

Interpolazione polinomiale ¹

A. Sommariva ²

Keywords: Interpolazione polinomiale, esistenza ed unicità, interpolazione di Lagrange, errore di interpolazione, il problema della convergenza (controesempio di Runge), interpolazione di Chebyshev, stabilità dell'interpolazione.

Revisione: 10 novembre 2018

1. Interpolazione polinomiale

Siano dati $n + 1$ punti

$$x_0, \dots, x_N$$

a due a due distinti e i valori y_0, \dots, y_N (assunti ad esempio da una funzione $y = f(x)$).

Il problema dell'*interpolazione polinomiale* (cf. [1, p.131], [5, p.289]) consiste nel calcolare il polinomio p_n di grado n tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Perché questo problema abbia senso, necessita garantire l'esistenza ed unicità di p_N .

Di seguito denoteremo con \mathbb{P}_n l'insieme dei polinomi il cui grado è al più n .

1.1. Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

In questa sezione intendiamo studiare l'esistenza e unicità del polinomio interpolatore, proponendo un metodo per determinarlo.

Teorema 1.1 (Unicità del polinomio interpolatore). *Dati $n + 1$ punti distinti*

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

e i valori

$$y_0, y_1, \dots, y_n,$$

esiste uno ed un solo polinomio p_n di grado al più n tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che esistano due polinomi distinti p_n e q_n di grado al più n tali che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Allora

$$(p_n - q_n)(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

e quindi $(p_n - q_n)(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ è un polinomio di grado $n + 1$, il che è assurdo, visto che la differenza di due polinomi di grado n è un polinomio di grado n .

Per studiare l'esistenza del polinomio interpolatore, Lagrange (cf. [8]) osservò che il polinomio di grado n

$$L_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (2)$$

è tale che $L_k(x_j) = \delta_{kj}$ dove δ_{kj} è l'operatore di Kronecker, il cui valore è 1 se $i = j$ e 0 altrimenti.

Teorema 1.2. *Dati $n + 1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n e i valori y_0, y_1, \dots, y_n , il polinomio di grado al più n*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x). \quad (3)$$

è tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Dimostrazione. Poichè L_k è un polinomio di grado al più n , lo è certamente lo stesso moltiplicato per lo scalare y_k e la somma di polinomi di grado al più n . Quindi sicuramente $p_n \in \mathbb{P}_n$.

Inoltre p_n interpola i dati visto che

$$p_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k \delta_{k,j} = y_j, \quad j = 0, \dots, n. \quad (4)$$

Quindi p_n è un polinomio interpolatore.

Nota. 1.3. 1. Il teorema precedente, non solo permette di stabilire l'esistenza del polinomio interpolatore, ma ne evidenzia un metodo di calcolo.

2. Si osservi inoltre come ogni termine della sommatoria separa (in qualche senso) il contributo delle ordinate y_k da quello dei polinomi di Lagrange L_k essenzialmente dipendenti dai punti $\{x_j\}_{j=0, \dots, n}$ (si rifletta bene su questa affermazione).
3. Esistono altre dimostrazioni dell'esistenza e unicità del polinomio interpolatore. Ad esempio, ciò è equivalente a mostrare che il sistema lineare $Va = y$ dove $V = (v_{i,j}) = (x_i^j)$, $0 \leq i, j \leq n$ è detta matrice di Vandermonde [12] dei nodi di interpolazione, $a = (a_0, \dots, a_n)^T$, $y = (y_0, \dots, y_n)^T$, ha una e una sola soluzione, ovvero che il $\det(V) \neq 0$.

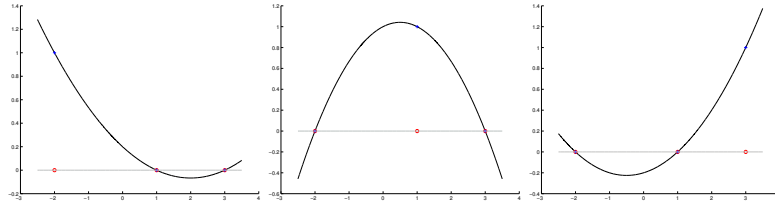


Figura 1: I polinomi di Lagrange L_0, L_1, L_2 relativi ai punti $x_0 = -2, x_1 = 1, x_2 = 3$.

Nota storica. 1.4. *Curiosamente l'interpolazione di Lagrange fu scoperta per la prima volta da Edward Waring nel 1779 e dopo riscoperta da Leonhard Euler nel 1783 [8]. Per quanto riguarda Lagrange, la riscoperta fu fatta nel 1795 [2].*

Esempio. Calcoliamo il polinomio di grado 2 che assume nei nodi $x_0 = -2, x_1 = 1, x_2 = 3$ rispettivamente i valori $f_0 = -2, f_1 = 11, f_2 = 17$. Come si vede dalla definizione, i polinomi di Lagrange sono

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(-2 - 1)(-2 - 3)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{15} \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-2))(x - 3)}{(1 - (-2))(1 - 3)} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{-6} \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - (-2))(x - 1)}{(3 - (-2))(3 - 1)} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{10} \end{aligned}$$

Si vede subito che i polinomi L_0, L_1, L_2 sono di secondo grado (e quindi tali le loro combinazioni lineari), che

$$L_0(x_0) = L_0(-2) = 1, L_0(x_1) = L_0(1) = 0, L_0(x_2) = L_0(3) = 0$$

$$L_1(x_1) = L_1(1) = 1, L_1(x_0) = L_1(-2) = 0, L_1(x_2) = L_1(3) = 0$$

$$L_2(x_2) = L_2(3) = 1, L_2(x_0) = L_2(-2) = 0, L_2(x_1) = L_2(1) = 0$$

e che il polinomio definito in (3)

$$p_2(x) = -2 L_0(x) + 11 L_1(x) + 17 L_2(x)$$

è tale che

$$p(x_0) = -2 L_0(x_0) + 11 L_1(x_0) + 17 L_2(x_0) = -2 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 0 = -2,$$

$$p(x_1) = -2 L_0(x_1) + 11 L_1(x_1) + 17 L_2(x_1) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 17 \cdot 0 = 11,$$

$$p(x_2) = -2 L_0(x_2) + 11 L_1(x_2) + 17 L_2(x_2) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 1 = 17,$$

e quindi è proprio il polinomio interpolante cercato.

Nota. 1.5. Dal punto di vista pratico, (3) ha alcuni problemi. Se dopo aver calcolato il polinomio p_N interpolante in $N + 1$ punti $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$, desideriamo ottenere il polinomio p_{N+1} interpolante in $N + 2$ punti $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N), (x_{N+1}, y_{N+1})$ la formula (3) è inefficiente poichè bisogna ricalcolare tutti i polinomi di Lagrange. Fortunatamente, esistono altre maniere di esprimere il polinomio interpolatore, come quella di Newton (cf. [1, p.138], [5, p.294], [9], [7]), che non soffrono di questo problema.

2. Errore di interpolazione

Per quanto concerne l'errore compiuto nell'approssimare una funzione f con il polinomio p_n tale che $y_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$ vale il seguente teorema [3, p.70],

Teorema 2.1 (Errore di interpolazione, Cauchy (1840)). Sia $f \in C^{n+1}([a, b])$ e si supponga che $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ siano a 2 a 2 distinti e che il polinomio p_n sia tale che

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Allora

$$E_n[f](x) := f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \quad (5)$$

dove $\xi \in I$ con I il più piccolo intervallo aperto contenente x_0, \dots, x_n .

Dimostrazione. Se $x = x_i$, per qualche i , l'asserto è ovvio.

Altrimenti, sia $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$ e poniamo per $z \in [a, b]$

$$G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x), \quad (6)$$

dove

- $w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ è un polinomio di grado $n + 1$,
- $Q(x) = E_n[f](x)/w(x)$.

Si noti che in (6) la funzione Q viene valutata in x e non in z .

Osserviamo che

$$G(x) = E_n[f](x) - w(x)Q(x) = E_n[f](x) - w(x)(E_n[f](x)/w(x)) = 0,$$

e che per $k = 0, \dots, n$ abbiamo

$$G(x_k) = E_n[f](x_k) - w(x_k)Q(x) = 0 - 0 \cdot Q(x) = 0.$$

Dato che

- $f \in C^{n+1}([a, b])$, $p_n \in C^\infty([a, b])$, sicuramente $E_n[f] \in C^{n+1}([a, b])$,
- $w \in C^\infty([a, b])$,
- $Q(x)$ è un numero (si osservi che Q non dipende da z),

deduciamo che $G \in C^{n+1}([a, b])$ e si annulla in $n + 2$ punti.

Sia $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$ il più piccolo intervallo aperto contenente x, x_0, \dots, x_n . Per il teorema di Rolle [11], allora

- $G^{(1)}$ si annulla in $n + 1$ punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$,
- $G^{(2)}$ si annulla in n punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$,
- $G^{(k)}$ si annulla in $n + 2 - k$ punti di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$,
- $G^{(n+1)}$ si annulla in 1 punto ξ di $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$.

Essendo

- la derivata $n + 1$ -sima del polinomio p_n uguale identicamente alla funzione nulla (p_n ha grado n),
- la derivata $n + 1$ -sima del polinomio w uguale a $(n + 1)!$ (w ha grado $n + 1$),

indicato con D^n l'operatore di derivazione n -sima, visto che $Q(x)$ è una costante (non dipende da z), abbiamo

$$\begin{aligned} G^{(n+1)}(z) &= D^{n+1}E_n[f](z) - Q(x)D^{n+1}w(z) \\ &= D^{n+1}(f(x) - p_n(x)) - Q(x)D^{n+1}w(z) \\ &= f^{(n+1)}(x) - Q(x) \cdot (n + 1)! \end{aligned} \quad (7)$$

e quindi visto che $Q(x) = E_n[f](x)/w(x)$

$$0 = G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - Q(x) \cdot (n + 1)! = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{E_n[f](x)}{w(x)} \cdot (n + 1)!$$

da cui riarrangiando i termini

$$E_n[f](x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{w(x)}{(n + 1)!} = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n + 1)!}.$$

Nota. 2.2. Si osservi che è noto che esiste ξ ma non si sa dire in generale chi sia. Quindi non si può dire esattamente quanto sia l'errore compiuto.

Se è nota $M = \max_{s \in [a, b]} |f^{(n+1)}(s)|$ è comunque possibile stimare l'errore compiuto da

$$|E_n[f](x)| = |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n + 1)!} \leq M \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n + 1)!}.$$

Nota. 2.3. Per una nota storica sull'errore dell'interpolazione polinomiale, si veda [2, p.353].

Esempio. Si consideri la funzione $f(x) = \exp(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e i punti equispaziati $x_i = -1 + 2i/4$, $i = 0, \dots, 4$. Essendo $f^{(k)}(x) = \exp(x)$, per $k = 0, 1, \dots$ ed $\exp(x)$ una funzione crescente, abbiamo

$$M = \|f^{(5)}\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |\exp(x)| = \exp(1) \approx 2.7183.$$

Inoltre, come si può vedere dal grafico in figura, $\prod_{i=0}^4 |x - x_i| \leq 0.12$. Visto che $5! = 120$, abbiamo che se $E_n[f]$ è il massimo errore compiuto in $[-1, 1]$ nell'approssimare la funzione f con l'interpolante p_4 nei nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0, \dots, 4}$, dal teorema 2.1, fissato $x \in [-1, 1]$

$$E_4[f](x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \leq \frac{\exp(1) \cdot 0.12}{120} \approx 0.0027.$$

L'esperimento numerico in figura mostra che in effetti l'errore è minore di $1.2 \cdot 10^{-3} < 2.7 \cdot 10^{-3}$. Si osservi come il grafico sia tale che $E_4[f]$ si annulla ovviamente nei 5 punti di interpolazione x_i , $i = 0, \dots, 4$.

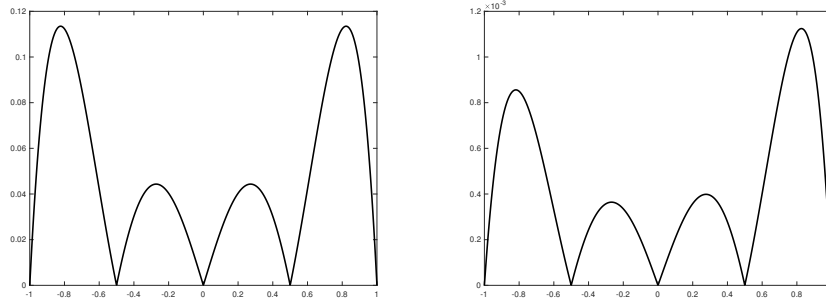


Figura 2: A sinistra, il grafico di $\prod_{i=0}^4 |x - x_i|$ dove $x_i = -1 + 2i/4$, $i = 0, \dots, 4$. A destra, il grafico dell'errore $E_n[f]$ in $[-1, 1]$ che evidentemente è sempre minore di $2.7 \cdot 10^{-3}$.

3. Convergenza dell'interpolazione

Un serio problema riguarda la scelta dei punti in cui interpolare la funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Mostriamo alcuni casi notevoli:

1. *nodi equispaziati*: fissato n , i punti sono

$$x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n; \quad (8)$$

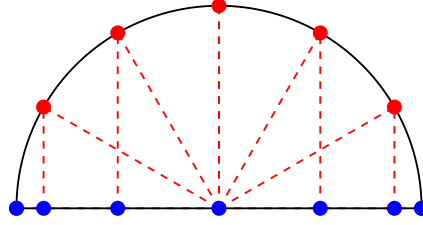


Figura 3: Interpretazione geometrica dell'insieme dei punti di Chebyshev-Lobatto utili per determinare un'interpolante polinomiale di grado $n = 6$.

2. *odi di Chebyshev (scalati)* [5, p.294], [10]: fissato N , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (9)$$

con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (10)$$

3. *odi di Chebyshev-Lobatto (scalati)* [5, p.295]: fissato n , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (11)$$

con

$$t_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (12)$$

Nota. 3.1. *Il set di $n+1$ punti di Chebyshev-Lobatto in $[-1, 1]$, quindi utili per l'interpolazione polinomiale a grado n , come si vede in figura, si ottengono proiettando i punti equispaziati nell'angolo della semicirconferenza*

$$\gamma = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, \pi]\}$$

sull'asse delle ascisse.

Nell'esempio, $n = 6$. Quindi si considerano $\theta_k = k\pi/n$, $k = 0, \dots, 6$, e si proiettano i punti

$$\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k)), \quad k = 0, \dots, 6\}$$

sull'asse delle ascisse, ottenendo i punti $\cos(\theta_k)$, con $\theta_k = k\pi/n$, $k = 0, \dots, 6$.

Una delle questioni rilevanti è se aumentando il numero di nodi, la successione di polinomi interpolatori p_n converge *uniformemente* alla funzione f da approssimare, ovvero

$$\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

dove $-\infty < a < b < +\infty$.

Consideriamo il caso dei punti equispaziati in $[a, b]$, e osserviamo che la stima dell'errore di interpolazione porge

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} \\ &\leq \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (13)$$

e quindi

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

Questo comporta che se $\max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)|$ è sufficientemente grande, allora potrebbe accadere che

$$\max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

non sia infinitesima e quindi pure che

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$$

non converga a 0.

Ciò accade per la funzione di Runge (scoperta nel 1901)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5] \quad (14)$$

in cui si ha che se polinomio p_n interpola f in $n+1$ nodi equispaziati, allora al variare di n , la successione $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non converge uniformemente a f (vedasi relativa figura, e le forti differenze tra p_n e f vicino agli estremi $-5, 5$).

Fortunatamente ciò non succede per i nodi di Chebyshev, per cui comunque esistono funzioni continue f ma non di classe C^1 tali che l'interpolante p_n non converge puntualmente a f .

In generale,

Teorema 3.2 (Teorema di Faber (1914)). *Per ogni distribuzione di nodi esiste almeno una funzione $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, tale che l'errore di interpolazione $\|E_n[f]\|_\infty$ non converge a 0 per $n \rightarrow +\infty$.*

Per contro

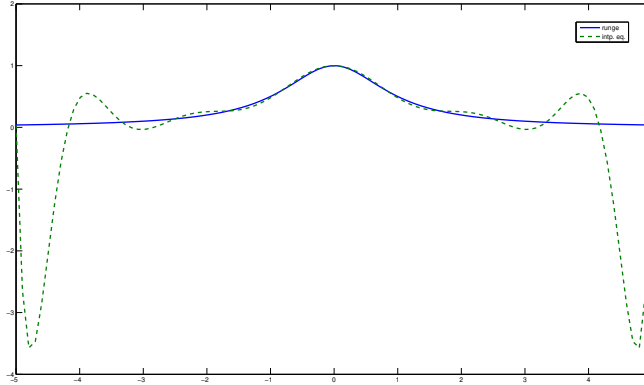


Figura 4: Grafico che illustra il polinomio interpolante di grado 12 su 13 nodi equispaziati della funzione di Runge, (la funzione ha la linea continua, il polinomio interpolatore è tratteggiato, si osservino le oscillazioni agli estremi).

Teorema 3.3. *Per ogni funzione $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, esiste almeno una distribuzione di nodi tale che $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.*

e

Teorema 3.4 (Teorema di Bernstein). *Per ogni funzione $f \in C^1([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, allora se p_n è l'interpolante di f in $n + 1$ nodi di Chebyshev, $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.*

Nelle tabelle e figure che seguono illustriamo il fenomeno di Runge, e di come l'interpolante in nodi equispaziati non converga uniformemente alla funzione di Runge, nell'intervallo $[-5, 5]$, nonostante la stessa sia di classe $C^\infty([-5, 5])$.

In virtù del teorema di Bernstein, essendo $f \in C^\infty([-5, 5])$, possiamo affermare che se i nodi di interpolazione sono quelli di Chebyshev allora $E_n[f] \rightarrow 0$. In effetti in tabella, si vede che l'errore in tali set di nodi ha numericamente tale proprietà, diversamente dall'interpolante in nodi equispaziati.

Bibliografia.

- [1] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
- [2] W. Gautschi, *Interpolation before and after Lagrange*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Vol. 70, 4 (2012), pp.347–368.
- [3] A. Quarteroni, *Elementi di calcolo scientifico*, Progetto Leonardo, 1999.
- [4] A. Quarteroni e F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico*, Springer Verlag, 2006.

n	E_n^e	E_n^c
1	$9.615e-01$	$9.615e-01$
2	$6.462e-01$	$6.462e-01$
3	$7.070e-01$	$8.289e-01$
4	$4.384e-01$	$4.600e-01$
5	$4.327e-01$	$6.386e-01$
6	$6.169e-01$	$3.112e-01$
7	$2.474e-01$	$4.596e-01$
8	$1.045e+00$	$2.047e-01$
9	$3.003e-01$	$3.191e-01$
10	$1.916e+00$	$1.322e-01$
20	$5.982e+01$	$1.774e-02$
30	$2.388e+03$	$2.426e-03$
40	$1.047e+05$	$3.399e-04$
50	$4.822e+06$	$4.622e-05$
60	$1.796e+11$	$6.381e-06$
70	$4.171e+07$	$8.755e-07$
80	$6.774e+05$	$1.196e-07$
90	$1.498e+05$	$1.648e-08$
100	$5.177e+03$	$2.256e-09$

Tabella 1: Grado n ed errore $E_n[f] = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_n(x)|$ con p_n interpolante f rispettivamente in $n+1$ nodi equispaziati e di Chebyshev (denotato rispettivamente con E_n^e, E_n^c). Si osservi come numericamente $E_n^c \rightarrow 0$.

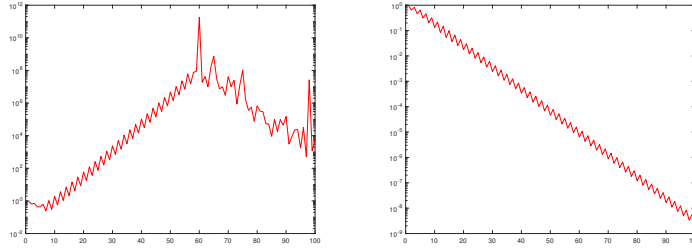


Figura 5: Grado n ed errore $E_n[f] = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_n(x)|$ con p_n interpolante f rispettivamente in $n+1$ nodi equispaziati (figura a sinistra) e di Chebyshev (figura a destra), in scala semilogaritmica.

[5] A. Quarteroni, R. Sacco e F. Saleri, *Matematica numerica*, Springer Verlag, 1998.

[6] Wikipedia, Fenomeno di Runge,
http://it.wikipedia.org/wiki/Fenomeno_di_Runge.

[7] Wikipedia, Interpolazione polinomiale,
http://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione_polinomiale.

- [8] Wikipedia, Interpolazione di Lagrange,
https://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione_di_Lagrange
- [9] Wikipedia, Newton polynomial,
http://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polynomial.
- [10] Wikipedia, Nodi di Chebyshev,
http://it.wikipedia.org/wiki/Nodi_di_Chebyshev.
- [11] Wikipedia, Teorema di Rolle,
https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Rolle
- [12] Wikipedia, Vandermonde matrix,
http://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix.