

Estrapolazione¹

A. Sommariva²

Keywords: Cenni al metodo di estrapolazione. Metodo di Romberg.

Revisione: 10 novembre 2018

1. Estrapolazione

Il metodo di estrapolazione (di Richardson) è una procedura molto generale basata sul calcolo di diverse stime, in funzione di un parametro $h > 0$, di una quantità incognita α , da combinare opportunamente allo scopo di fornire un valore più accurato di α stessa [1, p.347].

Data una formula di approssimazione $\phi_0(h)$ di una quantità α , con la struttura

$$\phi_0(h) = \alpha + ch^p + O(h^q), \quad q > p \geq 1$$

dove c è una costante indipendente da h , necessariamente

$$\phi_0\left(\frac{h}{2}\right) = \alpha + c\left(\frac{h^p}{2^p}\right) + O(h^{pq}). \quad (1)$$

da cui moltiplicando (1) per 2^p , visto che dalla teoria degli infinitesimi $2^p O(h^{pq}) + O(h^q) = O(h^q)$ in quanto $pq > q$, ricaviamo

$$\begin{aligned} \phi_0(h) - 2^p \phi_0(h/2) &= (\alpha + ch^p + O(h^q)) - 2^p(\alpha + c\left(\frac{h^p}{2^p}\right) + O(h^{pq})) \\ &= (1 - 2^p)\alpha + O(h^q) \end{aligned}$$

ovvero, visto che $O(h^q)/(1 - 2^p) = O(h^q)$,

$$\phi_1(h) = \frac{\phi_0(h) - 2^p \phi_0(h/2)}{1 - 2^p} = \alpha + O(h^q).$$

In definitiva, abbiamo ottenuto una nuova approssimazione di α , il cui errore non è più dell'ordine di p , ma di $q > p$ e quindi potenzialmente migliore. Ciò significa che se consideriamo ad esempio la successione di passi $h_0, h_0/2, h_0/4, \dots, h_0/2^k, \dots$, allora la successione $\{\phi_1(h_0/2^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge ad α più rapidamente di quanto non faccia $\{\phi_0(h_0/2^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Il procedimento può essere iterato per

$$\phi_0(h) = \alpha + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \dots + c_m h^{p_m} + O(h^{p_{m+1}})$$

con $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_m < p_{m+1}$.

A tal proposito, poniamo

$$\phi_0(h) = \phi_0(h)$$

e

$$\phi_1(h) = \frac{2^{p_1} \phi_0(h/2) - \phi_0(h)}{2^{p_1} - 1}.$$

Con qualche conto un po' tedioso, si ottiene

$$\phi_1(h) = \alpha + \sum_{k=2}^m c_k \left(1 - \frac{2^{p_1}}{2^{p_k}}\right) h^{p_k} + O(h^{p_{m+1}}).$$

Posto $c_k^{(1)} = c_k(1 - \frac{2^{p_1}}{2^{p_k}})$, abbiamo

$$\phi_1(h) = \alpha + c_2^{(1)} h^{p_2} + c_3^{(1)} h^{p_3} + \dots + c_m^{(1)} h^{p_m} + O(h^{p_{m+1}})$$

su cui possiamo reiterare il processo, ottenendo

$$\phi_i(h) = \frac{2^{p_i} \phi_{i-1}(h/2) - \phi_{i-1}(h)}{2^{p_i} - 1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Usualmente si tabula il procedimento, come si può vedere nella Tabella 1

$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = \dots$	$i = m$
$\phi_0(h_0)$				
$\phi_0(h_0/2)$	$\phi_1(h_0)$			
$\phi_0(h_0/4)$	$\phi_1(h_0/2)$	$\phi_2(h_0/2^{m-2})$		
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$\phi_0(h_0/2^m)$	$\phi_1(h_0/2^{m-1})$	$\phi_2(h_0/2^{m-2})$	\dots	$\phi_m(h_0)$

Tabella 1: Esempio di tabella di estrapolazione.

2. Alcuni esempi

Mostriamo di seguito alcuni esempi in cui si ha la struttura

$$\phi_0(h) = \alpha + ch^p + O(h^q), \quad q > p \geq 1.$$

Esempio. Per il teorema di Eulero-Mac Laurin,

1. se $f \in C^{(4)}([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$,
2. $T(f, h)$ è la formula dei trapezi composta, avente passo $h = (b - a)/m$, $m \in \{1, 2, \dots\}$, ovvero

$$T(f, h) = \frac{h}{2}(f(a) + 2f(a+h) + \dots + 2f(b-h) + f(b))$$

abbiamo

$$T(f, h) = \int_a^b f(x)dx + \frac{h^2(f'(b) - f'(a))}{12} + O(h^4)$$

Quindi, $T(f, h) = \alpha + ch^p + O(h^q)$ per $\alpha = \int_a^b f(x)dx$, $c = \frac{(f'(b) - f'(a))}{12}$, $p = 2$, $q = 4$.

Il metodo di estrapolazione legato alla formula dei trapezi è detto di Romberg (pubblicato nel 1955).

Di seguito, mostriamo alcune tabelle che mostrano tale metodo per calcolare

1. $\int_{-1}^1 \exp(x)dx = \exp(1) - \exp(-1)$,
2. $\int_{-1}^1 \cos(x)dx = \sin(1) - \sin(-1)$,
3. $\int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cos(x)dx = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}$.

In ognuna di esse, la prima colonna è il passo utilizzato, la seconda colonna è quella della formula dei trapezi con passo h_k , in cui si valutano vari $\phi_0(h_k)$, le colonne successive sono gli errori di $|\phi_j(h_k) - I|$ dove I è l'integrale da approssimare. Nei casi in questione è evidente il miglioramento dei risultati ottenuto nell'ultima colonna.

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
2.0e + 00	7.4e - 01					
1.0e + 00	1.9e - 01	1.2e - 02				
5.0e - 01	4.9e - 02	7.9e - 04	6.9e - 05			
2.5e - 01	1.2e - 02	5.1e - 05	1.2e - 06	1.1e - 07		
1.2e - 01	3.1e - 03	3.2e - 06	1.9e - 08	4.6e - 10	4.2e - 11	
6.2e - 02	7.7e - 04	2.0e - 07	3.0e - 10	1.8e - 12	4.5e - 14	4.0e - 15

Tabella 2: Calcolo dell'integrale $\int_{-1}^1 \exp(x)dx = \exp(1) - \exp(-1)$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo 2, ..., 1/16, e successiva estrapolazione.

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
2.0e + 00	6.0e - 01					
1.0e + 00	1.4e - 01	1.1e - 02				
5.0e - 01	3.5e - 02	6.0e - 04	6.4e - 05			
2.5e - 01	8.8e - 03	3.7e - 05	9.0e - 07	1.0e - 07		
1.2e - 01	2.2e - 03	2.3e - 06	1.4e - 08	3.5e - 10	3.9e - 11	
6.2e - 02	5.5e - 04	1.4e - 07	2.1e - 10	1.3e - 12	3.5e - 14	3.1e - 15

Tabella 3: Calcolo dell'integrale $\int_{-1}^1 \cos(x)dx = \sin(1) - \sin(-1)$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo 2, ..., 1/16, e successiva estrapolazione.

Esempio. Sviluppando il rapporto incrementale δ_+ dopo qualche conto simile a quelli già fatti, ma troncando la formula di Taylor rispettivamente al terzo e quinto ordine, abbiamo per $f \in C^3([a, b])$, $x, x + h \in [a, b]$,

$$f(x + h) = f(x) + f^{(1)}(x)h + f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(\xi)\frac{h^3}{6}, \quad \xi \in (x, x + h)$$

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$1.6e + 00$	$1.3e + 00$					
$7.9e - 01$	$3.1e - 01$	$2.4e - 03$				
$3.9e - 01$	$7.8e - 02$	$2.4e - 04$	$9.9e - 05$			
$2.0e - 01$	$1.9e - 02$	$1.6e - 05$	$1.3e - 06$	$2.6e - 07$		
$9.8e - 02$	$4.9e - 03$	$1.0e - 06$	$1.9e - 08$	$9.1e - 10$	$1.2e - 10$	
$4.9e - 02$	$1.2e - 03$	$6.6e - 08$	$3.0e - 10$	$3.5e - 12$	$1.1e - 13$	$1.2e - 14$

Tabella 4: Calcolo dell'integrale $\int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cos(x) dx = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo $2, \dots, 1/16$, e successiva estrapolazione.

e riarrangiando i termini, visto che $f \in C^3([a, b])$,

$$\delta_+(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f^{(1)}(x) + hf^{(2)}(x) + O(h^2), \quad \xi_x \in (x, x+h).$$

Quindi, $\delta_+(f, x, h) = \alpha + ch^p + O(h^q)$ per $\alpha = f'(x)$, $c = 1$, $p = 1$, $q = 2$.

Di seguito, mostriamo alcune tabelle che mostrano tale metodo per calcolare

1. $D \exp(x)$ in $x = 0$,
2. $D \frac{1}{1+x^2}$ in $x = 5$,
3. $D \sin(x)$ in $x = \pi/4$.

In ognuna di esse, la prima colonna è il passo utilizzato, la seconda colonna è quella della formula δ_+ con passo h_k , in cui si valutano vari $\phi_0(h_k)$, le colonne successive sono gli errori di $|\phi_j(h_k) - I|$ dove I è l'integrale da approssimare. Nei casi in questione è evidente il miglioramento dei risultati ottenuto nell'ultima colonna.

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$1.0e - 02$	$5.0e - 03$					
$5.0e - 03$	$2.5e - 03$	$8.4e - 06$				
$2.5e - 03$	$1.3e - 03$	$2.1e - 06$	$5.2e - 09$			
$1.3e - 03$	$6.3e - 04$	$5.2e - 07$	$6.5e - 10$	$1.3e - 12$		
$6.3e - 04$	$3.1e - 04$	$1.3e - 07$	$8.1e - 11$	$5.6e - 13$	$5.1e - 13$	
$3.1e - 04$	$1.6e - 04$	$3.3e - 08$	$1.0e - 11$	$1.1e - 13$	$1.5e - 13$	$1.7e - 13$

Tabella 5: Calcolo della derivata di $\exp(x)$ in $x = 0$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/100, 1/200, 1/400, \dots, 1/3200$, e successiva estrapolazione.

Esempio. Se $f \in C^5([a, b])$, $x - h, x + h \in [a, b]$, allora

$$f(x+h) = f(x) + f^{(1)}(x)h + f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} + f^{(5)}(\xi_1)\frac{h^5}{5!}, \quad \xi_1 \in (x, x+h)$$

$$f(x-h) = f(x) - f^{(1)}(x)h + f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} - f^{(5)}(\xi_2)\frac{h^5}{5!}, \quad \xi_2 \in (x-h, x)$$

per cui, in virtù del teorema dei valori intermedi, essendo $f \in C^5([a, b])$, esiste $\xi \in (x-h, x+h)$ tale che

$$\frac{f^{(5)}(\xi_1)\frac{h^5}{5!} + f^{(5)}(\xi_2)\frac{h^5}{5!}}{2} = f^{(5)}(\xi)$$

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$1.0e - 02$	$4.2e - 05$					
$5.0e - 03$	$2.1e - 05$	$5.2e - 08$				
$2.5e - 03$	$1.1e - 05$	$1.3e - 08$	$3.0e - 11$			
$1.3e - 03$	$5.3e - 06$	$3.3e - 09$	$3.8e - 12$	$1.3e - 14$		
$6.3e - 04$	$2.6e - 06$	$8.2e - 10$	$4.5e - 13$	$2.8e - 14$	$3.1e - 14$	
$3.1e - 04$	$1.3e - 06$	$2.1e - 10$	$6.5e - 14$	$1.1e - 14$	$1.3e - 14$	$1.5e - 14$

Tabella 6: Calcolo della derivata di $1/(1+x^2)$ in $x = 5$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/100, 1/200, 1/400, \dots, 1/3200$, e successiva estrapolazione.

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$1.0e - 02$	$3.5e - 03$				
$5.0e - 03$	$1.8e - 03$	$5.9e - 06$			
$2.5e - 03$	$8.8e - 04$	$1.5e - 06$	$3.7e - 09$		
$1.3e - 03$	$4.4e - 04$	$3.7e - 07$	$4.6e - 10$	$9.3e - 13$	
$6.3e - 04$	$2.2e - 04$	$9.2e - 08$	$5.8e - 11$	$6.6e - 15$	$5.5e - 14$

Tabella 7: Calcolo della derivata di $\sin(x)$ in $x = \pi/4$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/100, 1/200, 1/400, \dots, 1/1600$, e successiva estrapolazione.

e quindi

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x-h) &= f^{(1)}(x) \cdot 2h + f^{(3)}(x) \frac{h^3}{6} + (f^{(5)}(\xi_1) \frac{h^3}{5!} + f^{(5)}(\xi_2) \frac{h^5}{5!}) \\
&= f^{(1)}(x) \cdot 2h + f^{(3)}(x) \frac{h^3}{6} + f^{(5)}(\xi) \frac{2 \cdot h^5}{5!} \\
&= f^{(1)}(x) \cdot 2h + f^{(3)}(x) \frac{h^3}{6} + O(h^5)
\end{aligned}$$

da cui riarrangiando i termini

$$\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{12} f^{(3)}(x) + O(h^4).$$

ovvero della forma $\delta_2(f, x, h) = \alpha + ch^p + O(h^q)$ per $\alpha = f'(x)$, $c = f^{(3)}(x)/12$, $p = 2$, $q = 4$.

Di seguito, mostriamo alcune tabelle che mostrano tale metodo per calcolare

1. $D \exp(x)$ in $x = 0$,
2. $D \frac{1}{1+x^2}$ in $x = 5$,
3. $D \sin(x)$ in $x = \pi/4$.

In ognuna di esse, la prima colonna è il passo utilizzato, la seconda colonna è quella della formula δ_2 con passo h_k , in cui si valutano vari $\phi_0(h_k)$, le colonne successive sono gli errori di $|\phi_j(h_k) - I|$ dove I è l'integrale da approssimare. Nei casi in questione è evidente il miglioramento dei risultati ottenuto nell'ultima colonna.

Bibliografia.

- [1] A. Quarteroni, R. Sacco e F. Saleri, *Matematica Numerica*, Springer Verlag, 1998.

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$1.0e - 01$	$1.7e - 03$				
$5.0e - 02$	$4.2e - 04$	$2.1e - 07$			
$2.5e - 02$	$1.0e - 04$	$1.3e - 08$	$3.1e - 12$		
$1.3e - 02$	$2.6e - 05$	$8.1e - 10$	$4.9e - 14$	$8.9e - 16$	
$6.3e - 03$	$6.5e - 06$	$5.1e - 11$	$1.6e - 15$	$8.9e - 16$	$8.9e - 16$

Tabella 8: Calcolo della derivata di $\exp(x)$ in $x = 0$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/10, 1/20, 1/40, 1/80, 1/160$, e successiva estrapolazione.

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$1.0e - 01$	$1.1e - 05$			
$5.0e - 02$	$2.6e - 06$	$1.3e - 09$		
$2.5e - 02$	$6.6e - 07$	$8.2e - 11$	$3.5e - 14$	
$1.3e - 02$	$1.6e - 07$	$5.1e - 12$	$9.2e - 16$	$3.9e - 16$

Tabella 9: Calcolo della derivata di $1/(1 + x^2)$ in $x = 5$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/10, 1/20, 1/40, 1/80$, e successiva estrapolazione.

h	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$1.0e - 01$	$1.2e - 03$			
$5.0e - 02$	$2.9e - 04$	$1.5e - 07$		
$2.5e - 02$	$7.4e - 05$	$9.2e - 09$	$2.2e - 12$	
$1.3e - 02$	$1.8e - 05$	$5.8e - 10$	$4.1e - 14$	$6.9e - 15$

Tabella 10: Calcolo della derivata di $\sin(x)$ in $x = \pi/4$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/10, 1/20, 1/40, 1/80$, e successiva estrapolazione.