Interpolazione polinomiale.

Ángeles Martínez Calomardo e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

20 novembre 2012

Interpolazione polinomiale

Sia $\mathbb{P}_n$ lo sp. vett. dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}$. Date $n+1$ coppie (x_0,y_0), ..., (x_n,y_n) con $x_j \neq x_k$ se $j \neq k$, si calcoli $p_n \in \mathbb{P}_n$ t.c.

$$p_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n$$

Tali polinomi p_n si dicono **interpolare** $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ oppure interpolare i valori y_k nei nodi x_k.

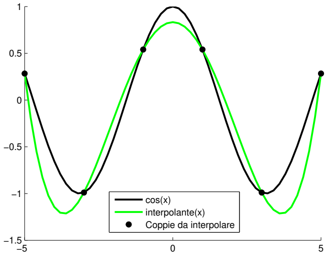


Figura: Grafico che illustra l'interpolazione di $\cos(x)$ in $[-5, 5]$ su nodi equispaziati $x_k = -5 + 2 \cdot k$ $(k = 0, \ldots, 5)$.

Alcuni fatti

Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio ed è unico? Sì.
- È possibile calcolarlo? Sì, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$, dove L_k è il k-simo polinomio di Lagrange relativo ai punti $\{x_k\}_{k=0,\ldots,n}$.
- **Teorema.** Sia $f \in C^{(n+1)}(a,b)$ e sia p_n il polinomio che interpola le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ con $x_k \neq x_s$ se $k \neq s$. Allora

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \qquad (1)$$

dove $\xi \in \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ il più piccolo intervallo aperto contenente $x_0, \ldots, x_n$.

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- **Equispaziati**: $x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.
- **Gauss-Chebyshev (scalati)**: fissato n, i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n \tag{2}$$

con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right),\ k = 0, \ldots, n; \tag{3}$$

- **Gauss-Chebyshev-Lobatto (scalati)**: fissato n, i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n \tag{4}$$

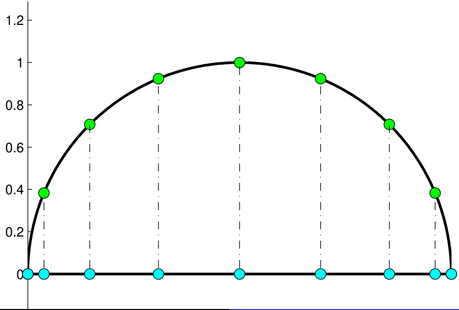
con

$$t_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n. \tag{5}$$

Interpretazione geometrica Gauss-Chebyshev-Lobatto

I punti di Gauss-Chebyshev-Lobatto si possono interpretare geometricamente.

- Si considerano gli $n+1$ punti della circonferenza $\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))\}_{k=0,\dots,n}$ con $\theta_k = (k \cdot \pi)/n$
- Si proiettano $\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))\}_{k=0,\dots,n}$ sull'asse delle ascisse. Le coordinate x di tali punti corrispondono ai punti di Gauss-Chebyshev-Lobatto.



Convergenza ed esempio di Runge

L'interpolante polinomiale in un set di nodi prefissati non converge sempre puntualmente alla funzione da approssimare. Infatti, per la **funzione di Runge**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \; x \in [-5, 5] \tag{6}$$

si ha che il polinomio interpolatore p_n in nodi equispaziati non converge (puntualmente) a f. Fortunatamente ciò non succede per i nodi di Gauss-Chebyshev(-Lobatto).

Purtroppo, per un teorema dovuto a **Faber**, esistono comunque funzioni continue f (ma non C^1!!) tali che l'interpolante p_n nei nodi di Gauss-Chebyshev(-Lobatto) non converge puntualmente a f. Questo teorema è generalizzabile ad una famiglia arbitraria di nodi.

Esempio di Runge

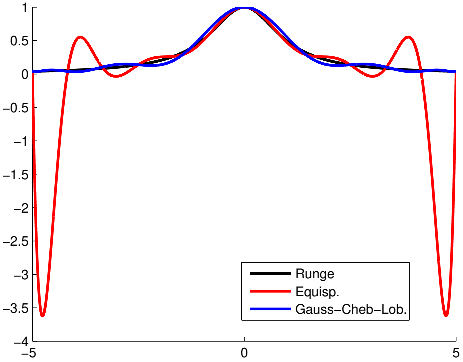


Figura: Grafico della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5, 5]$ e delle sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Gauss-Chebyshev-Lobatto.

Esempio di Runge

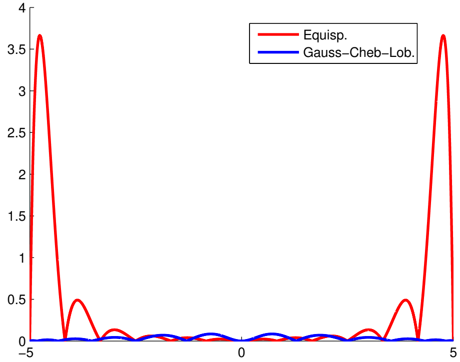


Figura: Grafico errore della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5, 5]$ con le sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Gauss-Chebyshev-Lobatto.

Esempio di Runge

Se $p_n \in \mathbb{P}_n$ è polinomio intp. nei nodi eqsp. o di G.-C.-L., vediamo al variare del grado quali sono gli errori $\|1/(1+x^2) - p_n(x)\|_\infty$:

Deg	Err. Eqs.	Err. GCL
2	$6.46e-001$	$9.62e-001$
3	$7.07e-001$	$6.46e-001$
4	$4.38e-001$	$8.29e-001$
5	$4.33e-001$	$4.58e-001$
6	$6.09e-001$	$6.39e-001$
7	$2.47e-001$	$3.11e-001$
8	$1.04e+000$	$4.60e-001$
9	$2.99e-001$	$2.04e-001$
10	$1.92e+000$	$3.19e-001$
11	$5.57e-001$	$1.32e-001$
12	$3.66e+000$	$2.18e-001$
13	$1.07e+000$	$8.41e-002$
14	$7.15e+000$	$1.47e-001$

Importante: l'esempio di Runge mostra che esiste una funzione $C^{\infty}([-5,5])$ tale che al crescere del numero di nodi equispaziati n non sia garantita nemmeno la convergenza puntuale!

D'altra parte sussiste il seguente teorema dovuto a Bernstein:

Teorema. Se $f \in C^1([a,b])$ con $[a,b]$ intervallo limitato e chiuso della retta reale, il polinomio p_n di grado n di interpolazione della funzione f nei nodi di Gauss-Chebyshev di grado $n+1$ converge uniformemente a f su $[a,b]$, per $n \to \infty$. Se inoltre $f \in C^2([a,b])$ si ha la seguente stima dell'errore

$$\|f - p_n\|_{\infty} = O(n^{-1/2}).$$

Interpolazione in Matlab/Octave

Supponiamo di dover interpolare le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ e supponiamo sia $\mathbf{x} = [x_0, \ldots, x_n]$, $\mathbf{y} = [y_0, \ldots, y_n]$. I coefficienti del polinomio interpolatore sono ottenibili dal comando `polyfit`. A tal proposito l'help di Matlab suggerisce:

```
>> help polyfit

 POLYFIT Fit polynomial to data.

 POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a
 polynomial P(X) of degree N that fits the
 data, P(X(I))~=Y(I), in a least-squares sense.
 ...
 See also POLY, POLYVAL, ROOTS.

>>
```

Interpolazione in Matlab/Octave

Per capire qualcosa in più eseguiamo il seguente codice

```
>> x=[-2 1 3];
>> y=[-2 11 17];
>> a=polyfit(x,y,2)
a =
   -0.2667    4.0667    7.2000
>>
```

In effetti, calcolando manualmente il polinomio interpolatore si ha, semplificando quanto ottenuto coi polinomi di Lagrange che è

$$p_2(x) = (-4/15)\cdot x^2 + (61/15)\cdot x + (36/5) \approx -0.2\overline{6}x^2 + 4.0\overline{6}x + 7.2.$$

Quindi, se $a = (a_k)_{k=1,\ldots,3}$, abbiamo $p_2(x) = a_1\, x^2 + a_2\, x + a_3$ e più in generale, se p_n è il polinomio interpolatore di grado n, e $a = (a_k)$ è il vettore ottenuto utilizzando `polyfit`, allora

$$p_n(x) = a_1\, x^n + a_2\, x^{n-1} + \ldots + a_{n+1}.$$

Interpolazione in Matlab/Octave

Per valutare in un vettore di ascisse $\mathbf{X} = [X_k]_{k=1,\dots,m}$ un polinomio

$$p_n(x) = a_1\, x^n + a_2\, x^{n-1} + \ldots + a_{n+1}$$

i cui coefficienti sono i coeff. di in un vettore $\mathbf{P} = [a_k]_{k=1,\dots,n+1}$ usiamo il comando polyval. Dall'help:

```
>> help polyval
To get started, select "MATLAB Help" from the
Help menu.
POLYVAL Evaluate polynomial.
Y = POLYVAL(P,X), when P is a vector of length
N+1 whose elements are the coefficients of a
polynomial, is the value of the polynomial
evaluated at X.
...
Y=P(1)*X^N+P(2)*X^(N-1)+...+P(N)*X+P(N+1)
>>
```

Interpolazione in Matlab/Octave

Dati i vettori $\mathbf{x} = [x_k]_{k=1,\ldots,n}$, $\mathbf{y} = [y_k]_{k=1,\ldots,n}$ sia $p_{n-1}(x_k) = y_k$, per $k = 1, \ldots, n$.

Sia $\mathbf{s} = [s_k]_{k=1,\ldots,m}$ e desideriamo calcolare $\mathbf{t} = [t_k]_{k=1,\ldots,m}$ per cui $t_k = p_{n-1}(s_k)$, per ogni k.

A tal proposito introduciamo la funzione:

```
function t=interpol(x,y,s)

m=length(x)-1;
coeff=polyfit(x,y,m);
t=polyval(coeff,s);
```

Esempio di Runge

Interpoliamo la funzione di Runge $1/(1+x^2)$ in $[-5, 5]$ sia su nodi equispaziati che di tipo Gauss-Chebyshev-Lobatto. A tal proposito definiamo la funzione di Runge

```
function [fx]=runge(x)
fx=1./(x.^2+1);
```

e una funzione che genera n nodi di Gauss-Chebyshev-Lobatto nell'intervallo $[a, b]$:

```
function xc=cheb(a,b,n)
for m=1:1:n
    xc(m)=(a+b)/2-((b-a)/2)*cos(pi*(m-1)/(n-1));
end
```

Quindi scriviamo il file `esperimento.m`

```
n=12;  % GRADO.
% NODI TEST.
s=-5:10/(10*n):5;
% NODI EQSP.: ASCISSE/ORDINATE + INTP.TEST.
x=-5:10/n:5; y=runge(x);
t=interpol(x,y,s);
% NODI GCL.: ASCISSE/ORDINATE+INTP.TEST.
xgcl=cheb(-5,5,n+1); ygcl=runge(xgcl);
tt =interpol(xgcl, ygcl,s);
% PLOT INTP. VS RUNGE.
plot(s,runge(s),s,t,s,tt);
% ERRORI ASSOLUTI.
ee=norm(runge(s)-t,inf);ec=norm(runge(s)-tt,inf);
fprintf('\n\t[ERR.][EQS]:%2.2e  [GCL]:%2.2e',ee,ec);
```

Esempio di Runge: risultati

Al variare di n:

- Otteniamo la tabella degli errori vista in precedenza.
- Notiamo che la scelta di n non può essere eccessiva. Provare $n = 30$!!
- Risulta evidente che **non sussiste** la convergenza puntuale al crescere di n, di p_n a $1/(1+x^2)$, qualora si utilizzino nodi **equispaziati**.
- Risulta evidente che **sussiste** la convergenza puntuale al crescere di n, di p_n a $1/(1+x^2)$, qualora si utilizzino nodi di **Gauss-Chebyshev-Lobatto**.

Esercizio

Calcolare analiticamente il polinomio di terzo grado che interpola le coppie $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 12)$, $(5, 21)$. Quindi valutare tale polinomio nei punti di ascissa -1, 0, 10. Corrispondono tali valori a quelli ottenuti in Matlab/Octave utilizzando i comandi `polyfit`, `polyval`?