

Minimi quadrati

Ángeles Martínez Calomardo e Alvisé Sommariva

Università degli Studi di Padova

3 dicembre 2012

Approssimazione ai minimi quadrati

- Sia fissata una certa funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di cui è noto il valore nei punti $\{x_k\}_{k=1,\dots,n} \subset \Omega$. Hp. $f \in C(\Omega)$, $\Omega = (a, b)$ anche non limitato (per semplicità, si può generalizzare).
- Siano date m funzioni lin. indep. $\phi_1, \dots, \phi_m : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si cerchino $\mathbf{a} = (a_j)_{j=1,\dots,m}$ per cui la funzione

$$\psi^*(x) = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x)$$

minimizza tra tutte le funzioni del tipo $\psi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x)$,

$$\|f - \psi\|_{2,d} := \sqrt{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - \psi(x_k)|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x_k)|^2}$$

La funzione ψ^* si dice **approssimante ai minimi quadrati (discreti)** di f nello spazio $\mathcal{S} = \text{span}(\{\phi_k\}_{k=1,\dots,m})$.

Approssimazione ai minimi quadrati e sistemi lineari

Posto $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$ e definiti

- V la matrice $n \times m$ le cui componenti sono $V_{i,j} = \phi_j(x_i)$,
- \mathbf{y} il vettore $n \times 1$ le cui componenti sono $y_k = f(x_k)$,
- \mathbf{a} il vettore $m \times 1$ le cui componenti sono a_k ,

il **problema di approssimazione ai minimi quadrati** consiste nel risolvere il **sistema sovradeterminato** $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$ cosicchè sia minima $\|V\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2$ in quanto

$$\begin{aligned}\|V\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k - (V\mathbf{a})_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k - \sum_{j=1}^m V_{k,j} a_j|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x_k)|^2} = \|f - \sum_{j=1}^m a_j \phi_j\|_{2,d}\end{aligned}$$

NB: Si osservi che V è rettangolare e il problema $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$ potrebbe non avere sol. classica \mathbf{a} .

Digitiamo sulla shell di Matlab

```
>> x=0:0.01:2*pi;  
>> y=sin(2*x)+(10^(-1))*rand(size(x));  
>> plot(x,y,'r-');
```

- Interpretazione: perturbazione della funzione $\sin(2x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
- Necessità: ricostruire $\sin(2x)$ (e non funz. perturbata).
- Nota: non ha senso utilizzare un interpolante polinomiale p di grado n nè una spline interpolante visto che ricostruirebbero la funzione perturbata.

Minimi quadrati e polyfit

Scriviamo sulla shell di Matlab/Octave `help polyfit`. In una recente release di Matlab appare

```
POLYFIT Fit polynomial to data.  
POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a polynomial P(  
X)  
of degree N that fits the data, P(X(I))~=Y(I), in a  
least  
-squares sense.
```

In altri termini `polyfit` calcola i coefficienti del polinomio p_N di grado N che *meglio* approssima (in norma 2 discreta) la funzione f avente nel vettore di nodi X i valori Y (cioè $Y(i) := f(X(i))$). Operativamente si cerca il polinomio p_N per cui risulta minima

$$\|f - p_N\|_{2,d} = \sqrt{\sum_i |f(x_i) - p_N(x_i)|^2}.$$

- Posto $f(x) = \sin(x)$ e $\tilde{f}(x) = \sin(x) + \delta(x)$, confrontiamo graficamente per $n = 2, \dots, 8$, nei nodi $x_k = kh$, $h = 2\pi/999$, $k = 0, \dots, 999$, la funzione perturbata $f(x) = \sin(x) + \delta(x)$ con la approssimante ai minimi quadrati p_n^* .
- Valutiamo per $n = 2, \dots, 8$ la quantità $\|f - p_n^*\|_{2,d}$ e $\|\tilde{f} - p_n^*\|_{2,d}$.
- Valutiamo per $n = 2, \dots, 8$ la quantità $\|f - p_n^*\|_{\infty,d}$ e $\|\tilde{f} - p_n^*\|_{\infty,d}$, dove ricordiamo

$$\|g\|_{\infty,d} = \max_{k=0,\dots,999} |g(x_k)|.$$

Applicazione polyfit

Salviamo in esempio.m:

```
x=linspace(0,2*pi,1000);  
y=sin(2*x); yy=y+(10^(-2))*rand(size(x));  
for n=2:8  
    coeff=polyfit(x,yy,n); % COEFFS. BEST APPROX (B.A.)  
    z=polyval(coeff,x); % VALORE B.A. NEI NODI "x".  
    plot(x,yy,'r-',x,z,'k-');  
    err2=norm(z-y,2); err2p=norm(z-yy,2); % ERRS.  
    errinf=norm(z-y,inf); errinfp=norm(z-yy,inf); % ERRS.  
    fprintf('\n\t[DEG]:%2.0f',n);  
    fprintf(' [2]:%2.2e %2.2e',err2,err2p);  
    fprintf(' [INF]:%2.2e %2.2e',errinf,errinfp);  
    pause(2);  
end  
fprintf('\n \n');
```

```
>> % [ERR.][2]: SIN.-SIN PERT. [INF]: SIN.-SIN PERT.  
>> esempio3  
  
[DEG]: 2 [2]:2.06e+01 2.06e+01 [INF]:1.13e+00 1.13e+00  
[DEG]: 3 [2]:1.89e+01 1.89e+01 [INF]:1.16e+00 1.16e+00  
[DEG]: 4 [2]:1.89e+01 1.89e+01 [INF]:1.16e+00 1.16e+00  
[DEG]: 5 [2]:6.86e+00 6.86e+00 [INF]:6.67e-01 6.64e-01  
[DEG]: 6 [2]:6.86e+00 6.86e+00 [INF]:6.68e-01 6.64e-01  
[DEG]: 7 [2]:1.23e+00 1.22e+00 [INF]:1.48e-01 1.44e-01  
[DEG]: 8 [2]:1.23e+00 1.22e+00 [INF]:1.47e-01 1.44e-01  
  
>>
```

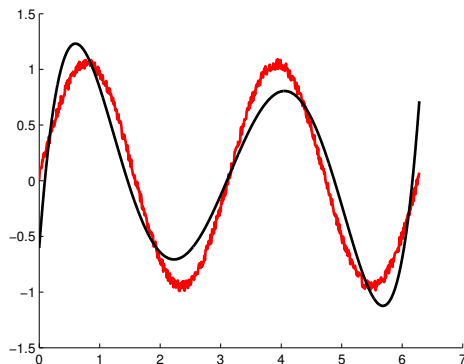



Figura : Grafico che illustra l'approssimazione ai minimi quadrati di grado 5 su una *perturbazione* della funzione $\sin(2x)$ (campionamento in nodi equispaziati)).

Nota: polyfit e interpolazione

Supponiamo fissati i punti $\{x_k\}_{k=1,\dots,m}$ (a due a due distinti) e sia p_{m-1} il polinomio che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ per $k = 1, \dots, m$. Evidentemente da $f(x_i) = p_{m-1}(x_i)$ per $i = 1, \dots, m$ abbiamo

$$\|f - p_{m-1}\|_{2,d} = \sqrt{\sum_{i=1}^m |f(x_i) - p_{m-1}(x_i)|^2} = 0,$$

e quindi il polinomio interpolatore risulta la approssimante ai minimi quadrati di f (relativa alla norma 2 discreta basata sui punti $\{x_k\}_{k=1,\dots,m}$).

Di conseguenza, il comando `coeffs=polyfit(x,y,n-1)` darà i coefficienti del polinomio interpolatore qualora i vettori x , y abbiano dimensione n .

Esercizio

Data una popolazione di individui si vuole stimare la relazione tra pressione arteriosa ed età. La seguente tabella riporta i dati relativi al campionamento:

Età	Pressione
25	120
30	125
42	135
55	140
69	155
70	160

Si ipotizza una relazione lineare tra le grandezze del tipo:

$$y = ax + b$$

Si richiede di stimare i coefficienti della retta mediante il metodo dei minimi quadrati.