grado 3, entrambe in rosso, in 4 subintervalli equispaziati. In verde le coppie da interpolare.

Siccome in ogni subintervallo $[t_k, t_{k+1}]$ l'interpolante richiesta esiste ed è unica, possiamo affermare che tali interpolanti relativamente ai dati $(x_k, y_k)_{k=0, \dots, n}$ esistono e sono uniche.

Il primo caso è quello delle interpolanti polinomiali a tratti di grado 1, cioè funzioni che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \dots, n - 1$) sono polinomi di grado $m = 1$ (e globalmente funzioni continue).

Teorema 1.4. Sia $p_1^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione interpolante a tratti di grado 1 relativamente alle coppie $(x_i, f(x_i))$ dove

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Allora se

1. $x \in [x_i, x_{i+1}]$,
2. $h_i = x_{i+1} - x_i$,
3. la funzione f è derivabile due volte con continuità ed è

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(x)|,$$

abbiamo

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq h_i^2 \frac{M_i}{8}. \quad (3)$$

Dimostrazione. Dal teorema dell'errore dell'interpolazione polinomiale di grado $n = 1$, relativamente alle coppie $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, per $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$f(x) - p_1^*(x) = f^{(2)}(\xi) \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2}, \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}) \quad (4)$$

Se $x \in [x_i, x_{i+1}]$, da (4)

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1^*(x)| &= \left| f^{(2)}(\xi) \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| = |f^{(2)}(\xi)| \left| \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| \\ &\leq \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)| \cdot \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \left| \frac{(t - x_i)(t - x_{i+1})}{2} \right| \end{aligned}$$

Si vede facilmente che $c = (x_i + x_{i+1})/2$ è il punto di $[x_i, x_{i+1}]$ in cui si ottiene il massimo di $\left| \frac{(t - x_i)(t - x_{i+1})}{2} \right|$ e poiché $h_i = x_{i+1} - x_i$,

$$\max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \frac{|(t - x_i)(t - x_{i+1})|}{2} = \frac{|(c - x_i)(c - x_{i+1})|}{2} = \frac{(h_i/2)(h_i/2)}{2} = \frac{h_i^2}{8}.$$

Quindi, per $M_i := \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)|$,

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq M_i \frac{h_i^2}{8}. \quad (5)$$

Nota 1.5. 1. Il teorema precedente, vale per h_i generica.

2. Il massimo $M_i = \max_{s \in (x_i, x_{i+1})} |f^{(2)}(s)|$ dipende solo dal i -simo intervallo che è quello in cui si esamina l'errore compiuto nel punto x .

A priori uno potrebbe utilizzare

- $M = \max_{s \in [a, b]} |f^{(2)}(s)| \geq M_i = \max_{s \in (x_i, x_{i+1})} |f^{(2)}(s)|$
- $h = \max_{i=1, \dots, n} h_i$

ma la disuguaglianza

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq M \frac{h^2}{8}$$

sarebbe meno precisa di

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq M_i \frac{h_i^2}{8}.$$

Corollario 1.6. Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e supponiamo

- $f \in C^2([a, b])$,
- $M = \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)|$.
- $p_{1,n}^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione lineare a tratti interpolante le coppie $(x_k, f(x_k))$, dove $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $k = 0, \dots, n$.

Allora

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq M \frac{(b-a)^2}{8n^2}.$$

Dimostrazione 1.7. Osserviamo che

- $M = \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)| \geq M_i = \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)|$;
- essendo, $h = h_i$, per $i = 1, \dots, n$, si ha $|f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq M_i \frac{h_i^2}{8} \leq M \frac{h^2}{8}$.

Visto che $M \frac{h^2}{8}$ non dipende da x , $h = (b-a)/n$

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq M \frac{h^2}{8} = M \frac{(b-a)^2}{8n^2}.$$

Importante 1.8 (Convergenza uniforme). Indicato con $p_{1,n}^*$ il polinomio a tratti interpolante $n+1$ nodi equispaziati di $[a, b]$, essendo $h = (b-a)/n$, ricaviamo

$$0 \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - p_{1,n}^*(t)| \leq \frac{(b-a)^2 M}{8n^2}. \quad (6)$$

da cui si evince che se $f \in C^2([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$ e il numero di punti equispaziati nell'intervallo $[a, b]$ tende ad infinito allora, visto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^2 M}{8n^2} = 0,$$

per il teorema del confronto, per $n \rightarrow +\infty$

$$\|f - p_{1,n}^*\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |f(t) - p_{1,n}^*(t)| \rightarrow 0$$

ovvero la successione $\{p_{1,n}^*\}$ converge uniformemente a f .

In questa sezione analizziamo numericamente la convergenza delle funzioni lineari a tratti $s_{1,n}$ interpolanti in n punti equispaziati

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

Dopo qualche calcolo si vede che

$$f^{(1)}(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f^{(2)}(x) = \frac{2 \cdot (3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

e quindi l'errore di interpolazione è per $x \in [x_i, x_{i+1}]$, visto che

- $h_i = x_{i+1} - x_i = h = 10/n$,
- $\max_{s \in [-5, 5]} |f^{(2)}(s)| = 2$,

ricaviamo

$$|f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq h_i^2 \max_{s \in (x_i, x_{i+1})} |f^{(2)}(s)| = \frac{100 \cdot 2}{8n^2}. \quad (7)$$

Di conseguenza,

$$0 \leq \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq \frac{200}{8n^2}.$$

e come detto sopra deduciamo per il teorema del confronto che

$$\lim_n \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| = 0,$$

ovvero la successione $\{p_{1,n}^*\}$ converge uniformemente a f .

Una risposta generale al citato problema di convergenza uniforme è stata data nel 1946 da Schoenberg, lo scopritore delle splines (cf. [8] [5], [6], [7]).

Definizione 1.9 ([1], p.166). Si considerino i punti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Una funzione s tale che

- s è un polinomio di grado al più $m - 1$ in ogni subintervallo $[x_{i-1}, x_i]$;
- $s^{(r)}$ è continua in $[a, b]$ per $r = 0, \dots, m - 2$,

si dice spline di ordine m (o equivalentemente di grado $m - 1$).

Se in particolare interpola le coppie (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n$, si dice interpolante tali dati.

n	E_n	n	E_n
2	$9.62e - 01$	16384	$9.31e - 08$
4	$7.35e - 01$	32768	$2.32e - 08$
8	$3.38e - 01$	65536	$5.79e - 09$
16	$1.00e - 01$	131072	$1.45e - 09$
32	$2.54e - 02$	262144	$3.63e - 10$
64	$6.26e - 03$	524288	$9.08e - 11$
128	$1.55e - 03$	1048576	$2.27e - 11$
256	$3.84e - 04$	2097152	$5.67e - 12$
512	$9.55e - 05$	4194304	$1.42e - 12$
1024	$2.38e - 05$	8388608	$3.54e - 13$
2048	$5.95e - 06$	16777216	$8.78e - 14$
4096	$1.49e - 06$	33554432	$2.23e - 14$
8192	$3.71e - 07$	67108864	$5.66e - 15$

Tabella 1: Grado n ed errore $E_n = \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)|$ con $p_{1,n}^*$ interpolante f di tipo lineare a tratti, in $n + 1$ nodi equispaziati. Si osservi come numericamente $E_n \rightarrow 0$.

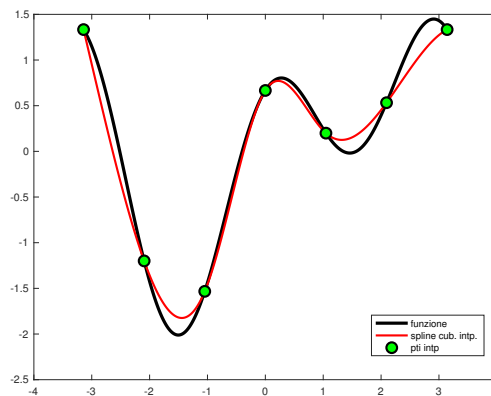


Figura 3: La funzione $f(t) = \sin(t) + \cos(2 \cdot t) - \cos(t)/3$ in $[-\pi, \pi]$ e una spline cubica interpolante s_3 , nei punti $x_k = -\pi + k \cdot \frac{2\pi}{6}$, $k = 0, \dots, 6$.

Esempio. Il primo caso è quello delle splines di grado 1, cioè funzioni che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \dots, n - 1$) sono polinomi di grado $m = 1$ e globalmente funzioni di classe $C^{m-1}([a, b]) = C^0([a, b])$, cioè continue. Evidentemente coincidono con le funzioni lineari a tratti, relativamente a $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n - 1$.

Esempio. Per $m = 3$ otteniamo le cosiddette splines cubiche s_3 , cioè funzioni che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \dots, n - 1$) siano polinomi di grado $m = 3$ e globalmente funzioni di classe $C^{m-1}([a, b]) = C^2([a, b])$. Come vedremo dopo, per garantirne l'unicità si chiedono condizioni aggiuntive.

Commento 1.10 (Funzioni polinomiali a tratti e splines: differenze). *Esistono molte differenze tra interpolanti spline e interpolanti polinomiali a tratti. Ne citiamo alcune.*

- Possono avere diversa regolarità. Osserviamo che non sempre le funzioni polinomiali a tratti di grado m sono di classe C^{m-1} come invece lo sono le splines.
- Mentre le funzioni a tratti di grado m richiedono che il numero di punti da interpolare sia

$$sm + 1$$

per qualche numero naturale s , le splines di grado m sono definite su un insieme di punti arbitrari, indipendentemente dal grado.

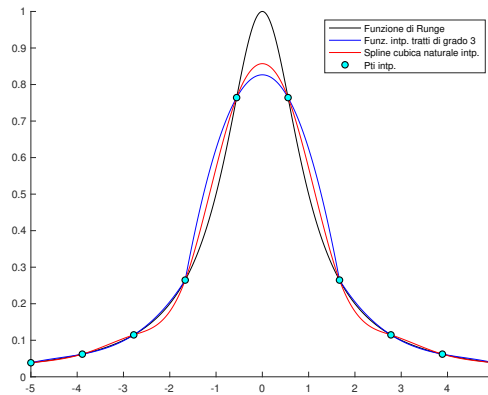


Figura 4: La funzione di Runge, la interpolante spline cubica s_3 (con condizioni naturali), nei punti $x_k = -5 + k \cdot 10/9$, $k = 0, \dots, 9$, la interpolante polinomiale p_3^* a tratti di grado 3, con suddivisione $[0, x_3]$, $[x_3, x_6]$, $[x_6, x_9]$. Si osservi che i punti $x_3 = -1.6$, $x_6 = 1.6$ sono angolosi per p_3^* . Le derivate infatti valgono $\lim_{x \rightarrow x_3^-} (p_3^*)'(x) \approx 0.1990$, $\lim_{x \rightarrow x_3^+} (p_3^*)'(x) \approx 0.6743$, $\lim_{x \rightarrow x_6^-} (p_3^*)'(x) \approx -0.6736$, $\lim_{x \rightarrow x_6^+} (p_3^*)'(x) \approx -0.1992$.

Nel caso delle splines cubiche s_3 , l'unicità dell'interpolante è legata (ma non solo!) all'aggiungere alcune proprietà di s_3 agli estremi x_0, x_n .

Osserviamo infatti che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ le splines si possano rappresentare come

$$s_3(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x - x_i) + c_{3,i}(x - x_i)^2 + c_{4,i}(x - x_i)^3, \quad i = 0, \dots, n - 1$$

e quindi per determinare s_3 in $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$ servono $4n$ valori $c_{i,j}$, ovvero 4 valori per ogni indice i .

Da ragionamenti sulle proprietà della regolarità della spline interpolante si vede che sono disponibili $4n - 2$ condizioni:

- funzione continua in x_1, \dots, x_{n-1} ;

- derivata prima continua in x_1, \dots, x_{n-1} ;
- derivata seconda continua in x_1, \dots, x_{n-1} ;
- interpolazione dei dati in x_0, \dots, x_n ;

Si procede richiedendo quindi una delle seguenti proprietà aggiuntive a s_3 :

- Spline naturale: $s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b) = 0$.
- Spline periodica: $s_3^{(1)}(a) = s_3^{(1)}(b)$, $s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b)$.
- Spline vincolata: $s_3^{(1)}(a) = f^{(1)}(a)$, $s_3^{(1)}(b) = f^{(1)}(b)$.

La spline con vincolo not-a-knot forza $s_3^{(3)}$ ad essere continua nel secondo e nel penultimo nodo (e di conseguenza si può mostrare che ciò impone che i polinomi nei primi e negli ultimi due intervalli siano uguali) (cf. [1], p. 171).

In altre parole,

- la suddivisione è data da $n - 2$ subintervalli $[x_0, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-2}, x_n]$,
- si interpolano i dati y_0, \dots, y_n nei nodi x_0, \dots, x_n .

Si osservi che, nel caso della condizione *knot-a-knot* se i punti da interpolare sono x_0, \dots, x_n e gli $n - 2$ intervalli della suddivisione sono $[x_0, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ allora necessitano $4(n - 2)$ condizioni per determinare la spline cubica.

Le condizioni dovute

- all'interpolazione sono $n + 1$,
- alla regolarità sono $3(n - 3)$, poichè gli $n - 3$ punti che sono estremi di subintervalli *interni* sono x_2, \dots, x_{n-2} ,

e quindi sono pure $4(n - 2)$, ovvero quelle necessarie per determinare la spline cubica.

Analizziamo l'errore effettuato da una spline cubica $s_{3,n} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che interpola le coppie $(x_i, f(x_i))$ dove $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \dots, n$ è un set di punti equispaziati (con spaziatura $h = (b - a)/n$). Si mostra (non facile!) che:

Teorema 1.11. *Supponiamo $f \in C^4([a, b])$. Sia $s_{3,n}$ una spline cubica, che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n$, con $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$ (ad esempio di tipo "naturale", o "periodica", o "vincolata").*

Allora esistono le costanti c_0, c_1, c_2 , indipendenti da $h = \frac{(b-a)}{n}$ tale che

$$\|f - s_{3,n}\|_\infty \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_\infty = c_0 (b - a)^4 \|f^{(4)}\|_\infty / n^4, \quad (8)$$

$$\|f^{(1)} - s_{3,n}^{(1)}\|_\infty \leq c_1 h^3 \|f^{(4)}\|_\infty = c_1 (b - a)^3 \|f^{(4)}\|_\infty / n^3, \quad (9)$$

$$\|f^{(2)} - s_{3,n}^{(2)}\|_\infty \leq c_2 h^2 \|f^{(4)}\|_\infty = c_2 (b - a)^2 \|f^{(4)}\|_\infty / n^2 \quad (10)$$

dove $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Nota 1.12. Si noti come in quest'ultimo teorema si afferma come non solo come la spline approssima la funzione, ma come pure le sue derivate convergono uniformemente alle rispettive derivate della funzione f , qualora n tenda ad infinito.

Nota 1.13. Se $f \approx g$, non e' detto $f' \approx g'$. A tal proposito si considerino per $x \in [0, 10^{-8}\pi/2]$

$$f(x) \equiv 0, \quad g(x) = 10^{-8} \sin(10^8 x)$$

Si vede che

$$\max_{x \in [0, 10^{-8}\pi/2]} |f(x) - g(x)| = |0 - 10^{-8} \sin(10^8 \cdot 10^{-8}\pi/2)| = 10^{-8}.$$

D'altra parte, essendo $f'(x) \equiv 0$ e $g'(x) = \cos(10^8 x)$, e' pure

$$\max_{x \in [0, 10^{-8}\pi/2]} |f'(x) - g'(x)| = \cos(10^8 \cdot 0) = 1.$$

Nota 1.14. • Nel caso di spline interpolanti e vincolate si ha $c_0 = 5/384$, $c_1 = 1/24$, $c_2 = 3/8$.

• Nel caso di splines di tipo Hermite si ha $c_0 = 1/384$ (cf. [4], p. 301).

In questa sezione analizziamo numericamente la convergenza delle splines cubiche $s_{3,n}$ interpolanti in n punti equispaziati

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

Dopo qualche calcolo si vede che

$$f^{(4)}(x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^5}, \quad \|f^{(4)}\|_\infty = \max_{x \in [-5, 5]} |f^{(4)}(x)| = 24$$

e che quindi per un qualche c_0 indipendente da n

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f - s_{3,n}\|_\infty &:= \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - s_{3,n}(x)|_\infty \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_\infty \\ &= c_0 \frac{(b-a)^4}{n^4} \cdot 24. \end{aligned} \quad (11)$$

Quindi, per il teorema del confronto

$$\lim_n \|f - s_{3,n}\|_\infty = 0$$

ovvero le spline cubiche $s_{3,n}$ che interpolano nei nodi

$$x_k = -5 + k \frac{10}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

la funzione di Runge f , sono tali che la successione $\{s_{3,n}\}$ converge uniformemente a f .

n	E_n	n	E_n
2	$9.62e - 01$	512	$1.58e - 07$
4	$7.01e - 01$	1024	$3.93e - 08$
8	$2.46e - 01$	2048	$9.82e - 09$
16	$3.09e - 02$	4096	$2.45e - 09$
32	$1.31e - 03$	8192	$2.15e - 10$
64	$4.81e - 05$	16384	$2.98e - 11$
128	$2.56e - 06$	32768	$6.95e - 13$
256	$6.36e - 07$	65536	$3.08e - 15$

Tabella 2: Grado n ed errore $E_n = \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - s_{3,n}(x)|$ con $s_{3,n}(x)$ interpolante f di tipo spline cubica naturale, in $n + 1$ nodi equispaziati. Si osservi come numericamente $E_n \rightarrow 0$ e di come la convergenza sia molto più rapida che nel caso delle spline interpolanti di grado 1.

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- [3] [Carl DeBoor, personal homepage](#).
- [4] A. Suli e D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2003.
- [5] [Wikipedia, Funzione Spline](#).
- [6] [Wikipedia, Spline Device](#).
- [7] [Wikipedia, Spline Mathematics](#).
- [8] [Wikipedia, Interpolazione Spline](#).