SPLINES [*]

A. SOMMARIVA [†] E M.VENTURIN [‡]

1. Introduzione. Si è visto che nel caso dell'interpolazione polinomiale, dati $N+1$ punti $a = x_0 < \ldots < x_N = b$, e i valori $y_0, \ldots, y_N$ ivi assunti da una funzione $y = f(x)$, esiste uno ed un solo polinomio p_N di grado N tale che

$$p_N(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, N. \tag{1.1}$$

Nel caso di nodi equispaziati

$$x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{N},\ k = 0, \ldots, N; \tag{1.2}$$

al crescere di N, non si puó garantire che $f(x) - p_n(x)$ tenda a 0 (si ricordi il fenomeno di Runge!).

Piú in generale per un teorema di Faber (cf. [2, p.132], [6]), qualsiasi sia l'insieme di nodi relativi all'intervallo limitato $[a,b]$ esiste una funzione continua f tale che l'interpolante P_n in tale set di punti non converge uniformemente a f (per $n \to \infty$). In altre parole al tendere di $n \to +\infty$, non si ha

$$\lim_{N\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_N(x)| \to 0.$$

Sorge spontaneo chiedersi se qualora si possegga un gran numero di punti, anche equispaziati, sia possibile calcolare un'approssimante di tipo polinomiale per cui al crescere di N si abbia $p_N \to f$.

Una risposta è stata data nel 1946 da Schoenberg (cf. [16], [7]), lo scopritore delle splines (cf. [12], [13], [14]). Ricordiamo che il termine spline deriva dal termine inglese dato all'omonimo strumento utilizzato da designers [5].

Il primo caso è quello delle splines di grado 1, cioè funzioni che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \ldots, N-1$) sono polinomi di grado $m = 1$ e globalmente funzioni di classe $C^{m-1} = C^0$, cioè continue.

Il caso generale di splines di grado m risulta piú complicato. Un esempio notevole è quello delle splines cubiche s_3, cioè funzioni che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \ldots, N-1$) siano polinomi di grado $m = 3$ e globalmente funzioni di classe $C^{m-1} = C^2$.

L'unicitá dell'interpolante è legata (ma non solo!) all'aggiungere alcune proprietá della spline agli estremi x_0, x_N.

Osserviamo infatti che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ le spline si possano rappresentare come

$$s_3(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x - x_i) + c_{3,i}(x - x_i)^2 + c_{4,i}(x - x_i)^3,\ i = 0, \ldots, N-1$$

e quindi per determinare s_3 in $\{x_i\}_{i=0,\ldots,N}$ servano $4N$ valori $c_{i,j}$. Da ragionamenti sulle proprietá della regolaritá della spline interpolante si vede che sono disponibili solo $4N-2$ condizioni (di cui $N+1$ dal fatto che $s_3(x_i) = f_i$). Si procede richiedendo quindi una delle seguenti proprietá aggiuntive a s_3:

---

[*] Ultima revisione: 23 giugno 2010

[†] DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA, VIA TRIESTE 63, 35121 PADOVA, ITALIA (`ALVISE@MATH.UNIPD.IT`)

[‡] DIPARTIMENTO DI INFORMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA, STRADA LE GRAZIE 15, 37134 VERONA, ITALIA (`MANOLO.VENTURIN@GMAIL.COM`)