

Integrazione numerica¹

A. Sommariva²

Keywords: Formule algebriche e composte, convergenza e stabilità, esempi: formula dei trapezi e della parabola (Cavalieri-Simpson); formule a pesi positivi.

Revisione: 10 novembre 2018

1. Integrazione numerica

In questa sezione mostriamo come sia possibile calcolare numericamente integrali definiti di funzioni $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo limitato.

Valgono i seguenti risultati.

Teorema 1.1. *L'operazione funzionale di integrazione (nel continuo) è stabile, ovvero se \tilde{f} approssima una funzione $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo limitato, allora vale la stima*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \tilde{f}(x)dx \right| \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|.$$

Dimostrazione. L'asserto segue dal fatto che

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \tilde{f}(x)dx \right| &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \int_a^b 1 \cdot dx \\ &= (b-a) \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|. \end{aligned} \quad (1)$$

Commento. L'asserto dice che se \tilde{f} è vicina a f relativamente alla distanza $\text{dist}(f, \tilde{f}) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|$, allora $\int_a^b \tilde{f}(x)dx$ non può essere arbitrariamente distante da $\int_a^b f(x)dx$, concetto che viene descritto come *stabilità* del funzionale di integrazione.

Corollario 1.2. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue che converge uniformemente a $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo limitato, ovvero*

$$\lim_n \text{dist}(f_n, f) := \lim_n \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

allora

$$\lim_n \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = 0,$$

ovvero $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$.

Dimostrazione. L'asserto segue dal fatto che dal teorema 1.1 abbiamo

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

e quindi visto che $b-a$ è finito e

$$\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

per il teorema del confronto abbiamo pure che

$$\lim_n \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = 0.$$

Commento. L'asserto implica che se f_n è una successione che converge uniformemente alla integranda $f \in C([a, b])$ (ovvero $\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$), $-\infty < a < b < +\infty$, allora qualsiasi sia la tolleranza prestabilita ϵ esiste n tale che $|\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx| < \epsilon$.

L'idea di base delle formule di integrazione approssimata (*formule di quadratura* è di sostituire ad un f un'opportuna interpolante f_n .

Le formule di quadratura algebriche, a volte dette *interpolatorie*, sono ottenute integrando l'unico polinomio interpolatore su tutti i dati $(x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$.

Di conseguenza, se p_n è tale polinomio, e L_k il k -simo polinomio di Lagrange relativamente ai nodi $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$, ovvero

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_n)}{(x_k-x_0) \dots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots (x_k-x_n)},$$

abbiamo da $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$, posto $w_k := \int_a^b L_k(x) dx$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k). \end{aligned} \quad (2)$$

Le quantità w_k , $k = 0, \dots, n$ sono detti *pesi*, mentre i punti x_k , $k = 0, \dots, n$ sono detti *nod*.

Nota. 1.3. Il concetto di formule interpolatorie fu sviluppato per primo probabilmente da Lagrange nel 1795.

2. Alcune formule di quadratura

Il proposito di questa sezione è di calcolare integrali definiti di funzioni $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ limitato, dove $f \approx f_n$ con

- f_n polinomio di grado n che interpola f nei nodi $x_k, k = 0, \dots, n$ oppure
- s_m spline polinomiale di grado m che interpola f nei nodi $x_k, k = 0, \dots, n$.

Risulterà utile la seguente definizione

Definizione. Una formula

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^M w_i f(x_i)$$

ha *grado di precisione almeno N* se e solo se è esatta per tutti i polinomi f di grado inferiore o uguale a N .

Ha inoltre grado di precisione N se e solo se è esatta per ogni polinomio di grado inferiore o uguale a N ed esiste un polinomio di grado $N + 1$ per cui non lo sia.

Di seguito indicheremo con \mathbb{P}_m i polinomi di grado minore o uguale a m .

Vale il seguente teorema,

Teorema 2.1. *Una formula a n nodi è interpolatoria se e solo se ha grado di precisione n .*

2.1. Regola del rettangolo

Se $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$ e $x_0 \in [a, b]$ ricaviamo $L_0(x) = 1$ ed essendo

$$\int_a^b L_0(x)dx = b - a, \quad (3)$$

deduciamo la regola detta del *rettangolo* (cf. [6])

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{k=0}^0 w_k f(x_k) = (b - a)f(a). \quad (4)$$

Dal punto di vista geometrico, visto il grafico dell'interpolante p_0 in un solo punto, si ottiene che l'integrale di p_0 è pari a calcolare l'area di un rettangolo con lati di lunghezza $f(a)$ e $b - a$, da cui riotteniamo il risultato in (4).

Per costruzione, se

- f è un polinomio di grado 0,
- p_0 è il polinomio che interpola il dato (x_0, y_0) ,

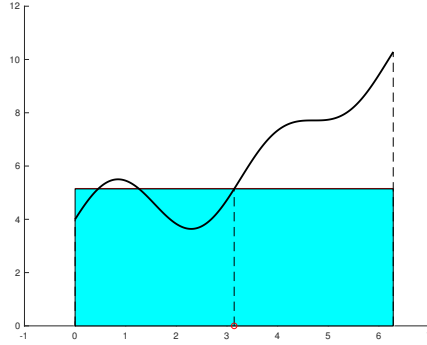


Figura 1: Regola del rettangolo con nodo $x_0 = (a+b)/2$ per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

per l'unicità del polinomio interpolatore abbiamo $f = p_0$ e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_0(x) dx = (b-a)f(a).$$

Di conseguenza il grado di precisione è almeno 0.

Se in particolare si sceglie quale $x_0 = (a+b)/2$, otteniamo la regola del *punto medio*, che denoteremo con S_0 . In questo caso, se $f \in C^{(2)}(a, b)$ l'errore risulta

$$E_0(f) := I(f) - S_0(f) = \frac{-(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Visto che un polinomio $q_1 \in \mathbb{P}_1$ ha derivata seconda nulla, deduciamo che $E_0(q_1) = 0$, ovvero che il grado di precisione è almeno 1. Per un qualsiasi polinomio $q_2 \in \mathbb{P}_2$, l'errore risulta uguale a $\frac{-(b-a)^3}{12}$ e quindi il grado di precisione della formula del punto medio è esattamente 1.

2.2. Formule di tipo Newton-Cotes (chiuse)

Definizione. Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} . Una formula $S_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ tale che $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ si dice di tipo *Newton-Cotes chiusa* (cf. [3, p.336]) se

- i nodi sono equispaziati, cioè

$$x_i = a + \frac{(i-1)(b-a)}{n-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

- i pesi sono

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{x_j - x_i}$$

e quindi la formula è interpolatoria e ha grado di precisione almeno $n - 1$.

Nota. 2.2.

- Gli estremi a, b , sono nodi quadratura.
- Esistono formule dette di Newton-Cotes aperte i cui nodi sono equidistanti, ma non comprendono gli estremi. Alcuni esempi sono, posto $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$ (cf.[4])
 1. regola del rettangolo,
 2. regola a due punti: $(3h/2) \cdot (f_1 + f_2)$, con errore $(3h^3/4)f^{(2)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$,
 3. regola di Masina: $(4h/3) \cdot (2f_1 - f_2 + 2f_3)$, con errore $(28h^5/90)f^{(4)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$,
 4. regola a quattro punti: $(5h/24) \cdot (11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4)$, con errore $(95h^5/144)f^{(4)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$.

Nota storica. 2.3. Queste formule furono introdotte da Newton nel 1676 e perfezionate da Cotes nel 1722, che le calcolò fino a quelle con 11 nodi.

2.3. Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson

Di seguito introduciamo le formule di tipo Newton-Cotes chiuse, per $n = 0, 1, 2$.

2.3.1. Regola del trapezio

Se $f \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$ e $x_0 = a$ e $x_1 = b$ ricaviamo

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{b - a}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}$$

ed essendo

$$\begin{aligned} \int_a^b L_0(x) dx &= \int_a^b \frac{b - x}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b (b - x) dx \\ &= \frac{1}{b - a} \cdot \frac{-1}{2} ((b - b)^2 - (b - a)^2) \\ &= \frac{b - a}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned} \int_a^b L_1(x) dx &= \int_a^b \frac{x - a}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b (x - a) dx \\ &= \frac{1}{b - a} \cdot \frac{1}{2} ((b - a)^2 - (a - a)^2) \\ &= \frac{b - a}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

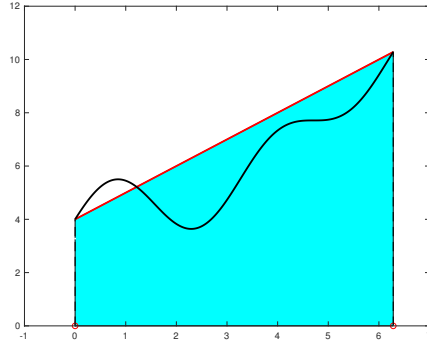


Figura 2: Regola del trapezio per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

deduciamo la regola detta del *trapezio* (cf. [7])

$$\int_a^b f(x) \approx S_1(f) := \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)). \quad (7)$$

Visto che corrisponde a unire i dati (x_0, y_0) , (x_1, y_1) mediante un segmento, in effetti se y_0, y_1 hanno lo stesso segno, ci si riconduce a calcolare l'area di un trapezio, la cui base ha lunghezza $b-a$ e le altezze sono $f(a)$ e $f(b)$ da cui riotteniamo il risultato in (7).

Per costruzione, se

- f è un polinomio di grado al più 1,
- p_1 è il polinomio che interpola i dati (x_0, y_0) , (x_1, y_1) ,

per l'unicità del polinomio interpolatore abbiamo $f = p_1$ e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_1(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

Di conseguenza il grado di precisione è almeno 1 e con facili controesempi, si mostra che il grado di precisione è esattamente 1.

Si dimostra che se $f \in C^2([a, b])$ allora l'errore compiuto è (cf. [1, p.252-253])

$$E_1(f) := I(f) - S_1(f) = \frac{-(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Nota. 2.4. Visto che un polinomio p_1 di grado minore o uguale a 1 ha derivata seconda nulla, deduciamo che $E_1(p_1) = 0$, ovvero che il grado di precisione è almeno 1. Per un qualsiasi polinomio di grado esattamente 2, l'errore risulta uguale a $-(b-a)^3/6$ da cui abbiamo una dimostrazione alternativa che il grado di precisione è esattamente 1.

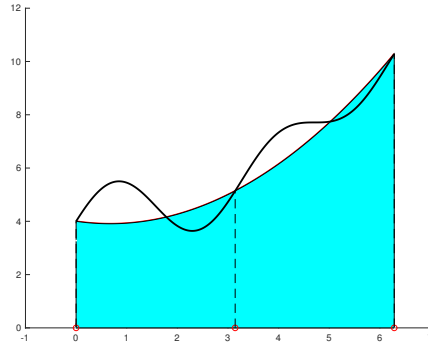


Figura 3: Regola di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

2.3.2. Regola di Cavalieri-Simpson (o della parabola)

Qualora i nodi di quadratura siano $x_0 = a$, $x_1 = (b + a)/2$, $x_2 = b$ con la stessa tecnica, integrando il polinomio p_2 di grado 2 che interpola i dati $(x_k, y_k)_{k=0,1,2}$, ma con calcoli dei pesi un po' più tedious, otteniamo la formula detta di Cavalieri-Simpson (cf. [8])

$$\int_a^b f(x) \approx S_2(f) := \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f((a+b)/2) + \frac{b-a}{6} f(b). \quad (8)$$

Per costruzione, se

- f è un polinomio di grado al più 2,
- p_2 è il polinomio che interpola i dati $x_0 = a$, $x_1 = (b + a)/2$, $x_2 = b$,

per l'unicità del polinomio interpolatore abbiamo $f = p_2$ e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_2(x) dx = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f((a+b)/2) + \frac{b-a}{6} f(b).$$

Di conseguenza il grado di precisione è almeno 2 e si mostra che è esattamente 3.

Si dimostra che se $f \in C^4([a, b])$ allora l'errore compiuto è (cf. [1, p.256-257])

$$E_2(f) := I(f) - S_2(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad \xi \in (a, b).$$

Nota. 2.5. Visto che un polinomio p_3 di grado minore o uguale a 3 ha derivata quarta nulla, deduciamo che $E_2(p_3) = 0$, ovvero che il grado di precisione è almeno 3. Per un qualsiasi polinomio di grado esattamente 4, l'errore risulta uguale a $\frac{-h^5}{90} 4! \neq 0$ da cui abbiamo una dimostrazione alternativa che il grado di precisione della regola di Cavalieri-Simpson è esattamente 3.

Nota. 2.6. Le formule di Cavalieri-Simpson furono sviluppate da Cavalieri nel 1635, erano note tanto a Gregory che a Cotes, e riscoperte da Simpson nel 1743 in *Mathematical Dissertations on a Variety of physical and analytical aspect* [2, p.271].

3. Altre formule di Newton-Cotes chiuse

In generale uno può applicare la tecnica vista in precedenza per ottenere formule di quadratura di tipo Newton-Cotes con grado di precisione $g.d.p$ maggiore.

Si ricavano, posto $f_k = f(x_k)$, e $x_k = a + k \cdot (b - a)/n$, con $k = 0, \dots, n$, (cf. [9])

- *Regola di Simpson 3/8*, $n = 3$: $\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_4)$, avente $g.d.p = 3$,
- *Regola di Milne-Boole*, $n = 4$: $\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$, avente $g.d.p = 5$,
- *Regola a sei punti*, $n = 5$: $\frac{5h}{288}(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5)$, avente $g.d.p = 5$,
- *Regola di Weddle-Hardy*, $n = 6$: $\frac{h}{140}(41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6)$, avente $g.d.p = 7$,
- *Regola a otto punti* $n = 7$: $\frac{7h}{17280}(751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 + 2989f_4 + 1323f_5 + 3577f_6 + 751f_7)$, avente $g.d.p = 7$,
- *Regola a nove punti*, $n = 8$: $\frac{4h}{14175}(989f_0 + 5888f_1 - 928f_2 + 10496f_3 - 4540f_4 + 10496f_5 - 928f_6 + 5888f_7 + 989f_8)$, avente $g.d.p = 9$,
- *Regola a dieci punti*, $n = 9$: $\frac{9h}{89600}(2857(f_0 + f_9) + 15741(f_1 + f_8) + 1080(f_2 + f_7) + 19344(f_3 + f_6) + 5778(f_4 + f_5))$, avente $g.d.p = 9$,
- *Regola a undici punti*, $n = 10$: $\frac{5h}{299376}(16067(f_0 + f_{10}) + 106300(f_1 + f_9) - 48525(f_2 + f_8) + 272400(f_3 + f_7) - 260550(f_4 + f_6) + 427368f_5)$, avente $g.d.p = 11$.

Si osserva che fino $n = 8$ hanno tutti i pesi positivi mentre per $n = 9, 11$ ciò non succede. Ognuna di queste regole, con ragionamenti analoghi a quelli effettuati per quelle del trapezio e di Cavalieri-Simpson, ha grado di precisione almeno n (si osservi che i punti sono $n + 1$).

4. Formule composte

Le formule composte sono ottenute integrando un interpolante polinomiale a tratti di grado locale fissato s che sono localmente algebriche, cioè ottenute integrando un singolo polinomio interpolatore di grado s , in $[x_{ks}, x_{(k+1)s}]$, con $k = 0, \dots, (n/s) - 1$, con n multiplo di s .

In altre parole, come si vede facilmente,

Definizione. Sia

1. $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato,
2. $x_j = a + jh$ con $h = (b - a)/N$, $j = 0, \dots, N$,
3. $S(f, \alpha, \beta)$ una regola di quadratura nel generico intervallo limitato $[\alpha, \beta]$.

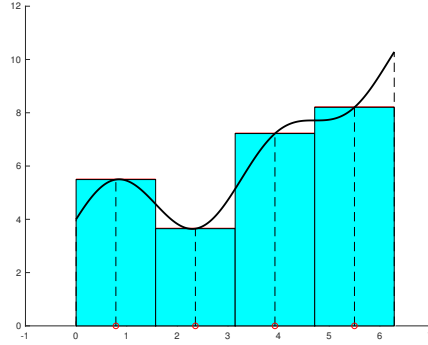


Figura 4: Formula del punto medio composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste).

La formula di quadratura

$$S^{(c)}(f, a, b, N) = \sum_{j=0}^{N-1} S(f, x_j, x_{j+1}) \quad (9)$$

è detta formula composta di S .

Nota. 4.1. In questa trattazione i punti x_j , $j = 0, \dots, N$, sono equispaziati, ma con qualche fatica si può effettuare nel caso generale di punti arbitrari.

4.0.1. Formula composta del punto medio

La formula composta del punto medio è definita da

$$S_0^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k), \quad (10)$$

dove

$$x_k = a + (2k-1)(b-a)/2N,$$

con $k = 1, \dots, N$.

Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_0^{(c)}(f) := I(f) - S_0^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{(b-a)^2}{24} f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

Il grado di precisione è 1, come la regola del punto medio, ma se $N > 1$ allora il passo h è minore.

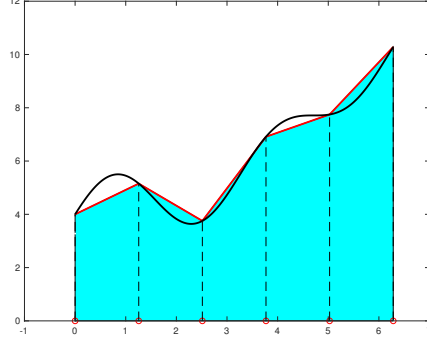


Figura 5: Formula dei trapezi composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste). In particolare si vede il grafico dell'interpolante a tratti, avente quali punti di discontinuità $2\pi/3, 4\pi/3$.

4.0.2. Formula composta dei trapezi

Una delle formule composte più nota è quella dei trapezi, definita da

$$S_1^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right], \quad (11)$$

Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

Il grado di precisione è 1, come la regola del trapezio, ma se $N > 1$ allora il passo h è minore.

Nota. 4.2. In virtù della formula di Eulero-Mac Laurin, si mostra che la formula composta dei trapezi è particolarmente indicata per integrare funzioni periodiche con derivati che sono tali, ed è utilizzata nella ben nota Fast Fourier Transform.

4.0.3. Formula composta di Cavalieri-Simpson

La formula composta di Cavalieri-Simpson è definita da

$$S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N}) \right] \quad (12)$$

Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_2^{(c)}(f) := I(f) - S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2} \right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

Il grado di precisione è quindi 3, come la regola di Cavalieri-Simpson, ma se $N > 1$ allora il passo h è minore.

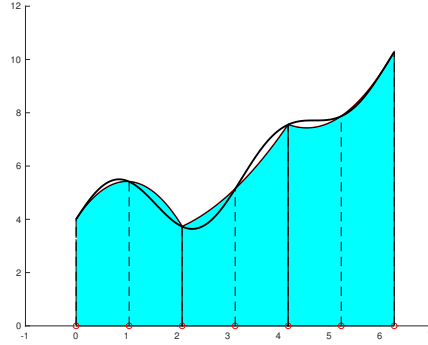


Figura 6: Formula di Cavalieri-Simpson composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste).

5. Alcuni confronti numerici

In questa sezione forniamo alcuni esempi in cui applichiamo le formule composte per integrare alcune funzioni $f \in C([a, b])$.

Esempio. Consideriamo l'integrale definito

$$I = \int_0^\pi \exp(x) \cos(x) dx = -(\exp(\pi) + 1)/2.$$

Nella prima tabella che segue esponiamo gli errori compiuti dalle regole composte per $N = 1, 2, 4, \dots, 512$.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$1.2e+01$	$2.3e+01$	$4.8e-01$	1	2	3
2	$2.8e+00$	$5.3e+00$	$8.5e-02$	2	3	5
4	$6.4e-01$	$1.3e+00$	$6.1e-03$	4	5	9
8	$1.6e-01$	$3.1e-01$	$3.9e-04$	8	9	17
16	$3.9e-02$	$7.8e-02$	$2.5e-05$	16	17	33
32	$9.7e-03$	$1.9e-02$	$1.6e-06$	32	33	65
64	$2.4e-03$	$4.8e-03$	$9.7e-08$	64	65	129
128	$6.1e-04$	$1.2e-03$	$6.1e-09$	128	129	257
256	$1.5e-04$	$3.0e-04$	$3.8e-10$	256	257	513
512	$3.8e-05$	$7.6e-05$	$2.4e-11$	512	513	1025

Tabella 1: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi \exp(x) \cos(x) dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 3$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 3$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_3^{(c)}(f))_N$
1	4.33	4.27	5.59
2	4.34	4.20	13.92
4	4.10	4.06	15.54
8	4.03	4.02	15.89
16	4.01	4.00	15.97
32	4.00	4.00	15.99
64	4.00	4.00	16.00
128	4.00	4.00	16.00
256	4.00	4.00	16.00

Tabella 2: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi \exp(x) \cos(x) dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Osserviamo che i valori relativi alle formule composte del punto medio e dei trapezi tende a 4, mentre quelli della formula composta di Cavalieri-Simpson tende a 16.

Diamo una spiegazione qualitativa. Se l'errore è per qualche costante C indipendente da N

$$(E_k^{(c)}(f))_N \approx \frac{C}{N^p} = C^* h^p$$

allora

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}} \approx \frac{\frac{C}{N^p}}{\frac{C}{(2N)^p}} = 2^p.$$

- Visto che per le formule composte del punto medio e dei trapezi $(r_k^{(c)}(f))_N \rightarrow 4 = 2^2$, abbiamo che $p = 2$ e quindi $(E_k^{(c)}(f))_N \approx C^* h^2$.

In effetti l'errore delle formule composte del punto medio è

$$E_0^{(c)}(f) := I(f) - S_0^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{(b-a)}{24} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

mentre quella dei composti è

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

- Visto che per le formule composte di Cavalieri-Simpson $(r_3^{(c)}(f))_N \rightarrow 16 = 2^4$, abbiamo che $p = 4$ e quindi $(E_2^{(c)}(f))_N \approx C^* h^4$.

In effetti l'errore delle formule composte di Cavalieri-Simpson è

$$E_2^{(c)}(f) := I(f) - S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) \approx C^* h^4.$$

Esempio. Consideriamo l'integrale definito

$$I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x} dx = 2/9.$$

Nella prima tabella che segue esponiamo gli errori compiuti dalle regole composte per $N = 1, 2, 4, \dots, 1024$.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$1.3e-01$	$2.8e-01$	$3.4e-03$	1	2	3
2	$3.6e-02$	$7.2e-02$	$2.3e-04$	2	3	5
4	$9.1e-03$	$1.8e-02$	$1.5e-05$	4	5	9
8	$2.3e-03$	$4.6e-03$	$1.0e-06$	8	9	17
16	$5.7e-04$	$1.1e-03$	$6.5e-08$	16	17	33
32	$1.4e-04$	$2.8e-04$	$4.1e-09$	32	33	65
64	$3.6e-05$	$7.1e-05$	$2.6e-10$	64	65	129
128	$8.9e-06$	$1.8e-05$	$1.7e-11$	128	129	257
256	$2.2e-06$	$4.5e-06$	$1.0e-12$	256	257	513
512	$5.6e-07$	$1.1e-06$	$6.6e-14$	512	513	1025
1024	$1.4e-07$	$2.8e-07$	$4.1e-15$	1024	1025	2049

Tabella 3: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x} dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x) dx$, utilizzando N suddivisioni, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

Osserviamo che i valori relativi alle formule composte del punto medio e dei trapezi tende a 4, mentre quelli della formula composta di Cavalieri-Simpson tende a 16, e quindi con errori rispettivamente del tipo $C^* h^2$ e $C^* h^4$.

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_3^{(c)}(f))_N$
1	3.76	3.86	14.56
2	3.93	3.96	15.00
4	3.98	3.99	15.31
8	4.00	4.00	15.53
16	4.00	4.00	15.67
32	4.00	4.00	15.77
64	4.00	4.00	15.84
128	4.00	4.00	15.89
256	4.00	4.00	15.92
512	4.00	4.00	16.06

Tabella 4: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi \exp(x) \cos(x) dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Esempio. Consideriamo l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} dx = 2/3.$$

Nella prima tabella che segue esponiamo gli errori compiuti dalle regole composte per $N = 1, 2, 4, \dots, 2048$.

A differenza del caso precedente, la convergenza delle tre famiglie di formule è molto lenta, ed è principalmente dovuto al fatto che la funzione pur essendo continua in $[a, b]$, non appartiene nemmeno a $C^1[0, 1]$, visto che non è derivabile in 0.

Ciò nonostante risultano convergenti.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x) dx$, utilizzando N suddivisioni, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

Osserviamo che i valori relativi alle tre formule composte del punto medio e dei trapezi tende a $2.83 \approx 2^{1.5}$ e quindi la convergenza è del tipo $C^* h^{1.5}$ (cf. [1, p262 e p.291]).

Esempio. Consideriamo l'integrale definito

$$I = \int_0^{100} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}(100)$$

dove $\operatorname{erf}(x)$ è la funzione di errore.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$4.0e-02$	$1.7e-01$	$2.9e-02$	1	2	3
2	$1.6e-02$	$6.3e-02$	$1.0e-02$	2	3	5
4	$6.3e-03$	$2.3e-02$	$3.6e-03$	4	5	9
8	$2.4e-03$	$8.5e-03$	$1.3e-03$	8	9	17
16	$8.7e-04$	$3.1e-03$	$4.5e-04$	16	17	33
32	$3.2e-04$	$1.1e-03$	$1.6e-04$	32	33	65
64	$1.1e-04$	$4.0e-04$	$5.6e-05$	64	65	129
128	$4.1e-05$	$1.4e-04$	$2.0e-05$	128	129	257
256	$1.5e-05$	$5.0e-05$	$7.0e-06$	256	257	513
512	$5.2e-06$	$1.8e-05$	$2.5e-06$	512	513	1025
1024	$1.8e-06$	$6.3e-06$	$8.8e-07$	1024	1025	2049
2048	$6.5e-07$	$2.2e-06$	$3.1e-07$	2048	2049	4097

Tabella 5: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 \sqrt{x} dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_3^{(c)}(f))_N$
1	2.47	2.64	2.82
2	2.59	2.70	2.83
4	2.67	2.74	2.83
8	2.72	2.77	2.83
16	2.75	2.79	2.83
32	2.78	2.80	2.83
64	2.79	2.81	2.83
128	2.80	2.81	2.83
256	2.81	2.82	2.83
512	2.82	2.82	2.83
1024	2.82	2.82	2.83

Tabella 6: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi \exp(x) \cos(x) dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Nella prima tabella che segue esponiamo gli errori compiuti dalle regole composte per $N = 1, 2, 4, \dots, 512$.

Per $n \leq 64$ l'errore decresce lentamente, ed è comprensibile visto che l'intervallo ha ampiezza 100 e quindi il numero di campionamenti delle formule composte sono troppo pochi, ossia il valore di h troppo grande.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$8.9e-01$	$4.9e+01$	$1.6e+01$	1	2	3
2	$8.9e-01$	$2.4e+01$	$7.4e+00$	2	3	5
4	$8.9e-01$	$1.2e+01$	$3.3e+00$	4	5	9
8	$8.9e-01$	$5.4e+00$	$1.2e+00$	8	9	17
16	$8.9e-01$	$2.2e+00$	$1.6e-01$	16	17	33
32	$6.1e-01$	$6.8e-01$	$1.8e-01$	32	33	65
64	$3.1e-02$	$3.1e-02$	$1.0e-02$	64	65	129
128	$1.7e-07$	$1.7e-07$	$5.6e-08$	128	129	257
256	$1.1e-16$	$1.1e-16$	$2.2e-16$	256	257	513

Tabella 7: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^{100} \exp(-x^2) dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_3^{(c)}(f))_N$
1	1.00	2.04	2.12
2	1.00	2.08	2.27
4	1.00	2.17	2.74
8	1.00	2.40	7.69
16	1.44	3.31	0.85
32	19.74	21.74	17.74
64	184935.89	184937.89	184933.89
128	1515188455.00	1515188459.00	252531408.50

Tabella 8: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^{100} \exp(-x^2) dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Osserviamo che dal caso precedente i valori relativi alle formule composte del punto medio e dei trapezi non tendono a 4, e quelli della formula composta di Cavalieri-Simpson non tendono a 16.

6. Stabilità delle formule di quadratura

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e consideriamo la formula di quadratura

$$S_N(f) := \sum_{j=0}^N w_j f_j \approx \int_a^b f(x) dx \quad (13)$$

dove $f_j = f(x_j)$, con $\{x_j\}_{j=0, \dots, N}$ nodi di quadratura.

Si supponga che invece di $\{f_j\}_j$ si disponga di una loro approssimazione $\{\tilde{f}_j\}_j$.

Ci si chiede come cambia il valore dell'integrale, valutando

$$\tilde{S}_N(f) := \sum_{j=1}^N w_j \tilde{f}_j \quad (14)$$

invece di $S_N(f)$.

Da (13), (14), ricaviamo per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |S_N(f) - \tilde{S}_N(f)| &= \left| \sum_{j=1}^N w_j f_j - \sum_{j=1}^N w_j \tilde{f}_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^N w_j (f_j - \tilde{f}_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N |w_j| |f_j - \tilde{f}_j| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^N |w_j| \right) \cdot \max_j |f_j - \tilde{f}_j|. \end{aligned} \quad (15)$$

Quindi la quantità

$$\mathcal{I}(S_N) = \sum_{j=1}^N |w_j| \quad (16)$$

è un *indice di stabilità* della formula di quadratura S_N .

Se $\mathcal{I}(S_N)$ è grande, a piccole perturbazioni $\max_j |f_j - \tilde{f}_j|$ possono corrispondere valori degli integrali $S_N(f)$, $\tilde{S}_N(f)$ molto diversi.

Se la formula ha grado di precisione almeno 0 allora

$$\int_a^b 1 dx = \sum_{j=1}^N w_j. \quad (17)$$

e si ha $\sum_{j=1}^N w_j \leq \sum_{j=1}^N |w_j|$ con la disuguaglianza stretta se e solo se qualche peso w_j è negativo.

Di conseguenza, da (16), (17),

$$b - a = \int_a^b 1 \, dx = \sum_{j=1}^N w_j \leq \sum_{j=1}^N |w_j| = \mathcal{I}(S_N)$$

con la disuguaglianza stretta se qualche peso w_j è negativo.

Quindi la presenza di pesi negativi peggiora l'indice di stabilità $\sum_{j=1}^N |w_j|$, mentre se sono tutti positivi e la formula ha grado di precisione almeno 0

$$\mathcal{I}(S_N) = b - a$$

e quindi piccoli errori nel valutare la funzione f nei nodi di quadratura non comporta che $S_N(f)$ e $\tilde{S}_N(f)$ possano essere arbitrariamente distanti.

Nella tabella relativa agli indici di stabilità valutiamo la somma dei moduli dei pesi delle regole di Newton-Cotes a $n + 1$ nodi. Come si vede le formule pur avendo grado di precisione almeno n , cominciano a essere meno stabili al crescere di n .

n	\mathcal{I}
0	2.00000e + 00
1	2.00000e + 00
2	2.00000e + 00
3	2.00000e + 00
4	2.00000e + 00
5	2.00000e + 00
6	2.00000e + 00
7	2.00000e + 00
8	2.90243e + 00
9	2.00000e + 00
10	6.12959e + 00

Tabella 9: Indice di stabilità $\mathcal{I}(S_n)$ delle formule di Newton Cotes chiuse aventi $n + 1$ nodi.

7. Convergenza delle formule di quadratura

7.1. Convergenza delle formule interpolatorie

Definita la famiglia di formule di quadratura $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (con grado di precisione non necessariamente n), definite come

$$S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \approx I(f) := \int_a^b f(x) dx \quad (18)$$

introduciamo l'errore della formula n -sima

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}).$$

Qualora

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \rightarrow 0$$

la famiglia di formule $\{S_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge all'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$.

In altri termini, la famiglia di formule $\{S_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ risulta convergente all'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ se

$$S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

La convergenza delle formule algebriche, ottenute integrando il polinomio interpolatore, dipende dalla famiglia di nodi prescelti.

Se consideriamo i nodi di Chebyshev $\{x_k^{(\text{ch})}\}_{k=0,\dots,n}$, per quanto visto nell'interpolazione polinomiale, abbiamo che se $f \in C^1([a, b])$ con $[a, b]$ limitato e p_n il polinomio di grado al più n che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ allora

$$\lim_n \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = 0,$$

e per il corollario 1.2, deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \quad (19)$$

La formula basata sui nodi di Chebyshev

$$\sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})})$$

essendo interpolatoria, ha grado di precisione almeno n e di conseguenza

$$\int_a^b p_n(x)dx = \sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})}) \quad (20)$$

Da (19), (20) deduciamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})}) = \int_a^b f(x)dx,$$

ovvero la famiglia di formule $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, applicata a f , converge all'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$.

In generale, altre scelte di nodi non godono sempre di qualità, anche per funzioni $f \in C^\infty([a, b])$.

A tal proposito, se consideriamo i nodi di equispaziati $\{x_k^{(e)}\}_{k=0,\dots,n}$, per quanto visto nell'interpolazione polinomiale, abbiamo che se $f \in C^\infty([a, b])$ con $[a, b]$ limitato e p_n il polinomio di grado al più n che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n$ allora non si può affermare

$$\lim_n \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = 0,$$

come si può verificare per $f(x) = 1/(1 + x^2)$, ovvero la funzione di Runge.

A partire da questo fatto si può dimostrare (non immediato) che se consideriamo la famiglia di formule di quadratura di Newton-Cotes $\{S_n\}$ (cioè S_n è la formula di quadratura interpolatoria avente $n + 1$ nodi equispaziati), applicata alla funzione di Runge

$$\lim S_n(f) \neq \int_{-5}^5 f(x) dx.$$

Nella tabella 7.1 tali risultati risultano ancora più evidenti. Le famiglia di regole di Newton-Cotes non converge all'integrale richiesto, a differenza di quanto succede utilizzando formule interpolatorie nei nodi di Chebyshev (come previsto dalla teoria).

n	E_n^e	E_n^{ch}
10	$1.9e + 00$	$1.7e - 01$
20	$3.0e + 01$	$3.3e - 03$
30	$7.7e + 02$	$6.2e - 05$
40	$2.5e + 04$	$1.2e - 06$
50	$8.9e + 05$	$2.1e - 08$
60	$7.3e + 09$	$4.7e - 10$
70	$1.0e + 07$	$2.7e - 12$
80	$6.3e + 05$	$6.1e - 13$
90	$1.4e + 05$	$4.1e - 14$
100	$1.9e + 03$	$4.4e - 15$

Tabella 10: Nella prima colonna il parametro n pari al grado dell'interpolante polinomiale, nella seconda e terza colonna gli errori assoluti di quadratura ottenuti integrando le interpolanti in $n + 1$ nodi rispettivamente equispaziati e di Chebyshev (in $[-5, 5]$).

7.2. Convergenza delle formule composte

Nel caso dell'interpolazione polinomiale a tratti, si può mostrare che se

1. $f \in C^{m+1}([a, b])$ con $[a, b]$ limitato,
2. Δ_N è una partizione di $[a, b]$ in N intervalli $[x_{mk}, x_{m(k+1)}]$ con $k = 0, \dots, N - 1$, aventi la stessa ampiezza h ,
3. $s_{m,N}$ è l'interpolante polinomiale a tratti di grado m di f relativamente ai nodi x_0, x_1, \dots, x_{mN} ,

allora per $C^* = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ si ha

$$0 \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - s_{m,N}(x)| \leq \frac{C^*}{(m+1)!} h^{m+1} = \frac{C^*}{(m+1)!} \left(\frac{b-a}{N} \right)^{m+1}$$

e quindi per il teorema del confronto

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} |f(x) - s_{m,N}(x)| = 0.$$

Di conseguenza per il corollario 1.2

$$\int_a^b s_{m,N}(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

e siccome, per costruzione, la formula composta $S_m^{(c)}(f, a, b, N)$ basata su una regola a m nodi, corrisponde a calcolare $\int_a^b s_{m,N}(x) dx$ otteniamo

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_m^{(c)}(f, a, b, N) = \int_a^b f(x) dx,$$

ovvero che le formule composte $S_m^{(c)}(f, a, b, N)$ sono convergenti al crescere di N .

Questo implica che sotto opportune ipotesi di regolarità di f , le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, risultano convergenti all'aumentare del numero N di sottointervalli.

Ripetiamo quale esempio la determinazione dell'integrale definito

$$\int_{-5}^5 \frac{1}{1+x^2} dx$$

e dalla sua tabulazione si evince la convergenza delle formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, all'aumentare del numero N di sottointervalli.

Osserviamo che per un numero alto di nodi, la formula $E_2^{(c)}(f)$ propone errori molto piccoli, seppur non decrescenti al crescere di N , cosa naturale, perchè gli $E_2^{(c)}(f)$ sono prossimi alla precisione di macchina.

Bibliografia

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] J.F.Epperson, *An introduction to Numerical Methods and Analysis, 2nd Edition*, Wiley, 2013.
- [3] A. Quarteroni e F. Saleri, *Elementi di calcolo numerico*, Progetto Leonardo, 1999.
- [4] Wikipedia, Formule di Newton-Cotes,
https://it.wikipedia.org/wiki/Formule_di_Newton-Cotes.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$7.3e+00$	$2.4e+00$	$4.0e+00$	1	2	3
2	$1.4e+00$	$2.4e+00$	$9.6e-02$	2	3	5
4	$4.6e-01$	$5.4e-01$	$1.3e-01$	4	5	9
8	$3.9e-02$	$3.8e-02$	$1.3e-02$	8	9	17
16	$2.1e-04$	$6.9e-04$	$9.1e-05$	16	17	33
32	$1.2e-04$	$2.4e-04$	$4.5e-08$	32	33	65
64	$3.0e-05$	$6.0e-05$	$2.6e-09$	64	65	129
128	$7.5e-06$	$1.5e-05$	$1.6e-10$	128	129	257
256	$1.9e-06$	$3.8e-06$	$1.0e-11$	256	257	513
512	$4.7e-07$	$9.4e-07$	$6.4e-13$	512	513	1025
1024	$1.2e-07$	$2.4e-07$	$4.0e-14$	1024	1025	2049
2048	$2.9e-08$	$5.9e-08$	$2.7e-15$	2048	2049	4097
4096	$7.3e-09$	$1.5e-08$	$4.4e-16$	4096	4097	8193
8192	$1.8e-09$	$3.7e-09$	$0.0e+00$	8192	8193	16385
16384	$4.6e-10$	$9.2e-10$	$4.4e-16$	16384	16385	32769
32768	$1.1e-10$	$2.3e-10$	$4.4e-16$	32768	32769	65537
65536	$2.9e-11$	$5.7e-11$	$0.0e+00$	65536	65537	131073
131072	$7.2e-12$	$1.4e-11$	$4.4e-16$	131072	131073	262145
262144	$1.8e-12$	$3.6e-12$	$8.9e-16$	262144	262145	524289
524288	$4.5e-13$	$9.0e-13$	$1.8e-15$	524288	524289	1048577
1048576	$1.1e-13$	$2.2e-13$	$0.0e+00$	1048576	1048577	2097153

Tabella 11: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_{-5}^5 1/(1+x^2)dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

- [5] Wikipedia, Numerical Integration,
https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration
- [6] Wikipedia, Regola del Rettangolo,
https://it.wikipedia.org/wiki/Regola_del_rettangolo
- [7] Wikipedia, Regola del Trapezio,
https://it.wikipedia.org/wiki/Regola_del_trapezio
- [8] Wikipedia, Regola di Cavalieri-Simpson,
https://it.wikipedia.org/wiki/Regola_di_Cavalieri-Simpson
- [9] Wolfram MathWorld, Formule di Newton-Cotes,
<http://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html>.