

Interpolazione polinomiale a tratti e spline

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova

15 aprile 2025

Si è visto che nel caso dell'interpolazione polinomiale,

- *dati $n + 1$ punti $a = x_0 < \dots < x_n = b$,*
 - *dati i valori y_0, \dots, y_n , ad esempio ivi assunti da una funzione $y = f(x)$,*
- esiste uno ed un solo polinomio p_n di grado n tale che*

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Nel caso di nodi equispaziati

$$x_k = a + k \frac{(b - a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n; \quad (2)$$

*al crescere di n , **non si può garantire che $f(x) - p_n(x)$ tenda uniformemente a 0** (si ricordi il fenomeno di Runge!).*

Per un teorema di Faber (cf. [2, p.132], qualsiasi sia l'insieme di nodi relativi all'intervallo limitato $[a, b]$, esiste $f \in C([a, b])$ tale che l'interpolante p_n in tale insieme di punti non converge uniformemente a f (per $n \rightarrow \infty$).

Quindi, senza ulteriori informazioni, non si può affermare con certezza che sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \rightarrow 0.$$

Di conseguenza sorge spontaneo porsi il seguente

Problema.

Qualora

- $[a, b]$ sia un intervallo limitato,
- si possenga un numero arbitrario di punti, anche equispaziati in $[a, b]$,
- $f \in C^k([a, b])$ per k sufficientemente grande,

calcolare una famiglia di approssimanti di tipo polinomiale π_n per cui si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \pi_n(x)| \rightarrow 0.$$

Definizione (Funzioni polinomiali a tratti)

Sia dato un intervallo $[a, b]$ e sia $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Una funzione f si dice **polinomiale a tratti** se la sua restrizione ad ogni intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$ è un polinomio.

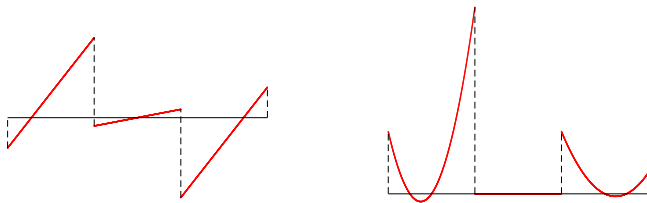


Figura: Sinistra: polinomio a tratti di grado 1. Destra: polinomio a tratti di grado 2.

Nota. (Continuità)

Si osservi che mentre un polinomio è sicuramente una funzione appartenente a $C^\infty([a, b])$, in generale non è detto che un polinomio a tratti sia una funzione continua (vedi figure).

Definizione (Interpolante polinomiale a tratti di grado s)

- Siano $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ punti che definiscono la suddivisione di $[a, b]$ mediante intervalli $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$.
- Nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ siano definiti i punti $\{x_j^{(k)}\}_{j=0, \dots, s}$ tali che

$$t_k = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{s-1}^{(k)} < x_s^{(k)} = t_{k+1}.$$

Si consideri la funzione π_s tale che la sua restrizione $\pi_s|_{[t_k, t_{k+1}]}$ ad ogni subintervallo $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$, sia un polinomio di grado s e interpolante i dati $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$, $j = 0, \dots, s$.

Tale π_s si chiama **funzione polinomiale a tratti di grado s , interpolante** le coppie $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$, $k = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, s$ (relativamente alla suddivisione definita da t_0, \dots, t_n).

In altri termini p_s^* si ottiene *incollando* per continuità interpolanti polinomiali di grado s^* in sottointervalli $[t_k, t_{k+1}]$ ove in generale i punti di raccordo sono $t_1 = x_s^{(0)} = x_0^{(1)}$, $t_2 = x_s^{(1)} = x_0^{(2)}$, \dots

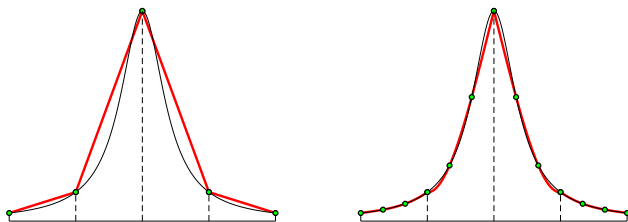


Figura: La funzione di Runge (in nero). A sinistra la interpolante polinomiale a tratti p_1^* a tratti di grado 1, a destra, la interpolante polinomiale a tratti p_3^* a tratti di grado 3, entrambe in rosso, in 4 subintervalli equispaziati. In verde le coppie da interpolare.

Teorema (Esistenza e unicità interpolanti a tratti)

- Siano $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ punti che definiscono la suddivisione di $[a, b]$ mediante intervalli $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$.
- Nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ siano definiti i punti $\{x_j^{(k)}\}_{j=0, \dots, s}$ tali che

$$t_k = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{s-1}^{(k)} < x_s^{(k)} = t_{k+1}.$$

Sia π_s la funzione polinomiale a tratti di grado s , interpolante le coppie $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$, $k = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, s$ (relativamente alla suddivisione definita da t_0, \dots, t_n).

Tale funzione polinomiale a tratti di grado s **esiste ed è unica**.

Dimostrazione.

Osservando che in ogni subintervallo $[t_k, t_{k+1}]$ l'interpolante richiesta di grado s esiste ed è unica (ci sono $s+1$ ascisse a due due distinti da interpolare), necessariamente **tali interpolanti** relativamente ai dati $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})_{k=0, \dots, n, j=0, \dots, s}$ **esistono e sono uniche**.

Il primo caso è quello delle **interpolanti polinomiali a tratti di grado 1**, cioè funzioni che in ogni intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ (per $k = 0, \dots, n-1$) sono polinomi di grado $m^* = 1$ (e globalmente funzioni continue). Inoltre $t_k = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} = t_{k+1}$.

Teorema

Sia $\pi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione interpolante a tratti di **grado 1** relativamente alle coppie $(t_i, f(t_i))$ dove

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b.$$

Allora se

- 1** $x \in [t_i, t_{i+1}]$,
- 2** $h_i = t_{i+1} - t_i$,
- 3** la funzione f è derivabile due volte con continuità ed è

$$M_i = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |f^{(2)}(t)|,$$

abbiamo

$$|f(x) - \pi_1(x)| \leq M_i \frac{h_i^2}{8}. \quad (3)$$

(Dimostrazione)

Supponiamo $x \in [t_i, t_{i+1}]$.

L'errore $|f(x) - \pi_1(x)|$ coincide con l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale nell'approssimare in x la funzione f mediante il polinomio di grado 1 che interpola le coppie $(t_i, f(t_i)), (t_{i+1}, f(t_{i+1}))$.

Dal teorema dell'errore dell'interpolazione polinomiale di grado 1,

$$f(x) - \pi_1(x) = f^{(2)}(\xi) \frac{(x - t_i)(x - t_{i+1})}{2}, \quad \xi \in (t_i, t_{i+1}) \quad (4)$$

e quindi osservato che

$$\blacksquare \quad |f^{(2)}(\xi)| \leq \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |f^{(2)}(t)| = M_i$$

$$\blacksquare \quad \left| \frac{(x - t_i)(x - t_{i+1})}{2} \right| \leq \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \left| \frac{(t - t_i)(t - t_{i+1})}{2} \right| = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \frac{|(t - t_i)(t - t_{i+1})|}{2}$$

ricaviamo

$$\begin{aligned} |f(x) - \pi_1(x)| &= \left| f^{(2)}(\xi) \frac{(x - t_i)(x - t_{i+1})}{2} \right| = |f^{(2)}(\xi)| \left| \frac{(x - t_i)(x - t_{i+1})}{2} \right| \\ &\leq M_i \cdot \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \frac{|(t - t_i)(t - t_{i+1})|}{2} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo per $x \in [t_i, t_{i+1}]$

$$|f(x) - \pi_1(x)| \leq M_i \cdot \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \frac{|(t - t_i)(t - t_{i+1})|}{2} \quad (5)$$

e si tratta di trovare una maggiorazione di $\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \frac{|(t - t_i)(t - t_{i+1})|}{2}$.

Si vede facilmente che

■ posto $c = (t_i + t_{i+1})/2$ si ha

$$\frac{|(c - t_i)(c - t_{i+1})|}{2} = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \frac{|(t - t_i)(t - t_{i+1})|}{2} = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \left(-\frac{(t - t_i)(t - t_{i+1})}{2} \right)$$

■ $h_i = t_{i+1} - t_i$, $|c - t_i| = |c - t_{i+1}| = h_i/2$,

e quindi

$$\begin{aligned} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \frac{|(t - t_i)(t - t_{i+1})|}{2} &= \frac{|(c - t_i)(c - t_{i+1})|}{2} = \frac{|c - t_i||c - t_{i+1}|}{2} \\ &= \frac{(h_i/2)(h_i/2)}{2} = \frac{h_i^2}{8}. \end{aligned}$$

da cui si ottiene per (5) la tesi dell'asserto.

Nota.

- 1 Il teorema precedente, vale per h_i generica.
- 2 Il massimo $M_i = \max_{s \in (t_i, t_{i+1})} |f^{(2)}(s)|$ dipende solo dal i -simo intervallo che è quello in cui si esamina l'errore compiuto nel punto x .

A priori uno potrebbe utilizzare

- $M = \max_{s \in [a, b]} |f^{(2)}(s)| \geq M_i = \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |f^{(2)}(s)|$
- $h = \max_{i=1, \dots, n} h_i$

ma la disuguaglianza

$$|f(x) - \pi_1(x)| \leq M \frac{h^2}{8}$$

sarebbe meno precisa di

$$|f(x) - \pi_1(x)| \leq M_i \frac{h_i^2}{8}.$$

Corollario

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e supponiamo

- $f \in C^2([a, b])$,
- $M = \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)|$.
- $\pi_1^{(n)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione lineare a tratti interpolante le coppie $(t_k, f(t_k))$, dove $t_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $k = 0, \dots, n$.

Allora

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \pi_1^{(n)}(x)| \leq M \frac{(b-a)^2}{8n^2}.$$

Dimostrazione.

Osserviamo che

- $M = \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)| \geq M_i = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |f^{(2)}(t)|$;
- essendo, $h = h_i$, per $i = 1, \dots, n$, si ha $|f(x) - \pi_1^{(n)}(x)| \leq M_i \frac{h_i^2}{8} \leq M \frac{h^2}{8}$.

Visto che $M \frac{h^2}{8}$ non dipende da x , $h = (b-a)/n$

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \pi_1^{(n)}(x)| \leq M \frac{h^2}{8} = M \frac{(b-a)^2}{8n^2}.$$

Importante. (Convergenza uniforme)

Indicato con $\pi_1^{(n)}$ il polinomio a tratti interpolante $n + 1$ nodi equispaziati di $[a, b]$, essendo $h = (b - a)/n$, ricaviamo per $M = \|f^{(2)}\|_\infty$

$$0 \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - \pi_1^{(n)}(t)| \leq \frac{(b - a)^2 M}{8n^2}. \quad (6)$$

da cui si evince che se $f \in C^2([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$ e il numero di punti equispaziati nell'intervallo $[a, b]$ tende ad infinito allora, visto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b - a)^2 M}{8n^2} = 0,$$

per il teorema del confronto, per $n \rightarrow +\infty$

$$\|f - \pi_1^{(n)}\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |f(t) - \pi_1(t)| \rightarrow 0$$

ovvero la successione $\pi_1^{(1)}, \pi_1^{(2)}, \dots, \pi_1^{(n)}, \dots$ converge uniformemente a f .

Si consideri

- la funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-5, 5]$;
- la funzione lineare a tratti $\pi_1^{(n)}$ interpolante f in n punti equispaziati

$$t_k = -5 + \frac{10k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

Dopo qualche calcolo si vede che

$$f^{(1)}(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f^{(2)}(x) = \frac{2 \cdot (3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

e quindi visto che

- $h_i = t_{i+1} - t_i = h = 10/n$,
- $\max_{s \in [-5, 5]} |f^{(2)}(s)| = 2$,

ricaviamo che per $x \in [t_i, t_{i+1}]$ l'errore di interpolazione verifica

$$|f(x) - \pi_1^{(n)}(x)| \leq \frac{h_i^2}{8} \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |f^{(2)}(s)| \quad (7)$$

$$\leq \frac{h^2}{8} \max_{s \in [a, b]} |f^{(2)}(s)| = \frac{1}{8} \left(\frac{10}{n} \right)^2 \cdot 2 = \frac{100 \cdot 2}{8n^2}. \quad (8)$$

Di conseguenza, da

$$0 \leq |f(x) - \pi_1^{(n)}(x)| \leq \frac{100 \cdot 2}{8n^2}$$

abbiamo

$$0 \leq \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq \frac{200}{8n^2}.$$

e come detto sopra deduciamo per il teorema del confronto che

$$\lim_n \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - \pi_1^{(n)}(x)| = 0,$$

ovvero la successione $\{\pi_1^{(n)}\}$ converge uniformemente a f .

n	E_n	n	E_n
2	$9.62e-01$	16384	$9.31e-08$
4	$7.35e-01$	32768	$2.32e-08$
8	$3.38e-01$	65536	$5.79e-09$
16	$1.00e-01$	131072	$1.45e-09$
32	$2.54e-02$	262144	$3.63e-10$
64	$6.26e-03$	524288	$9.08e-11$
128	$1.55e-03$	1048576	$2.27e-11$
256	$3.84e-04$	2097152	$5.67e-12$
512	$9.55e-05$	4194304	$1.42e-12$
1024	$2.38e-05$	8388608	$3.54e-13$
2048	$5.95e-06$	16777216	$8.78e-14$
4096	$1.49e-06$	33554432	$2.23e-14$
8192	$3.71e-07$	67108864	$5.66e-15$

Tabella: Grado n ed errore $E_n = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - \pi_1^{(n)}(x)|$ con $\pi_1^{(n)}$ interpolante f di tipo lineare a tratti, in $n + 1$ nodi equispaziati. Si osservi come numericamente $E_n \rightarrow 0$.

Il controesempio di Runge

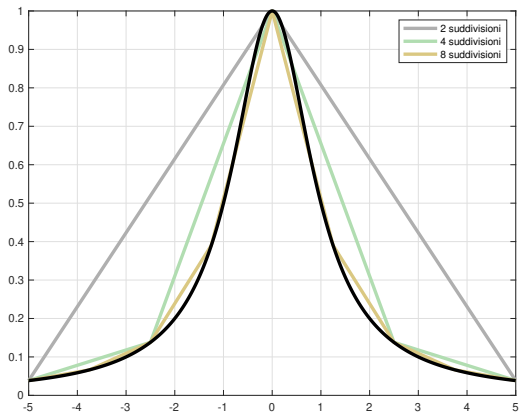


Figura: Funzione di Runge e interpolanti a tratti di grado 1 (in 2,4,8 suddivisioni equispaziate).

Una risposta generale al citato problema di convergenza uniforme è stata data nel 1946 da Schoenberg, generalmente considerato lo scopritore delle spline (cf. [9] [6], [7], [8]).

Definizione (Spline di ordine m , [1], p.166)

Si considerino i punti $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Una funzione s tale che

- *s è un polinomio di grado al più $m - 1$ in ogni subintervallo $[t_{i-1}, t_i]$;*
- *$s \in C^{(m-2)}([a, b])$;*

*si dice **spline** di ordine m (o equivalentemente di grado $m - 1$).*

Se in particolare interpola le coppie

$$(t_k, y_k), \quad k = 0, \dots, n,$$

*si dice **interpolante** tali dati.*

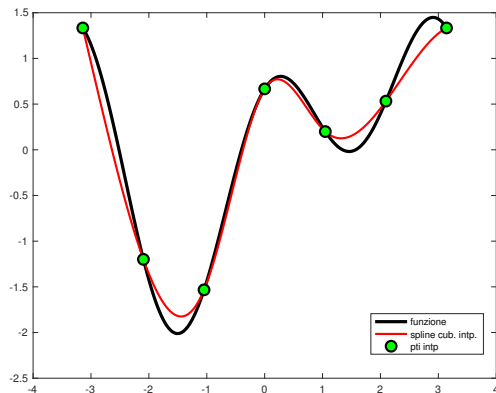


Figura: La funzione $f(t) = \sin(t) + \cos(2 \cdot t) - \cos(t)/3$ in $[-\pi, \pi]$ e una spline s_3 di ordine 4 interpolante f , nei punti $x_k = -\pi + k \cdot \frac{2\pi}{6}$, $k = 0, \dots, 6$, ovvero interpolante le coppie $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, 6$.

Esempio

Il primo caso è quello delle *splines di grado $m^* = 1$* , ovvero ordine $m = m^* + 1 = 2$ cioè funzioni che

- in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \dots, n-1$) sono polinomi di grado $m^* = 1$,
- globalmente funzioni di classe $C^{m^*-1}([a, b]) = C^0([a, b])$, cioè continue.

Evidentemente coincidono con le funzioni lineari a tratti, relativamente a $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$.

Esempio

Per grado $m^* = 3$, ovvero ordine $m = m^* + 1 = 4$ otteniamo le cosiddette *splines cubiche s_3* , cioè funzioni che

- in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \dots, n-1$) siano polinomi di grado $m^* = 3$,
- globalmente funzioni di classe $C^{m^*-1}([a, b]) = C^2([a, b])$.

Come vedremo dopo, per garantirne l'unicità si chiedono condizioni aggiuntive.

Commento (Funzioni polinomiali a tratti e splines: differenze)

Esistono molte *differenze tra interpolanti spline e interpolanti polinomiali a tratti*. Ne citiamo alcune.

- Possono avere *diversa regolarità*. Osserviamo che **non sempre** le funzioni polinomiali a tratti di grado s sono di classe C^{s-1} come invece lo sono le splines.
- Mentre le funzioni interpolanti polinomiali a tratti di grado s richiedono che il *numero di punti da interpolare* sia

$$sm + 1$$

per qualche numero di suddivisioni m , le splines di grado s sono *definite su un insieme di punti arbitrari*, indipendentemente dal grado.

Esempio

Dati 6 punti (x_k, y_k) , con $k = 0, \dots, 5$:

- *é possibile calcolare una spline cubica che interpoli tali dati;*
- *una interpolante cubica polinomiale a tratti, introdotta precedentemente, su una sola suddivisione richiede 4 punti, su 2 suddivisioni richiede 7 punti, altrimenti almeno 10 punti, e quindi non é adatta a interpolare solo 6 punti.*

Interpolazione spline (spline cubiche e interpolanti polinomiali a tratti)

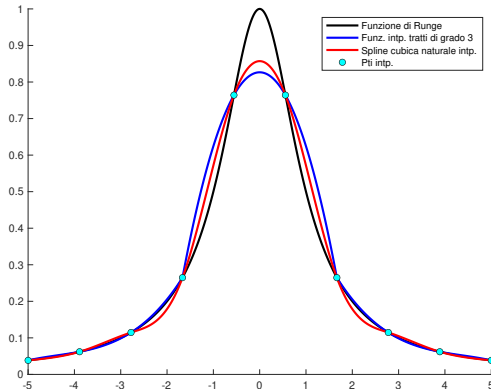


Figura:

In **nero** la funzione di Runge, in **rosso**, una interpolante spline cubica s_3 (avente $s_2^{(2)}(a) = s_2^{(2)}(a) = 0$), nei punti $x_k = -5 + k \cdot 10/9$, $k = 0, \dots, 9$. In **blu**, la interpolante polinomiale p_3^* a tratti di grado 3, con suddivisione $[0, x_3]$, $[x_3, x_6]$, $[x_6, x_9]$. Si osservi che i punti $x_3 = -1.\bar{6}$, $x_6 = 1.\bar{6}$ sono angolosi per p_3^* . Le derivate infatti valgono $\lim_{x \rightarrow x_3^-} (p_3^*)'(x) \approx 0.1990$, $\lim_{x \rightarrow x_3^+} (p_3^*)'(x) \approx 0.6743$,
 $\lim_{x \rightarrow x_6^-} (p_3^*)'(x) \approx -0.6736$, $\lim_{x \rightarrow x_6^+} (p_3^*)'(x) \approx -0.1992$.

(Unicità splines cubiche)

Nel caso delle splines cubiche s_3 , *l'unicità dell'interpolante* è legata (ma non solo!) all'aggiungere alcune proprietà di s_3 agli estremi x_0, x_n .

Osserviamo infatti che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ le spline si possano rappresentare come

$$s_3(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x - x_i) + c_{3,i}(x - x_i)^2 + c_{4,i}(x - x_i)^3, \quad i = 0, \dots, n-1$$

e quindi per determinare s_3 in $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$ servono **4n** valori $c_{i,j}$, ovvero 4 valori per ogni indice i .

Da ragionamenti sulle proprietà della *regolarità* della spline interpolante si vede che sono disponibili **4n - 2 condizioni**:

- funzione continua nei punti di giunzione x_1, \dots, x_{n-1} ;
- derivata prima continua in x_1, \dots, x_{n-1} ;
- derivata seconda continua in x_1, \dots, x_{n-1} ;
- interpolazione dei dati in x_0, \dots, x_n ;

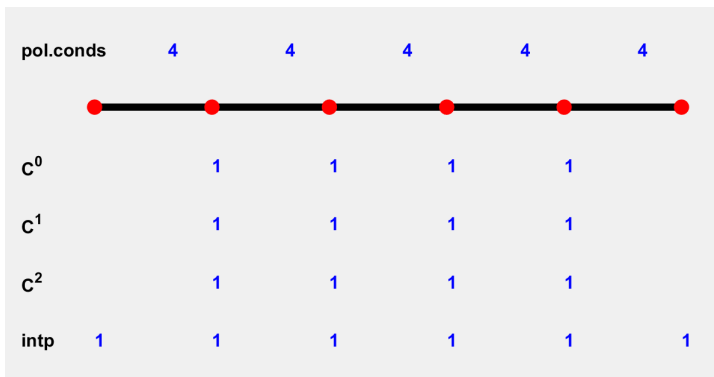


Figura: Unicità delle splines cubiche. Esempio dei vincoli.

Visto che *mancano 2 condizioni* (ovvero $4n - (4n - 2)$), usualmente si procede richiedendo una delle seguenti proprietà aggiuntive a s_3 :

- *Spline naturale*: $s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b) = 0$.
- *Spline periodica*: $s_3^{(1)}(a) = s_3^{(1)}(b)$, $s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b)$.
- *Spline vincolata*: $s_3^{(1)}(a) = f^{(1)}(a)$, $s_3^{(1)}(b) = f^{(1)}(b)$.

Nota. (Storica)

Storicamente le spline sono state degli importanti strumenti di disegno, ad esempio utilizzate per progettare navi.

Prendendo spunto da questo strumento, Schoenberg ha introdotto compiutamente questo concetto matematico nel 1946, che ha cominciato ad avere un impatto nel mondo automobilistico negli anni 60 (studi rivelatisi poi importanti in aziende come Citroën, Renault, General Motors).

Tali studi e loro modifiche hanno permesso di definire i moderni strumenti di grafica, come pure applicazioni in svariati campi, come ad esempio il disegno di fonts.

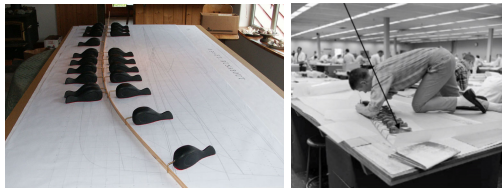


Figura: Lo strumento noto come *spline*, di uso comune tra i disegnatori del dopoguerra.

Interpolazione spline: cubiche

Nota. (Splines not-a-knot)

La spline con vincolo **not-a-knot** forza $s_3^{(3)}$ ad essere continua nel secondo e nel penultimo nodo (e di conseguenza si può mostrare che ciò impone che i polinomi nei primi e negli ultimi due intervalli siano uguali) (cf. [1], p. 171).

In altre parole,

- la suddivisione è data da $n - 2$ subintervalli $[x_0, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-2}, x_n]$,
- si interpolano i dati y_0, \dots, y_n nei nodi x_0, \dots, x_n .

Si osservi che, nel caso della condizione knot-a-knot se i punti da interpolare sono x_0, \dots, x_n e gli $n - 2$ intervalli della suddivisione sono $[x_0, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ allora necessitano $4(n - 2)$ condizioni per determinare la spline cubica.

Le condizioni dovute

- all'interpolazione sono $n + 1$,
- alla regolarità sono $3(n - 3)$, poichè gli $n - 3$ punti che sono estremi di subintervalli interni sono x_2, \dots, x_{n-2} ,

e quindi sono pure $4(n - 2)$, ovvero quelle necessarie per determinare la spline cubica.

Visto che

- la restrizione del polinomio $s_3|_{[x_0, x_2]}$ in $[x_0, x_2]$ è sicuramente un polinomio in $[x_0, x_1]$ e $[x_1, x_2]$ e ovviamente essendo $s_3|_{[x_0, x_2]} \in C^\infty([x_0, x_2])$ e quindi $C^2([x_0, x_2])$;
- la restrizione di un polinomio in $[x_{n-2}, x_n]$ è sicuramente un polinomio in $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ e $[x_{n-1}, x_n]$ e ovviamente essendo di classe $s_3|_{[x_{n-2}, x_n]} \in C^\infty[x_{n-2}, x_n]$ e quindi $C^2([x_{n-2}, x_n])$;

si deduce che le splines cubiche not-a-knot sono splines cubiche relativamente alla suddivisione data dai punti $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$.

Errore dell'interpolante spline cubica.

Analizziamo l'errore effettuato da una spline cubica $s_{3,n} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che interpola le coppie $(x_i, f(x_i))$ dove $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \dots, n$ è un set di punti equispaziati (con spaziatura $h = (b-a)/n$). Si mostra (non facile!) che:

Teorema

Supponiamo $f \in C^4([a, b])$. Sia $s_{3,n}$ una spline cubica, che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n$, con $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$ (ad esempio di tipo "naturale", o "periodica", o "vincolata").

Allora esistono le costanti c_0, c_1, c_2 , indipendenti da $h = \frac{(b-a)}{n}$ tale che

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - s_{3,n}(x)| \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} = c_0 (b-a)^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} / n^4, \quad (9)$$

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(1)}(x) - s_{3,n}^{(1)}(x)| \leq c_1 h^3 \|f^{(4)}\|_{\infty} = c_1 (b-a)^3 \|f^{(4)}\|_{\infty} / n^3, \quad (10)$$

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(2)}(x) - s_{3,n}^{(2)}(x)| \leq c_2 h^2 \|f^{(4)}\|_{\infty} = c_2 (b-a)^2 \|f^{(4)}\|_{\infty} / n^2 \quad (11)$$

dove $\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Nota.

Nel caso di spline interpolanti e vincolate si ha $c_0 = 5/384$, $c_1 = 1/24$, $c_2 = 3/8$.

Errore dell'interpolante spline cubica

Nota. (Ordine)

Le spline cubiche si dicono di **ordine 4** proprio perché

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - s_{3,n}(x)| \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

Nota. (Convergenza uniforme e derivate)

Si noti come in quest'ultimo teorema si afferma che se $f \in C^4([a, b])$ e le suddivisioni sono uniformi, allora non solo la spline approssima la funzione, ma pure le sue **derivate convergono uniformemente** alle rispettive derivate della funzione f , qualora n tenda ad infinito.

Nota. (Approssimazione di funzione ma non di sue derivate)

Se $f \approx g$, non è detto $f' \approx g'$. A tal proposito si considerino per $x \in [0, 10^{-8}\pi/2]$

$$f(x) \equiv 0, \quad g(x) = 10^{-8} \sin(10^8 x)$$

Essendo g crescente e non negativa in $[0, 10^{-8}\pi/2]$, si vede che

$$\max_{x \in [0, 10^{-8}\pi/2]} |f(x) - g(x)| = |0 - 10^{-8} \sin(10^8 \cdot 10^{-8}\pi/2)| = 10^{-8}.$$

D'altra parte, essendo $f'(x) \equiv 0$ e $g'(x) = \cos(10^8 x)$, in virtù del fatto che g' è decrescente e non negativa in $[0, 10^{-8}\pi/2]$,

$$\max_{x \in [0, 10^{-8}\pi/2]} |f'(x) - g'(x)| = \max_{x \in [0, 10^{-8}\pi/2]} g'(x) = \cos(10^8 \cdot 0) = 1.$$

Il controesempio di Runge e splines cubiche

Esempio (Splines cubiche e funzione di Runge)

Analizzare la convergenza delle splines cubiche $s_{3,n}$ interpolanti (con vincoli naturali, oppure vincolati, oppure periodici) in n punti equispaziati

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

Svolgimento.

Dopo qualche calcolo si vede che

$$f^{(4)}(x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^5}, \quad \|f^{(4)}\|_\infty = \max_{x \in [-5, 5]} |f^{(4)}(x)| = 24$$

e che quindi per un qualche c_0 indipendente da n

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f - s_{3,n}\|_\infty &:= \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - s_{3,n}(x)|_\infty \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_\infty \\ &= c_0 \frac{(b-a)^4}{n^4} \cdot 24. \end{aligned} \tag{12}$$

Essendo

$$0 \leq \|f - s_{3,n}\|_{\infty} := \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - s_{3,n}(x)|_{\infty} \leq c_0 \frac{(b-a)^4}{n^4} \cdot 24$$

per il teorema del confronto

$$\lim_n \|f - s_{3,n}\|_{\infty} = 0$$

ovvero le spline cubiche $s_{3,n}$ che interpolano nei nodi

$$x_k = -5 + k \frac{10}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

la funzione di Runge f , sono tali che la successione $\{s_{3,n}\}$ converge uniformemente a f .

n	E_n	n	E_n
2	$9.62e-01$	512	$1.58e-07$
4	$7.01e-01$	1024	$3.93e-08$
8	$2.46e-01$	2048	$9.82e-09$
16	$3.09e-02$	4096	$2.45e-09$
32	$1.31e-03$	8192	$2.15e-10$
64	$4.81e-05$	16384	$2.98e-11$
128	$2.56e-06$	32768	$6.95e-13$
256	$6.36e-07$	65536	$3.08e-15$

Tabella: Grado n ed errore $E_n = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - s_{3,n}(x)|$ con $s_{3,n}(x)$ interpolante f di tipo spline cubica naturale, in $n+1$ nodi equispaziati. Si osservi come numericamente $E_n \rightarrow 0$ e di come la convergenza sia molto più rapida che nel caso delle spline interpolanti di grado 1.

Il controesempio di Runge

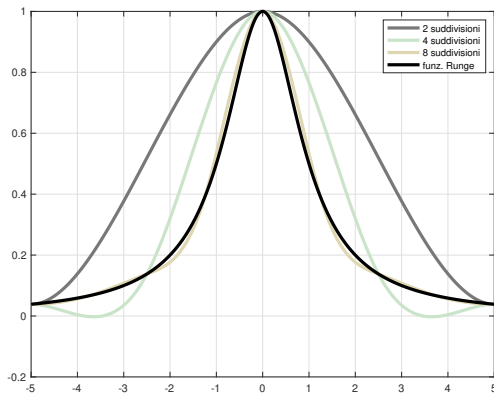


Figura: Funzione di Runge e interpolanti spline cubiche naturali (in 2,4,8 suddivisioni equispaziate).

Il controesempio di Runge

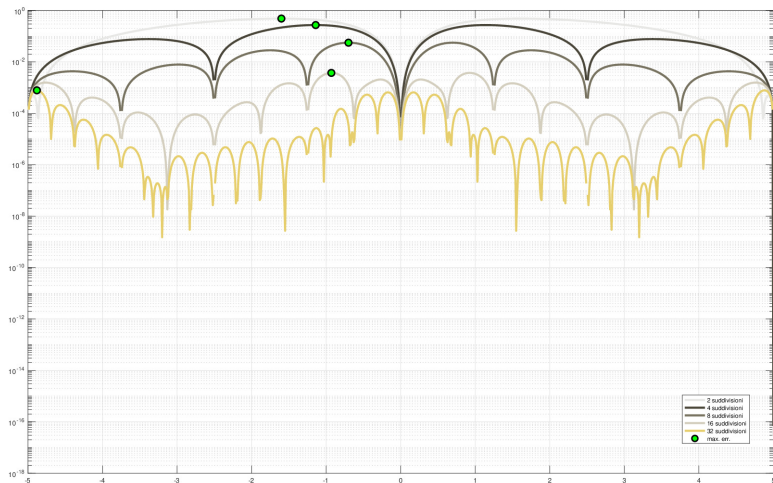











Figura: Funzione di Runge e interpolanti spline cubiche naturali (in 2,4,8,16,32 suddivisioni equispaziate). Errori puntuali e massimi errori (rispettivamente e approssimativamente $4.8e-1$, $2.7e-1$, $5.6e-2$, $3.7e-3$, $7.8e-4$).

-  K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
-  V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, 1990.
-  Carl DeBoor, *personal homepage*.
-  A. Suli e D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2003.
-  A. Townsend, On the Spline,
<http://www.alatown.com/spline/#more-809>.
-  Wikipedia, Funzione Spline.
-  Wikipedia, Spline Device.
-  Wikipedia, Spline Mathematics.
-  Wikipedia, Interpolazione Spline.