

# Minimi quadrati

Ángeles Martínez Calomardo e Alvisé Sommariva

Università degli Studi di Padova

4 dicembre 2012

# Approssimazione ai minimi quadrati

- Sia fissata una certa funzione  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di cui è noto il valore nei punti  $\{x_k\}_{k=1,\dots,n} \subset \Omega$ . Hp.  $f \in C(\Omega)$ ,  $\Omega = (a, b)$  anche non limitato (per semplicità, si può generalizzare).
- Siano date  $m$  funzioni lin. indep.  $\phi_1, \dots, \phi_m : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si cerchino  $\mathbf{a} = (a_j)_{j=1,\dots,m}$  per cui la funzione

$$\psi^*(x) = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x)$$

minimizza tra tutte le funzioni del tipo  $\psi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x)$ ,

$$\|f - \psi\|_{2,d} := \sqrt{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - \psi(x_k)|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x_k)|^2}$$

La funzione  $\psi^*$  si dice **approssimante ai minimi quadrati (discreti)** di  $f$  nello spazio  $\mathcal{S} = \text{span}(\{\phi_k\}_{k=1,\dots,m})$ .

# Approssimazione ai minimi quadrati e sistemi lineari

Posto  $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$  e definiti

- $V$  la matrice  $n \times m$  le cui componenti sono  $V_{i,j} = \phi_j(x_i)$ ,
- $\mathbf{y}$  il vettore  $n \times 1$  le cui componenti sono  $y_k = f(x_k)$ ,
- $\mathbf{a}$  il vettore  $m \times 1$  le cui componenti sono  $a_k$ ,

il **problema di approssimazione ai minimi quadrati** consiste nel risolvere il **sistema sovradeterminato**  $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$  cosicchè sia minima  $\|V\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2$  in quanto

$$\begin{aligned}\|V\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k - (V\mathbf{a})_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left| y_k - \sum_{j=1}^m V_{k,j} a_j \right|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n \left| f(x_k) - \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x_k) \right|^2} = \|f - \sum_{j=1}^m a_j \phi_j\|_{2,d}\end{aligned}$$

NB: Si osservi che  $V$  è rettangolare e il problema  $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$  potrebbe non avere sol. classica  $\mathbf{a}$ .

Digitiamo sulla shell di Matlab

```
>> x=0:0.01:2*pi;  
>> y=sin(2*x)+(10^(-1))*rand(size(x));  
>> plot(x,y,'r-');
```

- Interpretazione: perturbazione della funzione  $\sin(2x)$  nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ .
- Necessità: ricostruire  $\sin(2x)$  (e non funz. perturbata).
- Nota: non ha senso utilizzare un interpolante polinomiale  $p$  di grado  $n$  nè una spline interpolante visto che ricostruirebbero la funzione perturbata.

# Minimi quadrati e polyfit

Scriviamo sulla shell di Matlab/Octave `help polyfit`. In una recente release di Matlab appare

```
POLYFIT Fit polynomial to data.  
POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a polynomial P(X)  
of degree N that fits the data, P(X(I))~=Y(I), in a least  
-squares sense.
```

In altri termini `polyfit` calcola i coefficienti del polinomio  $p_N$  di grado  $N$  che *meglio* approssima (in norma 2 discreta) la funzione  $f$  avente nel vettore di nodi  $X$  i valori  $Y$  (cioè  $Y(i) := f(X(i))$ ). Operativamente si cerca il polinomio  $p_N$  per cui risulta minima

$$\|f - p_N\|_{2,d} = \sqrt{\sum_i |f(x_i) - p_N(x_i)|^2}.$$

- Posto  $f(x) = \sin(2x)$  e  $\tilde{f}(x) = \sin(2x) + \delta(x)$ , confrontiamo graficamente per  $n = 2, \dots, 8$ , nei nodi  $x_k = kh$ ,  $h = 2\pi/999$ ,  $k = 0, \dots, 999$ , la funzione perturbata  $f(x) = \sin(2x) + \delta(x)$  con la approssimante ai minimi quadrati  $p_n^*$ .
- Valutiamo per  $n = 2, \dots, 8$  la quantità  $\|f - p_n^*\|_{2,d}$  e  $\|\tilde{f} - p_n^*\|_{2,d}$ .
- Valutiamo per  $n = 2, \dots, 8$  la quantità  $\|f - p_n^*\|_{\infty,d}$  e  $\|\tilde{f} - p_n^*\|_{\infty,d}$ , dove ricordiamo

$$\|g\|_{\infty,d} = \max_{k=0,\dots,999} |g(x_k)|.$$

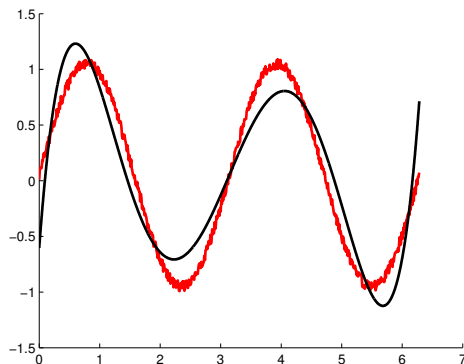
# Applicazione polyfit

Salviamo in esempio.m:

```
x=linspace(0,2*pi,1000);  
y=sin(2*x); yy=y+(10^(-1))*rand(size(x));  
for n=2:8  
    coeff=polyfit(x,yy,n); % COEFFS. BEST APPROX (B.A.)  
    z=polyval(coeff,x); % VALORE B.A. NEI NODI "x".  
    plot(x,yy,'r-',x,z,'k-');  
    err2=norm(z-y,2); err2p=norm(z-yy,2); % ERRS.  
    errinf=norm(z-y,inf); errinfp=norm(z-yy,inf); % ERRS.  
    fprintf('\n\t[DEG]:%2.0f',n);  
    fprintf(' [2]:%2.2e %2.2e',err2,err2p);  
    fprintf(' [INF]:%2.2e %2.2e',errinf,errinfp);  
    pause(2);  
end  
fprintf('\n \n');
```

```
>> % [ERR.][2]: SIN.-SIN PERT. [INF]: SIN.-SIN PERT.  
>> esempio  
  
[DEG]: 2 [2]:2.06 e+01 2.06 e+01 [INF]:1.13 e+00 1.13 e+00  
[DEG]: 3 [2]:1.89 e+01 1.89 e+01 [INF]:1.16 e+00 1.16 e+00  
[DEG]: 4 [2]:1.89 e+01 1.89 e+01 [INF]:1.16 e+00 1.16 e+00  
[DEG]: 5 [2]:6.86 e+00 6.86 e+00 [INF]:6.67 e-01 6.64 e-01  
[DEG]: 6 [2]:6.86 e+00 6.86 e+00 [INF]:6.68 e-01 6.64 e-01  
[DEG]: 7 [2]:1.23 e+00 1.22 e+00 [INF]:1.48 e-01 1.44 e-01  
[DEG]: 8 [2]:1.23 e+00 1.22 e+00 [INF]:1.47 e-01 1.44 e-01  
  
>>
```





**Figura :** Grafico che illustra l'approssimazione ai minimi quadrati di grado 5 su una *perturbazione* della funzione  $\sin(2x)$  (campionamento in nodi equispaziati)).

## Nota: polyfit e interpolazione

Supponiamo fissati i punti  $\{x_k\}_{k=1,\dots,m}$  (a due a due distinti) e sia  $p_{m-1}$  il polinomio che interpola le coppie  $(x_k, f(x_k))$  per  $k = 1, \dots, m$ . Evidentemente da  $f(x_i) = p_{m-1}(x_i)$  per  $i = 1, \dots, m$  abbiamo

$$\|f - p_{m-1}\|_{2,d} = \sqrt{\sum_{i=1}^m |f(x_i) - p_{m-1}(x_i)|^2} = 0,$$

e quindi il polinomio interpolatore risulta la approssimante ai minimi quadrati di  $f$  (relativa alla norma 2 discreta basata sui punti  $\{x_k\}_{k=1,\dots,m}$ ).

Di conseguenza, il comando `coeffs=polyfit(x,y,n-1)` darà i coefficienti del polinomio interpolatore qualora i vettori  $x$ ,  $y$  abbiano dimensione  $n$ .

# Esercizio

Data una popolazione di individui si vuole stimare la relazione tra pressione arteriosa ed età. La seguente tabella riporta i dati relativi al campionamento:

Età	Pressione
25	120
30	125
42	135
55	140
69	155
70	160

Si ipotizza una relazione lineare tra le grandezze del tipo:

$$y = ax + b$$

Si richiede di stimare i coefficienti della retta mediante il metodo dei minimi quadrati.