

# Interpolazione polinomiale.

Ángeles Martínez Calomardo e Alvisè Sommariva

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

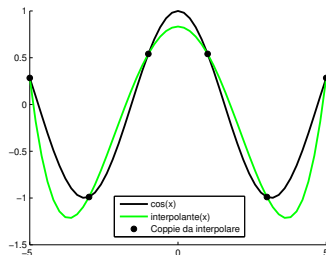
14 novembre 2012

# Interpolazione polinomiale

Sia  $\mathbb{P}_n$  lo sp. vett. dei polinomi di grado  $n$  in  $\mathbb{R}$ . Date  $n + 1$  coppie  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  con  $x_j \neq x_k$  se  $j \neq k$ , si calcoli  $p_n \in \mathbb{P}_n$  t.c.

$$p_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n$$

Tali polinomi  $p_n$  si dicono **interpolare**  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0, \dots, n}$  oppure interpolare i valori  $y_k$  nei nodi  $x_k$ .



**Figura :** Grafico che illustra l'interpolazione di  $\cos(x)$  in  $[-5, 5]$  su nodi equispaziati  $x_k = -5 + 2 \cdot k$  ( $k = 0, \dots, 5$ ).

Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- ▶ Esiste tale polinomio ed è unico? Sì.
- ▶ E' possibile calcolarlo? Sì,  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$ , dove  $L_k$  è il k-simo polinomio di Lagrange relativo ai punti  $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$ .
- ▶ **Teorema.** Sia  $f \in C^{(n+1)}(a, b)$  e sia  $p_n$  il polinomio che interpola le coppie  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\dots,n}$  con  $x_k \neq x_s$  se  $k \neq s$ . Allora

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \quad (1)$$

dove  $\xi \in \mathcal{I}$  con  $\mathcal{I}$  il più piccolo intervallo aperto contenente  $x_0, \dots, x_n$ .

# Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Vediamo alcuni sets di nodi.

- ▶ **Equispaziati:**  $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n$ .
- ▶ **Gauss-Chebyshev (scalati):** fissato  $n$ , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (2)$$

con

$$t_k = \cos \left( \frac{2k+1}{2n+2} \pi \right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (3)$$

- ▶ **Gauss-Chebyshev-Lobatto (scalati):** fissato  $n$ , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (4)$$

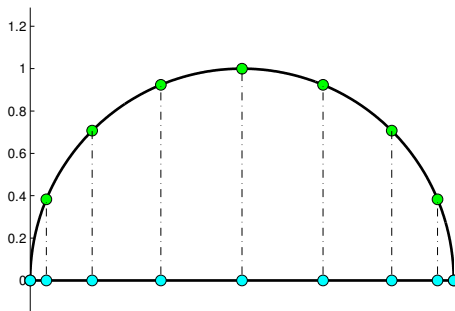
con

$$t_k = -\cos \left( \frac{k\pi}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n. \quad (5)$$

# Interpretazione geometrica Gauss-Chebyshev-Lobatto

I punti di Gauss-Chebyshev-Lobatto si possono interpretare geometricamente.

- ▶ Si considerano gli  $n + 1$  punti della circonferenza  $\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))\}_{k=0,\dots,n}$  con  $\theta_k = (k \cdot \pi)/n$
- ▶ Si proiettano  $\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))\}_{k=0,\dots,n}$  sull'asse delle ascisse.  
Le coordinate  $x$  di tali punti corrispondono ai punti di Gauss-Chebyshev-Lobatto.



# Convergenza ed esempio di Runge

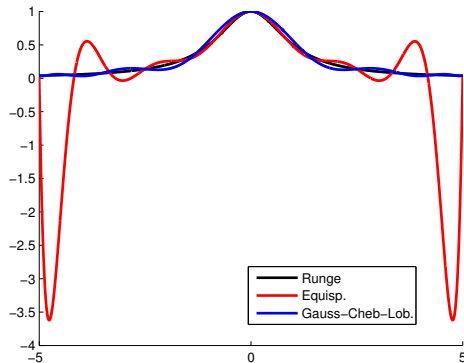
L'interpolante polinomiale in un set di nodi prefissati non converge sempre puntualmente alla funzione da approssimare. Infatti, per la **funzione di Runge**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5] \quad (6)$$

si ha che il **polinomio interpolatore  $p_n$  in nodi equispaziati non converge (puntualmente) a  $f$** . Fortunatamente ciò non succede per i nodi di Gauss-Chebyshev(-Lobatto).

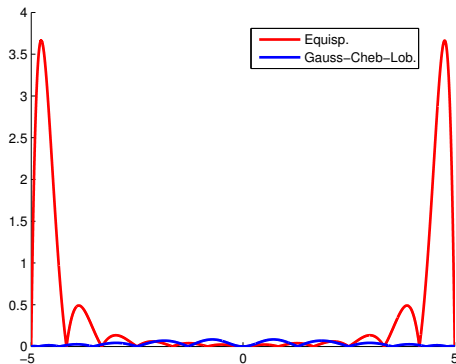
Purtroppo, per un teorema dovuto a **Faber**, esistono comunque funzioni continue  $f$  (ma non  $C^1$ !!) tali che l'interpolante  $p_n$  nei nodi di Gauss-Chebyshev(-Lobatto) non converge puntualmente a  $f$ . Questo teorema è generalizzabile ad una famiglia arbitraria di nodi.

# Esempio di Runge



**Figura :** Grafico della funzione di Runge  $1/(1+x^2)$  nell'intervallo  $[-5, 5]$  e delle sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Gauss-Chebyshev-Lobatto.

# Esempio di Runge



**Figura :** Grafico errore della funzione di Runge  $1/(1+x^2)$  nell'intervallo  $[-5, 5]$  con le sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Gauss-Chebyshev-Lobatto.



# Esempio di Runge

Se  $p_n \in \mathbb{P}_n$  è polinomio intp. nei nodi eqsp. o di G.-C.-L., vediamo al variare del grado quali sono gli errori  $\|1/(1+x^2) - p_n(x)\|_\infty$ :

Deg	Err. Eqs.	Err. GCL
2	6.46e - 001	9.62e - 001
3	7.07e - 001	6.46e - 001
4	4.38e - 001	8.29e - 001
5	4.33e - 001	4.58e - 001
6	6.09e - 001	6.39e - 001
7	2.47e - 001	3.11e - 001
8	1.04e + 000	4.60e - 001
9	2.99e - 001	2.04e - 001
10	1.92e + 000	3.19e - 001
11	5.57e - 001	1.32e - 001
12	3.66e + 000	2.18e - 001
13	1.07e + 000	8.41e - 002
14	7.15e + 000	1.47e - 001

**Importante:** l'esempio di Runge mostra che esiste una funzione  $C^\infty([-5, 5])$  tale che al crescere del numero di nodi equispaziati  $n$  non sia garantita nemmeno la convergenza puntuale!

D'altra parte sussiste il seguente teorema dovuto a Bernstein:

**Teorema.** Se  $f \in C^1([a, b])$  con  $[a, b]$  intervallo limitato e chiuso della retta reale, il polinomio  $p_n$  di grado  $n$  di interpolazione della funzione  $f$  nei nodi di Gauss-Chebyshev di grado  $n + 1$  converge uniformemente a  $f$  su  $[a, b]$ , per  $n \rightarrow \infty$ . Se inoltre  $f \in C^2([a, b])$  si ha la seguente stima dell'errore

$$\|f - p_n\|_\infty = O(n^{-1/2}).$$

# Interpolazione in Matlab/Octave

Supponiamo di dover interpolare le coppie  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0, \dots, n}$  e supponiamo sia  $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{y} = [y_0, \dots, y_n]$ . I coefficienti del polinomio interpolatore sono ottenibili dal comando `polyfit`. A tal proposito l'help di Matlab suggerisce:

```
>> help polyfit
```

```
POLYFIT Fit polynomial to data.
```

```
POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a  
polynomial P(X) of degree N that fits the  
data, P(X(I))~=Y(I), in a least-squares sense.
```

```
...
```

```
See also POLY, POLYVAL, ROOTS.
```

```
>>
```

# Interpolazione in Matlab/Octave

Per capire qualcosa in più eseguiamo il seguente codice

```
>> x=[-2 1 3];  
>> y=[-2 11 17];  
>> a=polyfit(x,y,2)  
a =  
    -0.2667     4.0667     7.2000  
>>
```

In effetti, calcolando manualmente il polinomio interpolatore si ha, semplificando quando ottenuto coi polinomi di Lagrange che è

$$p_2(x) = (-4/15) \cdot x^2 + (61/15) \cdot x + (36/5) \approx 0.2\bar{6}x^2 + 4.0\bar{6}x + 7.2.$$

Quindi, se  $a = (a_k)_{k=1,\dots,3}$ , abbiamo  $p_2(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$  e più in generale, se  $p_n$  è il polinomio interpolatore di grado  $n$ , e  $a = (a_k)$  è il vettore ottenuto utilizzando `polyfit`, allora

$$p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n+1}.$$

# Interpolazione in Matlab/Octave

Per valutare in un vettore di ascisse  $\mathbf{X} = [X_k]_{k=1,\dots,m}$  un polinomio

$$p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n+1}$$

i cui coefficienti sono i coeff. di in un vettore  $\mathbf{P} = [a_k]_{k=1,\dots,n+1}$  usiamo il comando `polyval`. Dall'help:

```
>> help polyval
To get started, select "MATLAB Help" from the
Help menu.
POLYVAL Evaluate polynomial.
Y = POLYVAL(P,X), when P is a vector of length
N+1 whose elements are the coefficients of a
polynomial, is the value of the polynomial
evaluated at X.
...
Y=P(1)*X^N+P(2)*X^(N-1)+...+P(N)*X+P(N+1)
>>
```

Dati i vettori  $\mathbf{x} = [x_k]_{k=1,\dots,n}$ ,  $\mathbf{y} = [y_k]_{k=1,\dots,n}$  sia  $p_{n-1}(x_k) = y_k$ , per  $k = 1, \dots, n$ . Sia  $\mathbf{s} = [s_k]_{k=1,\dots,m}$  e desideriamo calcolare  $\mathbf{t} = [t_k]_{k=1,\dots,m}$  per cui  $t_k = p_{n-1}(s_k)$ , per ogni  $k$ . A tal proposito introduciamo la funzione:

```
function t=interpol(x,y,s)

m=length(x)-1;
coeff=polyfit(x,y,m);
t=polyval(coeff,s);
```

# Esempio di Runge

Interpoliamo la funzione di Runge  $1/(1+x^2)$  in  $[-5, 5]$  sia su nodi equispaziati che di tipo Gauss-Chebyshev-Lobatto. A tal proposito definiamo la funzione di Runge

```
function [fx]=runge(x)
fx=1./(x.^2+1);
```

e una funzione che genera  $n$  nodi di Gauss-Chebyshev-Lobatto nell'intervallo  $[a, b]$ :

```
function xc=cheb(a,b,n)
for m=1:1:n
    xc(m)=(a+b)/2-((b-a)/2)*cos(pi*(m-1)/(n-1));
end
```

# Esempio di Runge

Quindi scriviamo il file `esperimento.m`

```
n=11; % GRADO.
% NODI TEST.
s=-5:10/(10*n):5;
% NODI EQSP.: ASCISSE/ORDINATE + INTP.TEST.
x=-5:10/n:5; y=runge(x);
t=interpol(x,y,s);
% NODI GCL.: ASCISSE/ORDINATE+INTP.TEST.
xgcl=cheb(-5,5,n+1); ygcl=runge(xgcl);
tt =interpol(xgcl, ygcl,s);
% PLOT INTP. VS RUNGE.
plot(s,runge(s),s,t,s,tt);
% ERRORI ASSOLUTI.
ee=norm(runge(s)-t,inf);ec=norm(runge(s)-tt,inf);
fprintf('\n\t[ERR.][EQS]:%2.2e [GCL]:%2.2e',ee,ec);
```



# Esempio di Runge: risultati

Al variare di  $n$ :

- ▶ Otteniamo la tabella degli errori vista in precedenza.
- ▶ Notiamo che la scelta di  $n$  non può essere eccessiva. Provare  $n = 30!!$
- ▶ Risulta evidente che **non sussiste** la convergenza puntuale al crescere di  $n$ , di  $p_n$  a  $1/(1 + x^2)$ , qualora si utilizzino nodi **equispaziati**.
- ▶ Risulta evidente che **sussiste** la convergenza puntuale al crescere di  $n$ , di  $p_n$  a  $1/(1 + x^2)$ , qualora si utilizzino nodi di **Gauss-Chebyshev-Lobatto**.

Calcolare analiticamente il polinomio di terzo grado che interpola le coppie  $(1, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(4, 12)$ ,  $(5, 21)$ . Quindi valutare tale polinomio nei punti di ascissa  $-1$ ,  $0$ ,  $10$ . Corrispondono tali valori a quelli ottenuti in Matlab/Octave utilizzando i comandi `polyfit`, `polyval`?