

# Derivazione numerica <sup>1</sup>

A. Sommariva <sup>2</sup>

---

**Keywords:** Derivazione numerica. Differenza in avanti. Rapporto incrementale simmetrico. Estrapolazione.

---

**Revisione:** 3 giugno 2019

---

## 1. Il problema della derivazione numerica

Si consideri il problema di determinare numericamente la derivata di una funzione  $f$  in un certo punto  $x_0$ , ovvero (qualora esista)

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Una prima idea consiste nell'approssimare  $f$  con una successione di funzioni  $f_n$  facili da derivare e poi differenziare  $f_n$ , valutandola nel punto  $x_0$ .

Purtroppo,

$$\text{dist}(f_n, f) \rightarrow 0 \not\Rightarrow \text{dist}(Df_n, Df) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

che si può pure leggere come *esistono  $f$  e  $f_n$  arbitrariamente "vicine", ma con derivate  $f'$  e  $f'_n$  arbitrariamente distanti*, fenomeno noto come *instabilità dell'operatore di derivazione (nel continuo)*.

**Esempio.** Quale esempio, consideriamo la successione

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx), \quad x \in [0, 1].$$

Osserviamo che essendo  $\sin(x) \in [-1, 1]$  qualora  $x \in [0, 1]$  abbiamo

$$\frac{-1}{n} \leq f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \leq \frac{1}{n}$$

e sicuramente, detta  $f$  la funzione costantemente nulla abbiamo  $f_n \rightarrow f$  non solo puntualmente ma anche uniformemente visto che

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{1}{n} \sin(nx) - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Purtroppo, mentre la derivata di  $f$  è la funzione costantemente nulla, abbiamo che

$$f'(x) = \sin(nx)$$

non converge alla funzione nulla *uniformemente*, ovvero non si ha che

$$\max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

e neppure puntualmente.

In effetti, per  $n \geq 2$

$$\max_{x \in [0,1]} |\sin(nx) - 0| = 1$$

e quindi

$$\lim_n \max_{x \in [0,1]} |\sin(nx) - 0| = 1 \neq 0.$$

La convergenza non è neppure puntuale. Per  $n = 2 + 8k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  abbiamo

$$n \frac{\pi}{4} = (2 + 8k) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

e quindi

$$\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$$

per cui, utilizzando la definizione di limite di una successione, non può essere

$$\lim_n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0.$$

**Commento.** Questo non vuol dire che *se  $f$  e  $f_n$  arbitrariamente "vicine" allora le derivate  $f'$  e  $f'_n$  sono arbitrariamente distanti*, e quindi possiamo sperare che sotto certe ipotesi su  $f$ , se  $f_n$  sono scelte bene e sono vicine a  $f$ , allora pure  $f'_n$  e  $f'$  sono vicine.

Ad esempio, se  $(a, b)$  è un intervallo limitato e  $s_{3,\Delta_n}$  è un interpolante spline cubica di  $f \in C^4(a, b)$ , nei nodi determinati dalla suddivisione  $\Delta_n = \{x_k\}$  con  $x_k = a + k(b-a)/n$ ,  $k = 0, \dots, n$ , ovvero punti equispaziati con passo  $h_n = (b-a)/n$ , allora esiste una costante  $c_1$  tale che

$$0 \leq \max_{x \in [a,b]} |f'(x) - s'_{3,\Delta_n}(x)| \leq c_1 h_n^3 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| = c_1 \frac{(b-a)^3}{n^3} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

e quindi per quanto visto precedentemente e per il teorema del confronto, non solo la successione di spline cubiche  $\{s_{3,\Delta_n}\}_n$  converge a  $f$  uniformemente, ma pure  $\{s'_{3,\Delta_n}\}_n$  converge a  $f'$  uniformemente.

## 2. Alcune formule di derivazione numerica

In questa sezione mostriamo alcune formule di derivazione numerica (cf. [3]), evidenziandone le problematiche.

### 2.1. Differenza in avanti

Consideriamo il rapporto incrementale  $\delta_+(f, h)$ , detto tecnicamente *differenza in avanti*, di una funzione  $f$  almeno derivabile, ovvero per un fissato  $h > 0$ , e supposto  $x, x + h \in [a, b]$

$$\delta_+(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

(cf. [2]).

Se  $f \in C^2([a, b])$  e  $x \in [a, b]$  allora, dalla formula di Taylor,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(\xi_x), \quad \xi_x \in (x, x+h)$$

per cui riarrangiando i termini

$$\delta_+(f, x, h) = f'(x) + hf''(\xi_x), \quad \xi_x \in (x, x+h).$$

Per il teorema di Weierstrass, essendo  $f'' \in C([a, b])$  e  $|\cdot| \in C([a, b])$ , esiste finito

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \geq 0$$

e quindi

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |\delta_+(f, x, h) - f'(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |hf''(\xi_x)| \leq M_2 h \quad (1)$$

per cui, per il teorema del confronto, se  $h \rightarrow 0$  allora

$$\max_{x \in [a, b]} |\delta_+(f, x, h) - f'(x)| \rightarrow 0.$$

In altri termini, ci verrebbe da credere che utilizzando passi  $h$  sempre più piccoli abbiamo approssimazioni sempre migliori della derivata prima, in un punto arbitrario dell'intervallo  $[a, b]$ .

Numericamente, le cose vanno in modo diverso. La funzione  $f$  non viene sempre valutata esattamente, ed ogni volta calcoliamo

$$\tilde{\delta}_+(f, x, h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$$

invece di  $\delta_+(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , ovvero un *rapporto incrementale perturbato* e abbiamo

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &= |(f'(x) - \delta_+(f, x, h)) + (\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h))| \\ &\leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + |\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)|. \end{aligned} \quad (2)$$

Se  $\epsilon$  è il massimo errore compiuto nel valutare la funzione

$$\begin{aligned}
|\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\
&= \left| \frac{f(x+h) - \tilde{f}(x+h)}{h} - \frac{f(x) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\
&\leq \left| \frac{f(x+h) - \tilde{f}(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{f(x) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\
&\leq \frac{2\epsilon}{h}
\end{aligned} \tag{3}$$

e quindi da (1), (2), ricaviamo per  $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

$$\begin{aligned}
|f'(x) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &\leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + |\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| \\
&\leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + \frac{2\epsilon}{h} \leq M_2 h + \frac{2\epsilon}{h}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Questo dice che numericamente, se  $h \rightarrow 0$  può accadere che fino ad un certo  $h_0$  otteniamo risultati sempre migliori, ma poi diventando per  $h$  piccolo rilevante la quantità  $\frac{2\epsilon}{h}$ , i risultati cominciano a peggiorare.

Siccome l'analisi viene fatta per  $h \rightarrow 0$ , e l'unica richiesta è che sia  $x+h, x \in [a, b]$ , generalmente  $[a, b]$  è un intervallo con una piccola ampiezza, contenente  $x$  e possiamo pensare quindi che se la derivata seconda non varia troppo vicino a  $x$ , sia  $M_2 \approx f''(x)$ .

Inoltre, visto che la funzione  $g(h) := M_2 h + \frac{2\epsilon}{h}$  ha minimo in  $h^* = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{M_2}}$ , si suggerisce di non scegliere numericamente valori di  $h$  più piccoli di  $h^*$ .

**Esempio.** Quale esempio consideriamo la funzione  $f(x) = \exp(x)$  la cui derivata è  $f'(x) = \exp(x)$ . La valutiamo in  $x_0 = 0$ , calcolando

$$\delta_+(f, x, h) = \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}.$$

Il valore desiderato è  $f'(0) = \exp(0) = 1$ .

Otteniamo i risultati della tabella e della figura, dove valutiamo

$$E_h(f, 0) = |\delta_+(f, x, h) - 1|$$

per  $h = 10^{-1}, \dots, 10^{-26}$ .

Nel nostro caso, dalla definizione di numero macchina, e dal fatto che  $\exp(h) \approx 1$ , ci possiamo aspettare che l'errore compiuto nel valutare  $\exp(h)$  sia pari alla precisione di macchina, ovvero  $\epsilon = 10^{-16}$ . Visto che  $M_2 \approx \exp(0) = 1$ , ci aspettiamo che il passo critico sia

$$h^* = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{M_2}} \approx 10^{-8}$$

come confermato dagli esperimenti numerici.

$h$	$E_h(f, 0)$	$h$	$E_h(f, 0)$
$1.0e - 01$	$5.171e - 02$	$1.0e - 14$	$7.993e - 04$
$1.0e - 02$	$5.017e - 03$	$1.0e - 15$	$1.102e - 01$
$1.0e - 03$	$5.002e - 04$	$1.0e - 16$	$1.000e + 00$
$1.0e - 04$	$5.000e - 05$	$1.0e - 17$	$1.000e + 00$
$1.0e - 05$	$5.000e - 06$	$1.0e - 18$	$1.000e + 00$
$1.0e - 06$	$5.000e - 07$	$1.0e - 19$	$1.000e + 00$
$1.0e - 07$	$4.943e - 08$	$1.0e - 20$	$1.000e + 00$
$1.0e - 08$	$6.077e - 09$	$1.0e - 21$	$1.000e + 00$
$1.0e - 09$	$8.274e - 08$	$1.0e - 22$	$1.000e + 00$
$1.0e - 10$	$8.274e - 08$	$1.0e - 23$	$1.000e + 00$
$1.0e - 11$	$8.274e - 08$	$1.0e - 24$	$1.000e + 00$
$1.0e - 12$	$8.890e - 05$	$1.0e - 25$	$1.000e + 00$
$1.0e - 13$	$7.993e - 04$	$1.0e - 26$	$1.000e + 00$

Tabella 1: Valutazione dell'errore  $E_h(f, 0)$ ,  $f(x) = \exp(x)$ , per alcuni passi  $h$ . L'errore degrada a partire da circa  $h = 1.0e - 08$ .

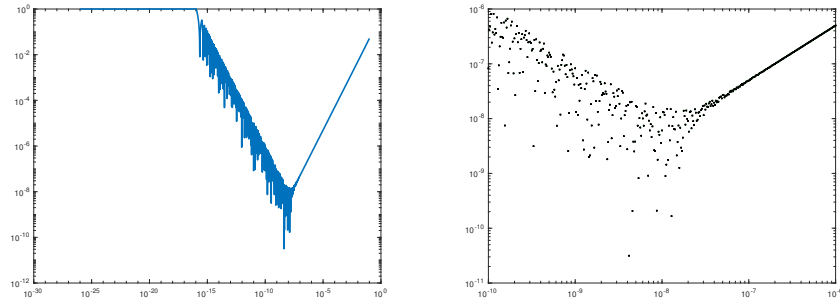


Figura 1: A sinistra, grafico in scala semilogaritmica dell'errore  $E_h(f, 0)$ ,  $f(x) = \exp(x)$ , per alcuni passi  $h$ . A destra lo studio in scala loglog, attorno al valore  $h = 10^{-8}$ , in cui si vede come già vicino a  $h = 10^{-7}$  incomincino a esserci problemi di convergenza

**Esempio.** La derivata della funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

è

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nel punto  $x_0 = 5$  abbiamo che  $f'(x_0) = -1.479289940828402e - 02$ .

Approssimiamo  $f'(x_0)$ , calcolando

$$\delta_+(f, 5, h) = \frac{f(5+h) - f(5)}{h}.$$

Otteniamo i risultati della tabella, dove valutiamo

$$E_h(f, 5) = |\delta_+(f, 5, h) - f'(5)|$$

per  $h = 1, 10^{-1}, \dots, 10^{-15}$ . Come nel caso precedente, per  $h < 1.0e - 08$  i valori della derivata cominciano a degradare.

$h$	$E_h(f, 0)$	$h$	$E_h(f, 0)$
$1.0e + 00$	$3.358e - 03$	$1.0e - 08$	$2.258e - 10$
$1.0e - 01$	$4.108e - 04$	$1.0e - 09$	$2.381e - 09$
$1.0e - 02$	$4.200e - 05$	$1.0e - 10$	$1.150e - 08$
$1.0e - 03$	$4.209e - 06$	$1.0e - 11$	$8.212e - 07$
$1.0e - 04$	$4.210e - 07$	$1.0e - 12$	$4.927e - 07$
$1.0e - 05$	$4.210e - 08$	$1.0e - 13$	$7.159e - 05$
$1.0e - 06$	$4.210e - 09$	$1.0e - 14$	$8.321e - 04$
$1.0e - 07$	$3.913e - 10$	$1.0e - 15$	$8.645e - 03$

Tabella 2: A sinistra, grafico in scala semilogaritmica dell'errore  $E_h(f, 0)$ ,  $f(x) = 1/(1+x^2)$ , per alcuni passi  $h$ . A destra lo studio in scala loglog, attorno al valore  $h = 10^{-8}$ , in cui si vede come già vicino a  $h = 10^{-7}$  incomincino a esserci problemi di convergenza.

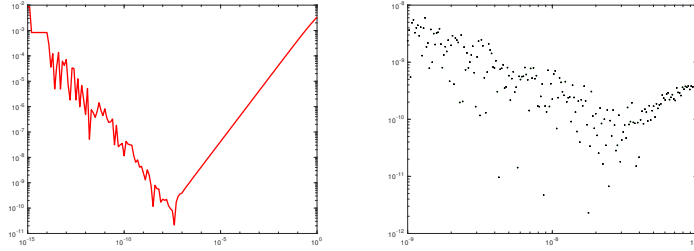


Figura 2: Errore  $E_h(f, 0)$  per alcuni passi  $h$ . Zoom attorno al valore  $h = 10^{-8}$  in cui si vede come tra  $h = 10^{-7}$  e  $h = 10^{-8}$  incomincino a esserci problemi di convergenza.

### 3. Rapporto incrementale simmetrico

Supponiamo  $f \in C^3([a, b])$  e che  $x-h, x+h \in [a, b]$  abbiamo per  $\xi_+ \in (x, x+h)$

$$f(x+h) = f(x) + hf^{(1)}(x) + h^2 f^{(2)}(x)/2 + h^3 f^{(3)}(\xi_+)/2,$$

e per  $\xi_- \in (x-h, x)$

$$f(x-h) = f(x) - hf^{(1)}(x) + h^2 f^{(2)}(x)/2 - h^3 f^{(3)}(\xi_-)/2.$$

Sottraendo membro a membro,

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf^{(1)}(x) + h^3(f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-))/2.$$

Dal teorema dei valori intermedi, la funzione assume tutti i valori tra  $\min(f^{(3)}(\xi_-), f^{(3)}(\xi_+))$  e  $\max(f^{(3)}(\xi_-), f^{(3)}(\xi_+))$  e quindi in particolare il loro valore medio. Quindi possiamo asserire che esiste  $\xi \in (x - h, x + h)$  tale che

$$f^{(3)}(\xi) = (f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-))/2$$

e di conseguenza

$$f(x + h) - f(x) = 2hf^{(1)}(x) + h^3f^{(3)}(\xi)$$

da cui riarrangiando i termini

$$\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}f^{(3)}(\xi).$$

Se  $M_3 = \max_{x \in (a, b)} |f^{(3)}(x)|$  abbiamo

$$0 \leq \left| \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| = \frac{h^2}{2} |f^{(3)}(\xi)| \leq \frac{h^2}{2} M_3 \quad (5)$$

da cui, per il teorema del confronto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| = 0$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta_2(f, x, h) = f^{(1)}(x).$$

Come nel caso precedente, questo risultato teorico non trova sempre riscontro nella pratica numerica.

La funzione  $f$  non viene sempre valutata esattamente, ed ogni volta calcoliamo

$$\tilde{\delta}_2(f, x, h) = \frac{\tilde{f}(x + h) - \tilde{f}(x - h)}{2h}$$

invece di  $\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$  e abbiamo

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &= |f'(x) - \delta_2(f, x, h) + \delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \\ &\leq |f'(x) - \delta_2(f, x, h)| + |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \end{aligned} \quad (6)$$

Se  $\epsilon$  è il massimo errore compiuto nel valutare la funzione

$$\begin{aligned} |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &= \left| \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{\tilde{f}(x + h) - \tilde{f}(x - h)}{2h} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x + h) - \tilde{f}(x + h)}{2} \right| + \left| \frac{f(x - h) - \tilde{f}(x - h)}{2} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2h} + \frac{\epsilon}{2h} = \frac{\epsilon}{h} \end{aligned} \quad (7)$$

e quindi ricaviamo da (6), (5) per  $M_3 = \max_{s \in [a, b]} |f^{(3)}(s)|$

$$\begin{aligned} |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &\leq |f'(x) - \delta_2(f, x, h)| + |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \\ &\leq \frac{h^2}{2} M_3 + \frac{\epsilon}{h}. \end{aligned} \quad (8)$$

Siccome l'analisi viene fatta per  $h \rightarrow 0$ , e l'unica richiesta è che sia  $x + h, x - h \in [a, b]$ , generalmente  $[a, b]$  è un intervallo con una piccola ampiezza, contenente  $x$  al suo interno e possiamo pensare quindi che se la derivata terza non varia troppo vicino a  $x$ , sia  $M_2 \approx f^{(3)}(x)$ .

In particolare, visto che la funzione  $g_2(h) := \frac{h^2}{2} M_3 + \frac{\epsilon}{h}$  ha minimo in  $h^* = \frac{\epsilon^{1/3}}{M_3^{1/3}}$ , si suggerisce di non scegliere numericamente valori di  $h$  più piccoli di  $h^*$ .

**Esempio.** Quale esempio consideriamo la funzione  $f(x) = \exp(x)$  la cui derivata è  $f'(x) = \exp(x)$ . La valutiamo in  $x_0 = 0$ , calcolando

$$\delta_2(f, 0, h) = \frac{f(0 + h) - f(0 - h)}{2h} = \frac{\exp(h) - \exp(-h)}{2h}.$$

Il valore desiderato è  $f'(0) = \exp(0) = 1$ .

Otteniamo i risultati della tabella e della figura, dove valutiamo

$$E_h(f, 0) = |\delta_2(f, 0, h) - 1|$$

per  $h = 10^0, \dots, 10^{-25}$ , che evidenziano un degradamento attorno a  $h^* = 10^{-6}$ . Osserviamo come gli errori, per  $h > h^*$  siano circa  $(h^2/2)M_3 = (h^2/2)$  in quanto  $M_3 \approx D^3 \exp(0) = 1$ . Ad esempio per  $h = 10^{-4}$  ci aspettiamo un errore di  $5 \cdot 10^{-9}$  non troppo distante, almeno come ordine, da  $1.667e - 09$ .

$h$	$E_h(f, 0)$	$h$	$E_h(f, 0)$
1.0e + 00	1.752e - 01	1.0e - 13	2.442e - 04
1.0e - 01	1.668e - 03	1.0e - 14	7.993e - 04
1.0e - 02	1.667e - 05	1.0e - 15	5.471e - 02
1.0e - 03	1.667e - 07	1.0e - 16	4.449e - 01
1.0e - 04	1.667e - 09	1.0e - 17	1.000e + 00
1.0e - 05	1.210e - 11	1.0e - 18	1.000e + 00
1.0e - 06	2.676e - 11	1.0e - 19	1.000e + 00
1.0e - 07	5.264e - 10	1.0e - 20	1.000e + 00
1.0e - 08	6.077e - 09	1.0e - 21	1.000e + 00
1.0e - 09	2.723e - 08	1.0e - 22	1.000e + 00
1.0e - 10	8.274e - 08	1.0e - 23	1.000e + 00
1.0e - 11	8.274e - 08	1.0e - 24	1.000e + 00
1.0e - 12	3.339e - 05	1.0e - 25	1.000e + 00

Tabella 3: Valutazione dell'errore  $E_h(f, 0)$ ,  $f(x) = \exp(x)$ , per alcuni passi  $h$ . L'errore sembra degradare a partire da circa  $h = 1.0e - 06$ .

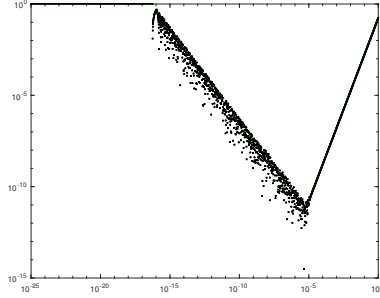


Figura 3: Errore  $E_h(f, 0)$ , con  $f(x) = \exp(x)$ , per alcuni passi  $h$ . Si vede, partendo da destra, come l'errore compiuto sia una funzione decrescente al diminuire di  $h$  fino a  $10^{-5}$  (e non  $10^{-6}$  come dice la tabella), dopo di che l'andamento, pur meno prevedibile, è essenzialmente crescente, fornendo errori tendenzialmente maggiori al diminuire di  $h$ .

**Esempio.** La derivata della funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

è

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nel punto  $x_0 = 5$  abbiamo che  $f'(x_0) = -1.479289940828402e - 02$ .

Approssimiamo  $f'(5)$ , calcolando

$$\delta_2(f, 5, h) = \frac{f(5+h) - f(5-h)}{2h}.$$

$h$	$E_h(f, 0)$	$h$	$E_h(f, 0)$
1.0e + 00	1.105e - 03	1.0e - 08	1.211e - 10
1.0e - 01	1.051e - 05	1.0e - 09	1.088e - 09
1.0e - 02	1.050e - 07	1.0e - 10	1.150e - 08
1.0e - 03	1.050e - 09	1.0e - 11	1.273e - 07
1.0e - 04	1.050e - 11	1.0e - 12	4.927e - 07
1.0e - 05	1.293e - 13	1.0e - 13	2.455e - 06
1.0e - 06	1.458e - 12	1.0e - 14	1.219e - 04
1.0e - 07	2.505e - 11	1.0e - 15	8.321e - 04

Tabella 4: Valutazione dell'errore  $E_h(f, 5)$ , con  $f(x) = 1/(1+x^2)$ , per alcuni passi  $h$ . L'errore degrada a partire da circa  $h = 1.0e - 05$ .

Inoltre, con qualche conto,  $f^{(3)}(5) \approx -6.302300339623963e - 03$ .

Otteniamo i risultati della tabella, dove valutiamo

$$E_h(f, 5) = |\delta_2(f, 5, h) - f'(5)|$$

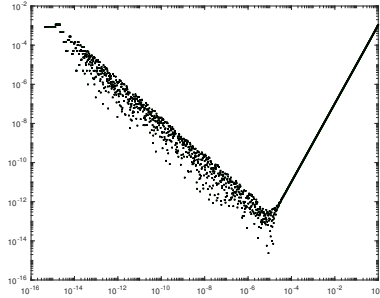


Figura 4: Errore  $E_h(f, 5)$ , con  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ , per alcuni passi  $h$ . Si vede, partendo da destra, come l'errore compiuto sia una funzione decrescente al diminuire di  $h$  fino a  $10^{-5}$ , dopo di che l'andamento, pur meno prevedibile, è essenzialmente crescente, fornendo errori tendenzialmente maggiori al diminuire di  $h$ .

per  $h = 1, 10^{-1}, \dots, 10^{-15}$ . Ci aspettiamo un errore dell'ordine di  $h^3 |f^{(3)}(\xi)|$  con  $\xi \approx 5$ , in quanto

$$|\delta_2(f, x, h) - f'(x)| = |h^2 f^{(3)}(\xi)|/2$$

ovvero

$$E_h(f, 5) \approx \frac{6 \cdot 10^{-3} h^3}{2} = 3 \cdot 10^{-3} h^2.$$

Ad esempio, per  $h = 10^{-4}$  la stima offre  $3 \cdot 10^{-11}$  molto prossima al valore numerico effettivo di  $1.050e-11$  (almeno come ordine!).

Come nel caso precedente, per  $h < 1.0e-08$  i valori della derivata cominciano a degradare.

### Bibliografia.

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] Wikipedia, Finite Difference, [https://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_difference](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference)
- [3] Wikipedia, Numerical Differentiation, [https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_differentiation](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_differentiation)