

Integrazione numerica

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

28 aprile 2022

Teorema

L'operazione di integrazione (nel continuo) è **stabile**, ovvero se $\tilde{f}, f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo limitato,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \tilde{f}(x) dx \right| \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|.$$

Dimostrazione.

L'asserto segue dal fatto che, come noto,

1 $g(x) \leq h(x), x \in [a, b], g, h \in C([a, b]) \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$

2 $|\int_a^b g(x) dx| \leq \int_a^b |g(x)| dx,$

3 $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b h(x) dx = \int_a^b (g(x) - h(x)) dx$ (linearità dell'integrazione),

e quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \tilde{f}(x) dx \right| &\stackrel{(3)}{=} \left| \int_a^b (f(x) - \tilde{f}(x)) dx \right| \stackrel{(2)}{\leq} \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \int_a^b \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \int_a^b 1 \cdot dx \\ &= (b - a) \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|. \end{aligned}$$

Commento

L'asserto dice che se \tilde{f} è **vicina** a f relativamente alla distanza $\text{dist}(f, \tilde{f}) := \|f - \tilde{f}\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|$, allora $\int_a^b \tilde{f}(x) dx$ non può essere arbitrariamente distante da $\int_a^b f(x) dx$, concetto che viene descritto come **stabilità** del funzionale di integrazione.

Corollario

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue che converge uniformemente a $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo limitato, ovvero

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty := \lim_n \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

allora

$$\lim_n \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = 0,$$

ovvero $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$.

Dimostrazione. (Facoltativa)

L'asserto segue dal fatto che dal teorema precedente abbiamo

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

e quindi visto che $b-a$ è finito e $\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$, per il teorema del confronto abbiamo pure che

$$\lim_n \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = 0.$$



Commento

L'asserto implica che se f_n è una successione che converge uniformemente alla integranda $f \in C([a, b])$ (ovvero $\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$), $-\infty < a < b < +\infty$, allora qualsiasi sia la tolleranza prestabilita ϵ esiste "n" tale che $|\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx| < \epsilon$.

- Sfruttando la *stabilità dell'operatore di integrazione*, l'idea di base delle formule di integrazione approssimata (**formule di quadratura**) è che se f_n è una opportuna funzione polinomiale tale che $f_n \approx f$, necessariamente

$$\int_a^b f_n(x) dx \approx \int_a^b f(x) dx.$$

- In particolare, in questa sezione si considerano i casi
 - (a) $f_n \equiv p_n$ polinomio di grado n che interpola f nei nodi x_k , $k = 0, \dots, n$ oppure
 - (b) $f_n \equiv s_m$ interpolante polinomiale a tratti di grado m che interpola f nei nodi x_k , $k = 0, \dots, n$.

Definizione

Le formule di quadratura algebriche **interpolatorie**, sono ottenute integrando il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ interpolante le coppie $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$.

Se L_k il k -simo polinomio di Lagrange relativamente ai nodi $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$, ovvero

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)},$$

abbiamo da

- 1 $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x),$
- 2 $\int_a^b \sum_{k=0}^n g_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b g_k(x) dx, g_k \in C([a, b]),$ con a, b finiti,
- 3 posto $w_k := \int_a^b L_k(x) dx,$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p_n(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=0}^n w_k f(x_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Le quantità $w_k, k = 0, \dots, n$ sono detti **pesi**, mentre i punti $x_k, k = 0, \dots, n$ sono detti **odi**.

Teorema

Le formule di quadratura algebriche *interpolatorie*, relativamente ai nodi x_0, \dots, x_n sono del tipo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

con $w_k = \int_a^b L_k(x) dx$ dove L_k è il k -simo polinomio di Lagrange rispetto x_0, \dots, x_n .

Risulterà utile la seguente definizione

Definizione

Una formula

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^M w_i f(x_i)$$

- ha *grado di precisione almeno* N se e solo se è esatta per tutti i polinomi f di grado inferiore o uguale a N ;
- ha *grado di precisione esattamente* N se e solo se ha grado di precisione almeno N ed esiste un polinomio di grado $N + 1$ per cui non lo sia.

Di seguito indicheremo con \mathbb{P}_m i polinomi di grado minore o uguale a m .
Vale il seguente teorema,

Teorema (Caratterizzazione delle formule interpolatorie)

Se una formula a " $n + 1$ " nodi è interpolatoria allora ha grado di precisione almeno " n ".

Se una formula a " m " nodi, con " $m \leq n + 1$ " ha grado di precisione almeno " n " allora è interpolatoria.

Di seguito vedremo alcune formule interpolatorie di grado n a $n + 1$ nodi $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$, che sono quindi caratterizzate da avere pesi

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 0, \dots, n$$

dove L_i è l' i -simo polinomio di Lagrange (relativamente a $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$).

Se

- $f \in C([a, b]), -\infty < a < b < +\infty,$
- $x_0 \in [a, b],$

ricaviamo $L_0(x) = 1$ (si osservi che l'unico polinomio costante che vale 1 in x_0 è proprio L_0) ed essendo

$$w_0 = \int_a^b L_0(x) dx = b - a, \quad (2)$$

deduciamo la regola detta del **rettangolo** (cf. [5])

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^0 w_k f(x_k) = w_0 f(x_0) = (b - a) f(x_0). \quad (3)$$

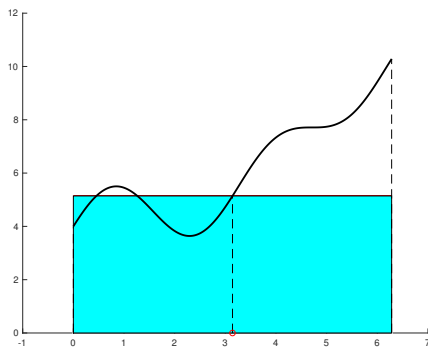


Figura: Regola del rettangolo con nodo $x_0 = (a+b)/2$, $a = 0$, $b = 2\pi$, per il calcolo di $\int_0^{2\pi} (3 + \sin(2x) + \cos(x) + x) dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

Nota.

Dal punto di vista geometrico, visto il grafico dell'interpolante p_0 in un solo punto, si ottiene che l'integrale di p_0 è pari a **calcolare l'area di un rettangolo** con lati di lunghezza $f(a)$ e $b - a$, da cui riotteniamo il risultato in (3).

Proposizione. (Grado di precisione)

La formula del rettangolo ha grado di precisione almeno 0.

Dimostrazione.

Per costruzione, se

- f è un polinomio di grado 0,
- $p_0 \in \mathbb{P}_0$ è il polinomio di grado 0, ovvero costante, che interpola il dato (x_0, y_0) ,
per l'unicità del polinomio interpolatore abbiamo $f = p_0$ e quindi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_0(x)dx = (b - a)f(x_0).$$

Di conseguenza il **grado di precisione è almeno 0**.



Definizione (Regola del punto medio)

La regola del punto medio é definita da

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_0^*(f) := (b-a) \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right).$$

Nota.

Si osserva immediatamente che la regola del punto medio é una particolare regola del rettangolo in cui x_0 corrisponde col punto medio dell'intervallo $[a, b]$ e quindi ha grado di precisione almeno 0.

Teorema (Errore della regola del punto medio)

Se $f \in C^{(2)}(a, b)$ l'errore della regola del punto medio risulta

$$E_0(f) := I(f) - S_0^*(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Teorema (Grado di precisione della regola del punto medio)

La regola del punto medio ha grado di precisione **esattamente 1**.

Dimostrazione.

Visto che un polinomio $q_1 \in \mathbb{P}_1$ è tale che $q_1^{(2)} \equiv 0$, deduciamo dalla formula dell'errore della regola del punto medio che

$$E_0(q_1) = I(q_1) - S_0^*(q_1) = \frac{(b-a)^3}{24} q_1^{(2)}(\xi) = 0,$$

cioè $I(q_1) = S_0^*(q_1)$ ovvero che il **grado di precisione è almeno 1**.

Per il polinomio $q_2(x) = x^2 \in \mathbb{P}_2$, visto che $q_2^{(2)}(x) = 2$, abbiamo

$$E_0(q_2) = I(q_2) - S_0^*(q_2) = \frac{(b-a)^3}{24} q_2^{(2)}(\xi) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot 2 = \frac{(b-a)^3}{12} \neq 0$$

e quindi il **grado di precisione della formula del punto medio è esattamente 1**.

△

Definizione (Formule di Newton-Cotes chiuse, (Newton 1676, Cotes 1722))

Sia $[a, b]$ un intervallo compatto di \mathbb{R} . Una formula

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$

si dice di tipo **Newton-Cotes chiusa** se

- i nodi sono equispaziati, e comprendono gli estremi, cioè

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad i = 0, \dots, n,$$

- i pesi sono

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 0, \dots, n, \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}.$$

Nota. (Grado di precisione Formule di Newton-Cotes chiuse)

Tale formula è interpolatoria a $n + 1$ punti (attenzione alla sommatoria) e ha grado di precisione almeno n .

Nota. (Facoltativa)

- Gli estremi a, b , sono nodi quadratura.
- Esistono formule dette di **Newton-Cotes aperte** i cui nodi sono equidistanti, ma non comprendono gli estremi. Alcuni esempi sono, posto $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$ (cf.[3])
 - 1 regola del rettangolo,
 - 2 regola a due punti: $(3h/2) \cdot (f_0 + f_1)$, con errore $(3h^3/4)f^{(2)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$,
 - 3 regola di Masina: $(4h/3) \cdot (2f_0 - f_1 + 2f_2)$, con errore $(28h^5/90)f^{(4)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$,
 - 4 regola a quattro punti: $(5h/24) \cdot (11f_0 + f_1 + f_2 + 11f_3)$, con errore $(95h^5/144)f^{(4)}\xi$, con $\xi \in (a, b)$.

Nota.

Queste formule furono introdotte da Newton nel 1676 e perfezionate da Cotes nel 1722, che le calcolò fino a quelle con 11 nodi.

Formule di tipo Newton-Cotes (chiuse). Regola del trapezio.

Definizione (Regola del trapezio)

La regola del trapezio è definita da

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1(f) := \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)).$$

Proposizione.

La regola del trapezio è di tipo interpolatorio.

Dimostrazione.

Se è interpolatoria allora $w_k = \int_a^b L_k(x)dx$, $k = 0, 1$ e da

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{b - a}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}$$

deduciamo che dovrebbe essere

$$\begin{aligned} w_0 &:= \int_a^b L_0(x)dx = \int_a^b \frac{b-x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (b-x)dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{-1}{2} \left((b-b)^2 - (b-a)^2 \right) = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &:= \int_a^b L_1(x)dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-a)dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \left((b-a)^2 - (a-a)^2 \right) = \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Visto che w_0, w_1 sono proprio i pesi della regola della formula dei trapezi, questa è interpolatoria.

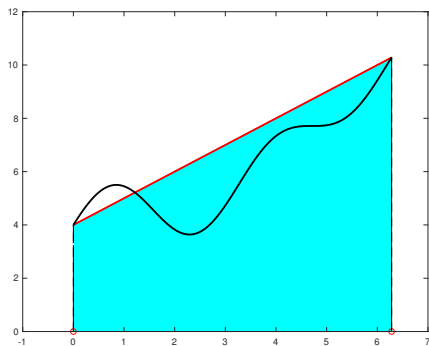


Figura: Regola del trapezio per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

Nota. (Versione geometrica)

*Visto che il polinomio interpolatore ha grado 1, il suo grafico corrisponde a unire i dati (x_0, y_0) , (x_1, y_1) mediante un segmento, in effetti se y_0, y_1 hanno lo stesso segno, ci si riconduce a **calcolare l'area di un trapezio**, la cui base ha lunghezza $b - a$ e le altezze sono $f(a)$ e $f(b)$.*

Teorema (Errore della regola del trapezio)

Se $f \in C^2([a, b])$ allora l'errore compiuto dalla formula del trapezio è

$$E_1(f) := I(f) - S_1(f) = \frac{-(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [1, p.252-253].

Proposizione. (Grado di precisione)

Il grado di precisione della regola del trapezio é esattamente 1.

Dimostrazione.

- *Il grado di precisione della formula dei trapezi é almeno 1, visto che é una formula interpolatoria a 2 nodi e il grado di precisione di una formula a $n + 1$ nodi é almeno n .*
- *Per $p_2(x) = x^2 \in \mathbb{P}_2$, risulta*

$$E_1(p_2) = I(p_2) - S_1(p_2) = -(b - a)^3/6 \neq 0 \Rightarrow I(p_2) \neq S_1(p_2)$$

*per cui il **grado di precisione è esattamente 1.***

Nota. (Storica)

Pare che la regola del trapezio fosse nota ai Babilonesi nel 50 avanti Cristo e fosse utilizzata per calcolare .

Definizione (Regola del trapezio)

La regola di Cavalieri-Simpson é definita da $\int_a^b f(x)dx \approx S_2(f)$ con

$$S_2(f) := \frac{b-a}{6} \cdot f(a) + \frac{2(b-a)}{3} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} \cdot f(b).$$

Proposizione.

La regola di Cavalieri-Simpson é di tipo interpolatorio.

Dimostrazione.

Qualora i nodi di quadratura siano $x_0 = a$, $x_1 = (b+a)/2$, $x_2 = b$, da $w_k = \int_a^b L_k(x)dx$ con la stessa tecnica della regola del trapezio, ma con calcoli dei pesi un po' più tedious (cf. [7]), si ottiene

- $w_0 = w_2 = \frac{b-a}{6},$
- $w_1 = \frac{2(b-a)}{3} = \frac{4(b-a)}{6}.$

che sono proprio i pesi della regola di Cavalieri-Simpson.



Regola di Cavalieri-Simpson (o della parabola)

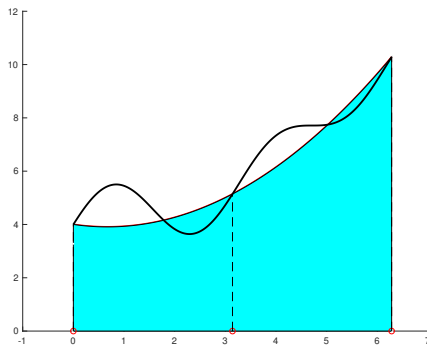


Figura: Regola di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la regola calcola il volume dell'area in celeste).

Teorema (Errore Regola Cavalieri-Simpson)

Se $f \in C^4([a, b])$ allora l'errore compiuto dalla regola di Cavalieri-Simpson è

$$E_2(f) := I(f) - S_2(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

dove $h = \frac{b-a}{2}$ e $\xi \in (a, b)$ (cf. [1, p.256-257]).

Nota. (Nota storica)

La regola di Cavalieri-Simpson fu sviluppata da Cavalieri (1635), e nota a Gregory (1668) e a Cotes. Simpson (1743), noti gli studi di Newton, fornì una visione geometrica che portò alle formule composte. Curiosamente, la versione moderna del metodo di Newton per la soluzione di equazioni nonlineari è probabilmente dovuta a Simpson.

Nota. (Visione geometrica)

La regola di Cavalieri-Simpson è detta anche della parabola, visto che dopo aver approssimato f con il polinomio interpolatore $p_2 \in \mathbb{P}_2$ relativo alle coppie $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0,1,2}$ (il cui grafico è una parabola), corrisponde a valutare $S_2(f) = \int_a^b p_2(x) dx \approx \int_a^b f(x) dx = I(f)$.

Teorema

Il grado di precisione della regola di Cavalieri-Simpson è esattamente 3.

Dimostrazione.

Visto che la formula è ottenuta integrando esattamente ogni polinomio di grado 2, abbiamo che il **grado di precisione** è almeno 2. In realtà mostriamo di seguito che è **esattamente 3**.

- Se $f \in C^4([a, b])$ allora l'errore compiuto è (cf. [1, p.256-257])

$$E_2(f) := I(f) - S_2(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

dove $h = \frac{b-a}{2}$ e $\xi \in (a, b)$.

- visto che un polinomio $p_3 \in \mathbb{P}_3$ di grado minore o uguale a 3 ha derivata quarta nulla, deduciamo che $E_2(p_3) = I(p_3) - S_2(p_3) = 0$, ovvero $I(p_3) = S_2(p_3)$ e quindi che il **grado di precisione è almeno 3**.
- per $p_4(x) = x^4 \in \mathbb{P}_4$, si ha $E_2(p_4) = I(p_4) - S_2(p_4) = \frac{-h^5}{90} 24 \neq 0$ e quindi $I(p_4) \neq S_2(p_4)$ per cui il **grado di precisione è esattamente 3**. \triangle

Facoltativo.

In generale uno può applicare la tecnica vista in precedenza per ottenere formule di quadratura di tipo Newton-Cotes con grado di precisione **g.d.p** maggiore.

Posto $f_k = f(x_k)$, e $x_k = a + k \cdot (b - a)/n$, con $k = 0, \dots, n$, (cf. [8])

- **Regola di Simpson 3/8**, $n = 3$: $\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_4)$, con **g.d.p** = 3,
- **Regola di Milne-Boole**, $n = 4$: $\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$, con **g.d.p** = 5,
- **Regola a sei punti**, $n = 5$: $\frac{5h}{288}(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5)$, **g.d.p** = 5,
- **Regola di Weddle-Hardy**, $n = 6$: $\frac{h}{140}(41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6)$, con **g.d.p** = 7,
- **Regola a otto punti** $n = 7$:
 $\frac{7h}{17280}(751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 + 2989f_4 + 1323f_5 + 3577f_6 + 751f_7)$, con **g.d.p** = 7.
- **Regola a nove punti**, $n = 8$:
 $\frac{4h}{14175}(989f_0 + 5888f_1 - 928f_2 + 10496f_3 - 4540f_4 + 10496f_5 - 928f_6 + 5888f_7 + 989f_8)$, con **g.d.p** = 9,
- **Regola a dieci punti**, $n = 9$:
 $\frac{9h}{89600}(2857(f_0 + f_9) + 15741(f_1 + f_8) + 1080(f_2 + f_7) + 19344(f_3 + f_6) + 5778(f_4 + f_5))$, con **g.d.p** = 9,
- **Regola a undici punti**, $n = 10$: $\frac{5h}{299376}(16067(f_0 + f_{10}) + 106300(f_1 + f_9) - 48525(f_2 + f_8) + 272400(f_3 + f_7) - 260550(f_4 + f_6) + 427368f_5)$, con **g.d.p** = 11.

Si osserva che fino a $n = 8$ hanno tutti i pesi positivi mentre per $n = 9, 11$ ciò non succede. Ognuna di queste regole, con ragionamenti analoghi a quelli effettuati per quelle del trapezio e di Cavalieri-Simpson, ha grado di precisione almeno a n (si osservi che i punti sono $n + 1$).

Nota.

Osserviamo che se

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]$$

è la funzione di Runge e $p_n \in \mathbb{P}_n$ il **polinomio interpolante** le coppie $(x_j, f(x_j))$ con $\{x_j\}_{j=0,\dots,n}$, si ha che

$$\max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_n(x)| \xrightarrow{n} 0$$

e quindi ci si aspetta che $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ sia molto diverso

$I(p_n) = \int_a^b p_n(x)dx$, specialmente per n grande, viste le forti differenze agli estremi $-5, 5$, tra f e p_n .

D'altro canto abbiamo visto che ciò non è un problema per **interpolanti polinomiali a tratti di grado M** , diciamo s_M e quindi si intuisce che sia bene approssimare $I(f)$ con $I(s_M)$. Esploriamo questo ambito nell'argomento delle formule composte.

Le formule composte sono ottenute **integrando un interpolante polinomiale a tratti di grado locale fissato s** che sono localmente algebriche, cioè ottenute integrando un singolo polinomio interpolatore di grado s , in $[x_{ks}, x_{(k+1)s}]$, con $k = 0, \dots, (n/s) - 1$, con n multiplo di s .

Definizione (Formula composta)

Sia

- 1 $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato,
- 2 $t_j = a + jh$ con $h = (b - a)/N$, $j = 0, \dots, N$,
- 3 $S(f, \alpha, \beta)$ una regola di quadratura nel generico intervallo limitato $[\alpha, \beta]$.

La formula di quadratura

$$S^{(c)}(f, a, b, N) = \sum_{j=0}^{N-1} S(f, t_j, t_{j+1}) \quad (4)$$

è detta *formula composta* di S .

Nota.

In questa trattazione i punti x_j , $j = 0, \dots, N$, sono **equispaziati**, ma con qualche fatica si può effettuare nel caso generale di punti arbitrari.

Formula composta del punto medio

Definizione (Formula composta del punto medio)

La formula composta del punto medio è definita da

$$S_0^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k), \quad (5)$$

dove x_k è il punto medio del $k+1$ -simo subintervallo ovvero

$$x_k = a + \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{b-a}{N}, k = 0, \dots, N-1.$$

(Determinazione della formula composta del punto medio)

Supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in N subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$, $K = 0, \dots, N-1$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N$, $h = (b-a)/N$.

Il punto medio x_k dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ risulta

$$x_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} = \frac{a + kh + a + (k+1)h}{2} = a + \frac{(2k+1)h}{2}.$$

Visto $w_k = t_{k+1} - t_k = a + (k+1)h - (a + kh) = h = (b-a)/N$ otteniamo

$$S_0^{(c)}(f, a, b, N) := \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f(x_k) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

Formula composta del punto medio

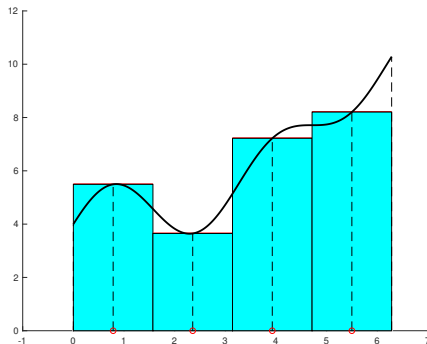


Figura: Formula del punto medio composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste).

Teorema (Errore formula composta punto medio)

Se $[a, b]$ è suddiviso in N subintervalli equispaziati di passo $h = \frac{b-a}{N}$, allora

$$E_0^{(c)}(f) := I(f) - S_0^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{(b-a)}{24} h^2 f^{(2)}(\xi^*), \quad \xi^* \in (a, b)$$

Nota. (Grado di precisione)

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per la formula del punto medio, si vede facilmente che grado di precisione è esattamente 1.

Relativamente alla regola del punto medio avevamo

$$E_0(f) := I(f) - S_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b),$$

ma si osservi che per $N > 1$

$$\frac{(b-a)}{24} h^2 = \frac{(b-a)}{24} \left(\frac{b-a}{N} \right)^2 = \frac{(b-a)^3}{24N^2} < \frac{(b-a)^3}{24},$$

e quindi ci si può aspettare un errore migliore dalla formula di tipo composta.

Formula composta dei trapezi

(Come si ottiene la formula dei trapezi composta)

Per introdurre la formula composta dei trapezi, supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in $N = 4$ subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$. $K = 0, \dots, N - 1 = 3$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N = 4$,
 $h = (b - a)/N = (b - a)/4$.

Indicata con $S_1(f, \alpha, \beta)$ l'applicazione della regola del trapezio relativamente a f e all'intervallo $[\alpha, \beta]$,

- $S_1(f, t_0, t_1) = \frac{h}{2}(f(t_0) + f(t_1))$,
- $S_1(f, t_1, t_2) = \frac{h}{2}(f(t_1) + f(t_2))$,
- $S_1(f, t_2, t_3) = \frac{h}{2}(f(t_2) + f(t_3))$,
- $S_1(f, t_3, t_4) = \frac{h}{2}(f(t_3) + f(t_4))$,

ricaviamo che essendo $N = 4$

$$\begin{aligned} S_1^{(c)}(f, a, b, 4) &= \frac{h}{2}(f(t_0) + f(t_1)) + \frac{h}{2}(f(t_1) + f(t_2)) + \frac{h}{2}(f(t_2) + f(t_3)) + \frac{h}{2}(f(t_3) + f(t_4)) \\ &= \frac{h}{2}(f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + 2f(t_3) + f(t_4)) \\ &= \frac{b-a}{N} \left(\frac{1}{2}f(t_0) + f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \frac{1}{2}f(t_4) \right) \end{aligned}$$

Definizione (Formula dei trapezi composta)

Posti $x_k = a + kh$, $k = 0, \dots, N$, $h = (b - a)/N$, la formula **composta dei trapezi** è definita da

$$S_1^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b - a}{N} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right],$$

Teorema (Errore formula dei trapezi composta)

Nelle precedenti ipotesi, l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b - a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b - a)}{N}.$$

Nota. (Grado di precisione)

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per la regola del trapezio, si vede facilmente che grado di precisione è esattamente 1, visto che l'errore assoluto risulta

$$|E_1^{(c)}(f)| := |I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N)| = \frac{(b-a)}{12} h^2 |f^{(2)}(\xi)|, \quad h = \frac{(b-a)}{N},$$

Relativamente alla regola del trapezio avevamo

$$|E(f)| := |I(f) - S_1(f)| = \frac{(b-a)^3}{12} |f^{(2)}(\xi)|, \quad \xi \in (a, b).$$

ma si osservi che per $N > 1$

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 = \frac{(b-a)}{12} \left(\frac{(b-a)}{N} \right)^2 = \frac{(b-a)^3}{12N^2} < \frac{(b-a)^3}{12},$$

*per cui ci si aspetta un errore **assoluto** migliore dalla formula composta.*

Nota. (Funzioni periodiche e FFT)

In virtù della formula di Eulero-Mac Laurin, si mostra che la formula composta dei trapezi è particolarmente indicata per integrare funzioni periodiche con derivati che sono tali, ed è utilizzata nella ben nota FFT.

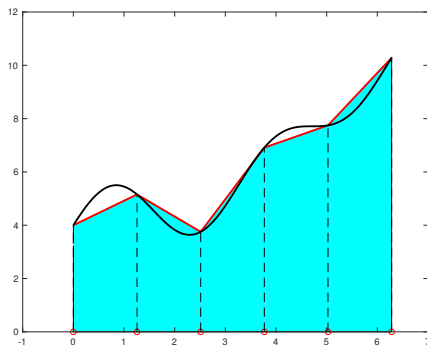


Figura: Formula dei trapezi composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste). In particolare si vede il grafico dell'interpolante a tratti, avente quali punti di discontinuità $2\pi/3, 4\pi/3$.

Formula composta di Cavalieri-Simpson

Nota. (Derivazione formula di Cavalieri-Simpson composta)

Per introdurre la formula composta di Cavalieri-Simpson, supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in $N = 4$ subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$, $K = 0, \dots, N - 1 = 3$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N = 4$, $h = (b - a)/N$.

Indicata con $S_2(f, t_k, t_{k+1})$ l'applicazione della regola di Cavalieri-Simpson relativamente a f e all'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, indicato con $c_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} = a + \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{b-a}{N}$ il punto medio dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$

- $S_2(f, t_0, t_1) = \frac{h}{6}(f(t_0) + 4 \cdot f(c_0) + f(t_1))$,
- $S_2(f, t_1, t_2) = \frac{h}{6}(f(t_1) + 4 \cdot f(c_1) + f(t_2))$,
- $S_2(f, t_2, t_3) = \frac{h}{6}(f(t_2) + 4 \cdot f(c_2) + f(t_3))$,
- $S_2(f, t_3, t_4) = \frac{h}{6}(f(t_3) + 4 \cdot f(c_3) + f(t_4))$,

ricaviamo che essendo $N = 4$

$$\begin{aligned} S_1^{(c)}(f, a, b, 4) &= \frac{h}{6}(f(t_0) + 4 \cdot f(c_0) + f(t_1)) + \frac{h}{6}(f(t_1) + 4 \cdot f(c_1) + f(t_2)) \\ &+ \frac{h}{6}(f(t_2) + 4 \cdot f(c_2) + f(t_3)) + \frac{h}{6}(f(t_3) + 4 \cdot f(c_3) + f(t_4)) \\ &= \frac{h}{6}(f(t_0) + 4 \cdot f(c_0) + 2f(t_1) + 4 \cdot f(c_1) + 2f(t_2) + 4 \cdot f(c_3)) \\ &+ 2f(t_3) + 4 \cdot f(c_4) + f(t_4)) \\ &= \frac{h}{6}(f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + 2f(t_3) + f(t_4) + 4f(c_0) + 4f(c_1) + 4f(c_2) + 4f(c_3)). \end{aligned}$$

Formula composta di Cavalieri-Simpson

Definizione (Formula di Cavalieri-Simpson composta)

Posti $x_k = a + kh/2$, $k = 0, \dots, 2N$, $h = (b - a)/N$, la formula composta di Cavalieri-Simpson è definita da

$$S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N}) \right] \quad (6)$$

Teorema (Errore della formula di Cavalieri-Simpson composta)

Nelle ipotesi di suddivisione equispaziata di passo h , l'errore compiuto è

$$E_2^{(c)}(f) := I(f) - S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

Nota. (Grado di precisione)

Il grado di precisione è quindi 3, come la regola di Cavalieri-Simpson, ma se $N > 1$ allora il passo h è minore e quindi, come nelle formule composte precedenti, ci si aspetta un errore assoluto inferiore dalle formula composte.

Formula composta di Cavalieri-Simpson

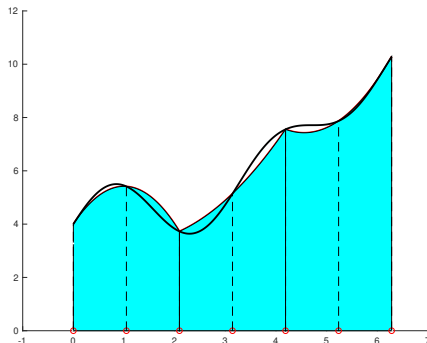


Figura: Formula di Cavalieri-Simpson composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste).

In questa sezione forniamo alcuni esempi in cui applichiamo le formule composte per integrare alcune funzioni $f \in C([a, b])$.

Esempio

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^{\pi} \exp(x) \cos(x) dx = -(\exp(\pi) + 1)/2.$$

mediante le formule composte note, $N = 1, 2, 4, \dots, 512$.

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$1.2e+01$	$2.3e+01$	$4.8e-01$	1	2	3
2	$2.8e+00$	$5.3e+00$	$8.5e-02$	2	3	5
4	$6.4e-01$	$1.3e+00$	$6.1e-03$	4	5	9
8	$1.6e-01$	$3.1e-01$	$3.9e-04$	8	9	17
16	$3.9e-02$	$7.8e-02$	$2.5e-05$	16	17	33
32	$9.7e-03$	$1.9e-02$	$1.6e-06$	32	33	65
64	$2.4e-03$	$4.8e-03$	$9.7e-08$	64	65	129
128	$6.1e-04$	$1.2e-03$	$6.1e-09$	128	129	257
256	$1.5e-04$	$3.0e-04$	$3.8e-10$	256	257	513
512	$3.8e-05$	$7.6e-05$	$2.4e-11$	512	513	1025

Tabella: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi f(x)dx$ con $f(x) = \exp(x) \cos(x)$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	4.33	4.27	5.59
2	4.34	4.20	13.92
4	4.10	4.06	15.54
8	4.03	4.02	15.89
16	4.01	4.00	15.97
32	4.00	4.00	15.99
64	4.00	4.00	16.00
128	4.00	4.00	16.00
256	4.00	4.00	16.00

Tabella: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi f(x)dx$ con $f(x) = \exp(x) \cos(x)$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Osserviamo che i valori relativi alle formule composte

- del *punto medio* e dei *trapezi* tende a **4**,
- di *Cavalieri-Simpson* tende a **16**.

Ne forniamo una spiegazione qualitativa.

L'errore $E_k^{(c)}(f)_N$ è, per qualche costante C indipendente dal numero di subintervalli N ,

$$(E_k^{(c)}(f))_N \approx \frac{C}{N^p} = C^* h^p.$$

Di conseguenza

$$(r_k^{(c)}(f))_N := \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}} \approx \frac{\frac{C}{N^p}}{\frac{C}{(2N)^p}} = \frac{C}{N^p} \frac{2^p N^p}{C} = 2^p.$$

- Visto che per le formule composte del punto medio e dei trapezi $(r_k^{(c)}(f))_N \rightarrow 4 = 2^2$, abbiamo che $p = 2$ e quindi $(E_k^{(c)}(f))_N \approx C^* h^2$.
In effetti l'errore delle formule **composte del punto medio** è

$$E_0^{(c)}(f) := I(f) - S_0^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{(b-a)}{24} h^2 f^{(2)}(\xi_N^{(0)}), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

mentre quelle **composte dei trapezi** è

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi_N^{(1)}), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

- Visto che per le formule **composte di Cavalieri-Simpson** $(r_2^{(c)}(f))_N \rightarrow 16 = 2^4$, abbiamo che $p = 4$ e quindi $(E_2^{(c)}(f))_N \approx C^* h^4$.
In effetti l'errore delle formule composte di Cavalieri-Simpson è

$$E_2^{(c)}(f) := I(f) - S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi_N^{(2)}) \approx C^* h^4.$$

Esempio

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x} dx = 2/9.$$

mediante le formule composte note, $N = 1, 2, 4, \dots, 1024$.

Nota.

Si osservi che l'integranda é una funzione appartenente a $C^3([0, 1])$. Quindi abbiamo formule dell'errore compiuto per tutte le formule viste ad eccezione di quella di Cavalieri-Simpson composta che richiede $f \in C^4([0, 1])$

N	$ E_0^{(c)}(f) $	$ E_1^{(c)}(f) $	$ E_2^{(c)}(f) $	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$1.3e-01$	$2.8e-01$	$3.4e-03$	1	2	3
2	$3.6e-02$	$7.2e-02$	$2.3e-04$	2	3	5
4	$9.1e-03$	$1.8e-02$	$1.5e-05$	4	5	9
8	$2.3e-03$	$4.6e-03$	$1.0e-06$	8	9	17
16	$5.7e-04$	$1.1e-03$	$6.5e-08$	16	17	33
32	$1.4e-04$	$2.8e-04$	$4.1e-09$	32	33	65
64	$3.6e-05$	$7.1e-05$	$2.6e-10$	64	65	129
128	$8.9e-06$	$1.8e-05$	$1.7e-11$	128	129	257
256	$2.2e-06$	$4.5e-06$	$1.0e-12$	256	257	513
512	$5.6e-07$	$1.1e-06$	$6.6e-14$	512	513	1025
1024	$1.4e-07$	$2.8e-07$	$4.1e-15$	1024	1025	2049

Tabella: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = x^3\sqrt{x}dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $|E_0^{(c)}(f)|$, $|E_1^{(c)}(f)|$, $|E_2^{(c)}(f)|$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, valutiamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{|(E_k^{(c)}(f))_N|}{|(E_k^{(c)}(f))_{2N}|}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

Dalle tabelle vedremo che i valori relativi

- alle formule composte del **punto medio e dei trapezi tendono a 4**,
- alla formula composta di **Cavalieri-Simpson tendono a 16**,

e quindi con errori rispettivamente del tipo C^*h^2 e C^*h^4 .

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	3.76	3.86	14.56
2	3.93	3.96	15.00
4	3.98	3.99	15.31
8	4.00	4.00	15.53
16	4.00	4.00	15.67
32	4.00	4.00	15.77
64	4.00	4.00	15.84
128	4.00	4.00	15.89
256	4.00	4.00	15.92
512	4.00	4.00	16.06

Tabella: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = x^3\sqrt{x}$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Esempio

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} dx = 2/3.$$

mediante le formule composte note, $N = 1, 2, 4, \dots, 2048$.

Nota.

Si osservi che l'integranda é una funzione appartenente a $C([0, 1])$ ma non a $C^1([0, 1])$ (non derivabile in 0). Quindi non abbiamo formule dell'errore compiuto per tutte le formule visto che richiedono a seconda dei casi $f \in C^2([0, 1])$ oppure $f \in C^4([0, 1])$.

N	$ E_0^{(c)}(f) $	$ E_1^{(c)}(f) $	$ E_2^{(c)}(f) $	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$4.0e-02$	$1.7e-01$	$2.9e-02$	1	2	3
2	$1.6e-02$	$6.3e-02$	$1.0e-02$	2	3	5
4	$6.3e-03$	$2.3e-02$	$3.6e-03$	4	5	9
8	$2.4e-03$	$8.5e-03$	$1.3e-03$	8	9	17
16	$8.7e-04$	$3.1e-03$	$4.5e-04$	16	17	33
32	$3.2e-04$	$1.1e-03$	$1.6e-04$	32	33	65
64	$1.1e-04$	$4.0e-04$	$5.6e-05$	64	65	129
128	$4.1e-05$	$1.4e-04$	$2.0e-05$	128	129	257
256	$1.5e-05$	$5.0e-05$	$7.0e-06$	256	257	513
512	$5.2e-06$	$1.8e-05$	$2.5e-06$	512	513	1025
1024	$1.8e-06$	$6.3e-06$	$8.8e-07$	1024	1025	2049
2048	$6.5e-07$	$2.2e-06$	$3.1e-07$	2048	2049	4097

Tabella: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = \sqrt{x}dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $|E_0^{(c)}(f)|$, $|E_1^{(c)}(f)|$, $|E_2^{(c)}(f)|$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Un effetto della bassa regolarità della integranda è che la convergenza delle tre famiglie di formule è relativamente lenta, cioè nonostante risultano convergenti.

Nella tabella successiva, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $|(E_k^{(c)}(f))_N|$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore assoluto compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{|(E_k^{(c)}(f))_N|}{|(E_k^{(c)}(f))_{2N}|}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

In particolare si vede che i valori relativi alle tre **formule composte del punto medio e dei trapezi tendono a $2.83 \approx 2^{1.5}$** e quindi la convergenza è del tipo $C^* h^{1.5}$ (cf. [1, p262 e p.291]).

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	2.47	2.64	2.82
2	2.59	2.70	2.83
4	2.67	2.74	2.83
8	2.72	2.77	2.83
16	2.75	2.79	2.83
32	2.78	2.80	2.83
64	2.79	2.81	2.83
128	2.80	2.81	2.83
256	2.81	2.82	2.83
512	2.82	2.82	2.83
1024	2.82	2.82	2.83

Tabella: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = \sqrt{x}$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Esempio

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^{100} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}(100)$$

dove $\operatorname{erf}(x)$ è la funzione di errore, mediante le formule composte note, $N = 1, 2, 4, \dots, 2048$.

Nota.

Ricordiamo che la funzione $\exp(-x^2)$ non ha primitiva e quindi non è applicabile il teorema fondamentale del calcolo integrale per determinare il valore di I .

Nella prima tabella che segue esponiamo gli errori compiuti dalle regole composte per $N = 1, 2, 4, \dots, 512$.

N	$ E_0^{(c)}(f) $	$ E_1^{(c)}(f) $	$ E_2^{(c)}(f) $	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$8.9e-01$	$4.9e+01$	$1.6e+01$	1	2	3
2	$8.9e-01$	$2.4e+01$	$7.4e+00$	2	3	5
4	$8.9e-01$	$1.2e+01$	$3.3e+00$	4	5	9
8	$8.9e-01$	$5.4e+00$	$1.2e+00$	8	9	17
16	$8.9e-01$	$2.2e+00$	$1.6e-01$	16	17	33
32	$6.1e-01$	$6.8e-01$	$1.8e-01$	32	33	65
64	$3.1e-02$	$3.1e-02$	$1.0e-02$	64	65	129
128	$1.7e-07$	$1.7e-07$	$5.6e-08$	128	129	257
256	$1.1e-16$	$1.1e-16$	$2.2e-16$	256	257	513

Tabella: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^{100} f(x)dx$ con $f(x) = \exp(-x^2) dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $|E_0^{(c)}(f)|$, $|E_1^{(c)}(f)|$, $|E_2^{(c)}(f)|$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

- Per $n \leq 64$ l'errore decresce lentamente, ed è comprensibile visto che l'intervallo ha ampiezza 100 e quindi il numero di campionamenti delle formule composte sono troppo pochi, ossia il valore di h troppo grande.
- Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori assoluti successivi per ogni formula ovvero se $|(E_k^{(c)}(f))_N|$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, valutiamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{|(E_k^{(c)}(f))_N|}{|(E_k^{(c)}(f))_{2N}|}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	1.00	2.04	2.12
2	1.00	2.08	2.27
4	1.00	2.17	2.74
8	1.00	2.40	7.69
16	1.44	3.31	0.85
32	19.74	21.74	17.74
64	184935.89	184937.89	184933.89
128	1515188455.00	1515188459.00	252531408.50

Tabella: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^{100} f(x)dx$ con $f(x) = \exp(-x^2)$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Osserviamo che dal caso precedente i valori relativi alle formule composte del punto medio e dei trapezi non tendono a 4, e quelli della formula composta di Cavalieri-Simpson non tendono a 16.

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e consideriamo la formula di quadratura

$$S_M(f) := \sum_{j=0}^M w_j f_j \approx \int_a^b f(x) dx \quad (7)$$

dove $f_j = f(x_j)$, con $\{x_j\}_{j=0,\dots,M}$ nodi di quadratura.

Si supponga che invece di $\{f_j\}_j$ si disponga di una loro approssimazione $\{\tilde{f}_j\}_j$.

Ci si chiede come cambia il valore dell'integrale, valutando

$$\tilde{S}_M(f) := \sum_{j=0}^M w_j \tilde{f}_j \quad (8)$$

invece di $S_M(f)$.

Da (7), (8), ricaviamo per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |S_M(f) - \tilde{S}_M(f)| &= \left| \sum_{j=0}^M w_j f_j - \sum_{j=0}^M w_j \tilde{f}_j \right| = \left| \sum_{j=0}^M w_j (f_j - \tilde{f}_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^M |w_j| |f_j - \tilde{f}_j| \leq \left(\sum_{j=0}^M |w_j| \right) \cdot \max_j |f_j - \tilde{f}_j|. \end{aligned}$$

Quindi la quantità

$$\mathcal{I}(S_M) = \sum_{j=0}^M |w_j| \tag{9}$$

è un **indice di stabilità** della formula di quadratura S_M , in quanto se $\mathcal{I}(S_M)$ è grande, a piccole perturbazioni $\max_j |f_j - \tilde{f}_j|$ possono corrispondere valori degli integrali $S_M(f)$, $\tilde{S}_M(f)$ molto diversi.

Se la formula ha grado di precisione almeno 0 allora

$$\int_a^b 1 \, dx = \sum_{j=0}^M w_j. \quad (10)$$

e si ha $\sum_{j=0}^M w_j \leq \sum_{j=0}^M |w_j|$ con la disuguaglianza stretta se e solo se qualche peso w_j è negativo.

Di conseguenza, da (9), (10),

$$b - a = \int_a^b 1 \, dx = \sum_{j=0}^M w_j \leq \sum_{j=0}^M |w_j| = \mathcal{I}(S_M)$$

con la disuguaglianza stretta se qualche peso w_j è negativo.

Quindi la presenza di pesi negativi peggiora l'indice di stabilità $\sum_{j=0}^M |w_j|$, mentre se sono tutti positivi e la formula ha grado di precisione almeno 0

$$\mathcal{I}(S_M) = b - a$$

e quindi piccoli errori nel valutare la funzione f nei nodi di quadratura non comporta che $S_M(f)$ e $\tilde{S}_M(f)$ possano essere arbitrariamente distanti.

Nella tabella relativa agli indici di stabilità valutiamo la somma dei moduli dei pesi delle regole di Newton-Cotes a $n + 1$ nodi.

Come si vede le formule pur avendo grado di precisione almeno n , cominciano a essere meno stabili al crescere di n .

n	\mathcal{I}
0	2.00000e + 00
1	2.00000e + 00
2	2.00000e + 00
3	2.00000e + 00
4	2.00000e + 00
5	2.00000e + 00
6	2.00000e + 00
7	2.00000e + 00
8	2.90243e + 00
9	2.00000e + 00
10	6.12959e + 00

Tabella: Indice di stabilità $\mathcal{I}(S_n)$ delle formule di Newton Cotes chiuse aventi $n + 1$ nodi.

Definita la famiglia di formule di quadratura $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (con grado di precisione non necessariamente n), ognuna del tipo

$$S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \approx I(f) := \int_a^b f(x) dx \quad (11)$$

introduciamo l'errore della formula n -sima

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}).$$

Qualora $\mathcal{E}_n(f) \rightarrow 0$ la famiglia di formule $\{S_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\int_a^b f(x) dx$.

In altri termini, la famiglia di formule $\{S_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ risulta convergente all'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$ se

$$S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

La convergenza delle formule algebriche, ottenute integrando il polinomio interpolatore, dipende dalla famiglia di nodi prescelti.

Se consideriamo i nodi di Chebyshev $\{x_k^{(\text{ch})}\}_{k=0,\dots,n}$, per quanto visto nell'interpolazione polinomiale, abbiamo che se $f \in C^1([a, b])$ con $[a, b]$ limitato e p_n il polinomio di grado al più n che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ allora

$$\lim_n \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = 0,$$

e per un corollario precedente, deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (12)$$

La formula basata sui nodi di Chebyshev

$$\sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})})$$

essendo interpolatoria, ha grado di precisione almeno n e di conseguenza

$$\int_a^b p_n(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})}), \quad \forall p_n \in \mathbb{P}_n. \quad (13)$$

Da (12), (13) deduciamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n w_k^{(\text{ch})} f(x_k^{(\text{ch})}) = \int_a^b f(x) dx,$$

ovvero la famiglia di formule $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, applicata a f , converge all'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$.

In generale, altre scelte di nodi non godono sempre di qualità, anche per funzioni $f \in C^\infty([a, b])$.

A tal proposito, se consideriamo i nodi di equispaziati $\{x_k^{(e)}\}_{k=0,\dots,n}$, per quanto visto nell'interpolazione polinomiale, abbiamo che se $f \in C^\infty([a, b])$ con $[a, b]$ limitato e p_n il polinomio di grado al più n che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n$ allora non si può affermare

$$\lim_n \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = 0,$$

come si può verificare per $f(x) = 1/(1 + x^2)$, ovvero la funzione di Runge. A partire da questo fatto si può dimostrare (non immediato) che se consideriamo la famiglia di formule di quadratura di Newton-Cotes $\{S_n\}$ (cioè S_n è la formula di quadratura interpolatoria avente $n + 1$ nodi equispaziati), applicata alla funzione di Runge

$$\lim S_n(f) \neq \int_{-5}^5 f(x) dx.$$

Convergenza delle formule interpolatorie (facoltativo)

Nella tabella 64 tali risultati risultano ancora più evidenti. Le famiglia di regole di Newton-Cotes non converge all'integrale richiesto, a differenza di quanto succede utilizzando formule interpolatorie nei nodi di Chebyshev (come previsto dalla teoria).

n	E_n^e	E_n^{ch}
10	$1.9e + 00$	$1.7e - 01$
20	$3.0e + 01$	$3.3e - 03$
30	$7.7e + 02$	$6.2e - 05$
40	$2.5e + 04$	$1.2e - 06$
50	$8.9e + 05$	$2.1e - 08$
60	$7.3e + 09$	$4.7e - 10$
70	$1.0e + 07$	$2.7e - 12$
80	$6.3e + 05$	$6.1e - 13$
90	$1.4e + 05$	$4.1e - 14$
100	$1.9e + 03$	$4.4e - 15$

Tabella: Nella prima colonna il parametro n pari al grado dell'interpolante polinomiale, nella seconda e terza colonna gli errori assoluti di quadratura ottenuti integrando le interpolanti in $n + 1$ nodi rispettivamente equispaziati e di Chebyshev (in $[-5, 5]$).

Nel caso dell'interpolazione polinomiale a tratti, si può mostrare che se

- 1 $f \in C^{m+1}([a, b])$ con $[a, b]$ limitato,
- 2 Δ_N è una suddivisione di $[a, b]$ in N intervalli $[x_{mk}, x_{m(k+1)}]$ con $k = 0, \dots, N-1$, aventi la stessa ampiezza h ,
- 3 $s_{m,N}$ è l'interpolante polinomiale a tratti di grado m di f relativamente ai nodi x_0, x_1, \dots, x_{mN} ,

allora per $C^* = \max_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$ si ha

$$0 \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - s_{m,N}(x)| \leq \frac{C^*}{(m+1)!} h^{m+1} = \frac{C^*}{(m+1)!} \left(\frac{b-a}{N} \right)^{m+1}$$

e quindi per il teorema del confronto

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} |f(x) - s_{m,N}(x)| = 0.$$

Di conseguenza,

$$\int_a^b s_{m,N}(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

e siccome, per costruzione, la formula composta $S_m^{(c)}(f, a, b, N)$ basata su una regola a m nodi, corrisponde a calcolare $\int_a^b s_{m,N}(x) dx$ otteniamo

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_m^{(c)}(f, a, b, N) = \int_a^b f(x) dx,$$

ovvero che le formule composte $S_m^{(c)}(f, a, b, N)$ sono convergenti al crescere di N .

Questo implica che sotto opportune ipotesi di regolarità di f , le **formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson**, risultano **convergenti** all'aumentare del numero N di sottointervalli.

Ripetiamo quale esempio la determinazione dell'integrale definito

$$\int_{-5}^5 \frac{1}{1+x^2} dx$$









e dalla sua tabulazione si evince la convergenza delle formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, all'aumentare del numero N di sottointervalli.

Osserviamo che per un numero alto di nodi, la formula $E_2^{(c)}(f)$ propone errori molto piccoli, seppur non decrescenti al crescere di N , cosa naturale, perchè gli $E_2^{(c)}(f)$ sono prossimi alla precisione di macchina.

Convergenza delle formule composte (facoltativo)

N	$E_0^{(c)}(f)$	$E_1^{(c)}(f)$	$E_2^{(c)}(f)$	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	7.3e + 00	2.4e + 00	4.0e + 00	1	2	3
2	1.4e + 00	2.4e + 00	9.6e - 02	2	3	5
4	4.6e - 01	5.4e - 01	1.3e - 01	4	5	9
8	3.9e - 02	3.8e - 02	1.3e - 02	8	9	17
16	2.1e - 04	6.9e - 04	9.1e - 05	16	17	33
32	1.2e - 04	2.4e - 04	4.5e - 08	32	33	65
64	3.0e - 05	6.0e - 05	2.6e - 09	64	65	129
128	7.5e - 06	1.5e - 05	1.6e - 10	128	129	257
256	1.9e - 06	3.8e - 06	1.0e - 11	256	257	513
512	4.7e - 07	9.4e - 07	6.4e - 13	512	513	1025
1024	1.2e - 07	2.4e - 07	4.0e - 14	1024	1025	2049
2048	2.9e - 08	5.9e - 08	2.7e - 15	2048	2049	4097
4096	7.3e - 09	1.5e - 08	4.4e - 16	4096	4097	8193
8192	1.8e - 09	3.7e - 09	0.0e + 00	8192	8193	16385
16384	4.6e - 10	9.2e - 10	4.4e - 16	16384	16385	32769
32768	1.1e - 10	2.3e - 10	4.4e - 16	32768	32769	65537
65536	2.9e - 11	5.7e - 11	0.0e + 00	65536	65537	131073
131072	7.2e - 12	1.4e - 11	4.4e - 16	131072	131073	262145
262144	1.8e - 12	3.6e - 12	8.9e - 16	262144	262145	524289
524288	4.5e - 13	9.0e - 13	1.8e - 15	524288	524289	1048577
1048576	1.1e - 13	2.2e - 13	0.0e + 00	1048576	1048577	2097153

Tabella: Paragone delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_{-5}^5 1/(1+x^2)dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $E_0^{(c)}(f)$, $E_1^{(c)}(f)$, $E_2^{(c)}(f)$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

-  K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
-  J.F.Epperson, *An introduction to Numerical Methods and Analysis*, 2nd Edition, Wiley, 2013.
-  Wikipedia, Formule di Newton-Cotes.
-  Wikipedia, Numerical Integration
-  Wikipedia, Regola del Rettangolo
-  Wikipedia, Regola del Trapezio
-  Wikipedia, Regola di Cavalieri-Simpson
-  Wolfram MathWorld, Formule di Newton-Cotes.