

Quadratura numerica

Ángeles Martínez Calomardo e Alvisé Sommariva

Università degli Studi di Padova

3 dicembre 2012

Il problema della quadratura numerica consiste nell'approssimare l'*integrale definito* di una funzione f in un intervallo avente estremi di integrazione a, b (non necessariamente finiti) cioè

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

con

$$I_N(f) := \sum_{k=1}^N w_k f(x_k)$$

I termini w_i e $x_i \in \mathcal{I} = [a, b]$ sono detti rispettivamente **pesi** e **nodi**. Se $I(p_M) = I_N(p_M)$ per ogni polinomio p_M di grado M , ed esiste un polinomio q di grado $M + 1$ per cui si abbia $I(q) \neq I_N(q)$ allora si dice che la formula ha **grado di precisione** M .

Si supponga $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} . Le *regole* di tipo *Newton-Cotes* si ottengono integrando l'interpolante di f in nodi equispaziati

$$x_k = a + \frac{(k-1)(b-a)}{N-1}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Esempi:

- $N=2$, **regola del trapezio**, **g.d.p.=1**:

$$I(f) \approx S_1(f) := S_1(f, a, b) := \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$$

- $N=3$, **regola di Cavalieri-Simpson**, **g.d.p.=3**:

$$I(f) \approx S_3(f) := S_3(f, a, b) := \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Formule di Newton-Cotes

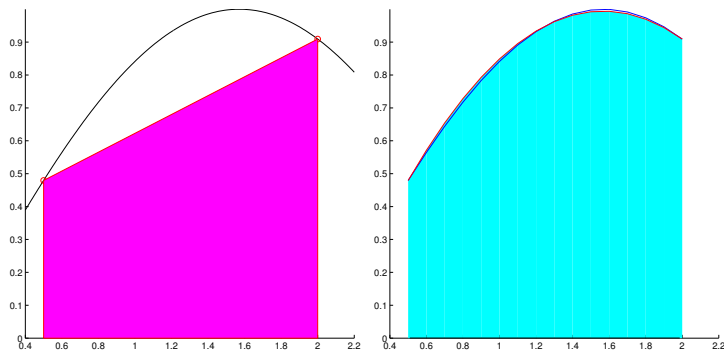


Figura : Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$ (rispettivamente area in magenta e in azzurro).

Errori formule di Newton-Cotes

Denotiamo con \mathbb{P}_k lo spazio dei polinomi di grado k . Allora valgono le seguenti formule d'errore:

- **regola del trapezio**, g.d.p.=1:
 $E_1(f) := I(f) - S_1(f) = \frac{-h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$ per qualche $\xi \in (a, b)$.
- **regola di Cavalieri-Simpson**, g.d.p.=3:
 $E_3(f) := I(f) - S_3(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$, $h = \frac{b-a}{2}$ per qualche $\xi \in (a, b)$;

Si noti il legame tra formule dell'errore e g.d.p.:

- nel caso della formula dei trapezi, se $f \in \mathbb{P}_2$, allora potrebbe essere essere $f^{(2)}(\xi) \neq 0$, mentre se $f \in \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) = 0$;
- nel caso della formula di Cavalieri-Simpson, se $f \in \mathbb{P}_4$, allora potrebbe essere essere $f^{(4)}(\xi) \neq 0$, mentre se $f \in \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) = 0$.

Formule di Newton-Cotes composte

Si suddivida l'intervallo (chiuso e limitato) $[a, b]$ in N subintervalli $T_j = [x_j, x_{j+1}]$ tali che $x_j = a + jh$ con $h = (b - a)/N$. Dalle proprietà dell'integrale

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} S(f, x_j, x_{j+1}) \quad (1)$$

dove S è una delle regole di quadratura finora esposte (ad esempio $S_3(f)$). Le formule descritte in (??) sono dette **composte**.

Formule di Newton-Cotes

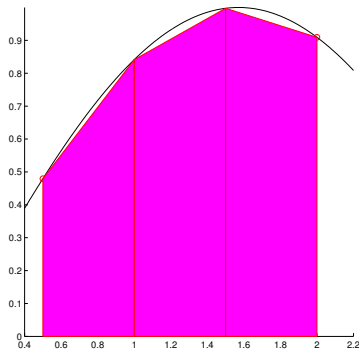


Figura : Formula dei trapezi composta $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$.

Formula composta dei trapezi: fissati il numero N di subintervalli e i punti $x_k = a + kh$ dove $h = \frac{b-a}{N}$ è definita da

$$S_1^{(c)} := h \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right] \quad (2)$$

il cui errore è

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}$$

per qualche $\xi \in (a, b)$;

Formula composta di Cavalieri-Simpson: fissati il numero N di subintervalli e i punti $x_k = a + kh/2$ dove $h = \frac{b-a}{N}$ sia

$$I(f) \approx S_3^{(c)}(f) := \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N}) \right] \quad (3)$$

il cui errore è

$$E_3^{(c)}(f) := I(f) - S_3^{(c)}(f) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2} \right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

per qualche $\xi \in (a, b)$.

Formula trapezi composta

La funzione `trapezi_composta` appena esposta calcola i nodi e i pesi della omonima formula composta.

```
function [x,w]=trapezi_composta(N,a,b)
% FORMULA DEI TRAPEZI COMPOSTA.
% INPUT:
% N: NUMERO SUBINTERVALLI.
% a, b: ESTREMI DI INTEGRAZIONE.
% OUTPUT:
% x: NODI INTEGRAZIONE.
% w: PESI INTEGRAZIONE (INCLUDE IL PASSO!).
h=(b-a)/N; % PASSO INTEGRAZIONE.
x=a:h:b; x=x'; % NODI INTEGRAZIONE.
w=ones(N+1,1); % PESI INTEGRAZIONE.
w(1)=0.5; w(N+1)=0.5;
w=w*h;
```

Formula Cavalieri-Simpson composta

La funzione `simpson_composta` appena esposta calcola i nodi e i pesi della omonima formula composta.

```
function [x,w]=simpson_composta(N,a,b)
% FORMULA DI SIMPSON COMPOSTA.
% INPUT:
% N: NUMERO SUBINTERVALLI.
% a, b: ESTREMI DI INTEGRAZIONE.
% OUTPUT:
% x: INTEGRAZIONE.
% w: PESI INTEGRAZIONE (INCLUDE IL PASSO!).
h=(b-a)/N;           % AMPIEZZA INTERVALLO.
x=a:(h/2):b;         % NODI INTEGRAZIONE.
w=ones(2*N+1,1);     % PESI INTEGRAZIONE.
w(3:2:2*N-1,1)=2*ones(length(3:2:2*N-1),1);
w(2:2:2*N,1)=4*ones(length(2:2:2*N),1);
w=w*h/6;
```

Esempio 1

Vogliamo approssimare l'integrale

$\int_{-1}^1 x^{20} dx = 2/21 \approx 0.09523809523810$ tramite le formule composte dei trapezi e Cavalieri-Simpson. Perchè il paragone sia veritiero, decidiamo che il numero di valutazioni della funzione integranda sia uguale. Scriviamo nel file `demo_composte.m`

```
N=11; %SCEGLIERE DISPARI.
a=-1; b=1; f=inline('x.^20');
% a=0; b=1; f=inline('exp(x)');
N_trap=N-1; % TRAPEZI COMPOSTA.
[x_trap,w_trap]=trapezi_composta(N_trap,a,b);
fx_trap=fval(f,x_trap); I_trap=w_trap'*fx_trap;
N_simpson=(N-1)/2; % CAV.SIMPSON COMPOSTA.
[x_simp,w_simp]=simpson_composta(N_simpson,a,b);
fx_simp=fval(f,x_simp); I_simp=w_simp'*fx_simp;
fprintf('\n\t [TPZ.COMP.][PTS]: %4.0f',length(x_trap));
fprintf('\n\t [TPZ.COMP.][RIS]: %14.14f',I_trap);
fprintf('\n\t [CS.COMP.][PTS]: %4.0f',length(x_simp));
fprintf('\n\t [CS.COMP.][RIS]: %14.14f \n\n',I_simp);
```

Esempio 1

Ricordando che il risultato è 0.09523809523810, otteniamo i poco soddisfacenti

```
[TRAPEZI COMPOSTA] [PTS]:    11
[TRAPEZI COMPOSTA] [RIS]: 0.20462631505024
[SIMPSON COMPOSTA] [PTS]:    11
[SIMPSON COMPOSTA] [RIS]: 0.13949200364447
```

Posto $N = 51$ nella prima riga di `demo_composte.m`

```
[TPZ . COMP . ] [PTS]:    51
[TPZ . COMP . ] [RIS]: 0.10052328836742
[CS . COMP . ] [PTS]:    51
[CS . COMP . ] [RIS]: 0.09542292188917
```

L'errore rel. della formula comp. dei trapezi è solo di $5.55 \cdot 10^{-2}$ mentre per quella di Cav. Simpson composta $1.94 \cdot 10^{-3}$, mentre gli err. assoluti sono risp. circa $5.28 \cdot 10^{-3}$ e $1.85 \cdot 10^{-4}$.

Esempio 2

Approssimiamo $\int_0^1 \exp(x) dx = \exp(1) - 1 \approx 1.718281828459046$ tramite le formule composte dei trapezi e Cavalieri-Simpson. Perchè il paragone sia veritiero, decidiamo che il numero di valutazioni della funzione integranda sia uguale. Modifichiamo la funzione f nel file `demo_composte.m` e ricaviamo

```
[ TPZ . COMP . ] [ PTS ] :    11  
[ TPZ . COMP . ] [ RIS ] :  1.71971349138931  
[ CS . COMP . ] [ PTS ] :    11  
[ CS . COMP . ] [ RIS ] :  1.71828278192482
```

Gli errori relativi sono rispettivamente circa $8.33 \cdot 10^{-4}$ e $5.55 \cdot 10^{-7}$, quelli assoluti circa $1.43 \cdot 10^{-3}$ e $9.55 \cdot 10^{-7}$.

Esempio 2: errore

Nel caso della formula dei trapezi composta, abbiamo

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}$$

per qualche $\xi \in (a, b)$ e quindi

$$|E_1^{(c)}(f)| \leq \left| \frac{-(b-a)}{12} h^2 \max_{x \in (0,1)} \exp(x) \right| \leq \frac{1}{12} h^2 \exp(1)$$

Nel nostro esempio $h = 0.2$ e quindi

$$|E_1^{(c)}(f)| \leq \frac{1}{12} h^2 \exp(1) = \frac{1}{12} 0.2^2 \exp(1) < 9.07 \cdot 10^{-3},$$

mentre l'errore assoluto effettivo era circa $1.43 \cdot 10^{-3}$.

Esempio 2: errore

Nel caso della formula di Cavalieri-Simpson composta, abbiamo

$$E_3^{(c)}(f) := I(f) - S_3^{(c)}(f) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

da cui

$$|E_3^{(c)}(f)| \leq \left| \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \max_{x \in (0,1)} \exp(x) \right| \leq \frac{1}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \exp(1)$$

Nel nostro esempio $h = 0.4$ e quindi

$$|E_3^{(c)}(f)| \leq \frac{1}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \exp(1) = \frac{1}{180} \left(\frac{0.4}{2}\right)^4 \exp(1) < 2.42 \cdot 10^{-5},$$

mentre l'errore assoluto effettivo era circa $9.55 \cdot 10^{-7}$.

Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^1 \cos(100 \cdot \arccos(x)) dx$$

utilizzando la formula dei trapezi e di Simpson, nel caso composto, con un numero di suddivisioni pari a $N = 2, 4, 6, \dots, 100$. Sapendo che l'integrale vale $2/(1 - 100^2)$, eseguire il plot in scala semilogaritmica sia degli errori relativi compiuti al crescere di N .