

Interpolazione polinomiale.

Ángeles Martínez Calomardo e Alvisé Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

20 novembre 2013

Interpolazione polinomiale

Sia $\mathbb{P}_n$ lo sp. vett. dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}$. Date $n + 1$ coppie $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ con $x_j \neq x_k$ se $j \neq k$, si calcoli $p_n \in \mathbb{P}_n$ t.c.

$$p_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n$$

Tali polinomi p_n si dicono **interpolare** $\{(x_k, y_k)\}_{k=0, \dots, n}$ oppure interpolare i valori y_k nei nodi x_k .

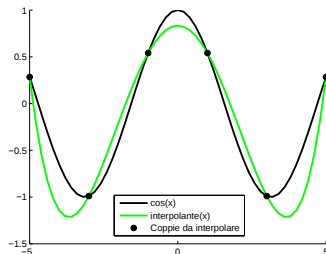


Figura: Grafico che illustra l'interpolazione di $\cos(x)$ in $[-5, 5]$ su nodi equispaziati $x_k = -5 + 2 \cdot k$ ($k = 0, \dots, 5$).

Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- ▶ Esiste tale polinomio ed è unico? Sì.
- ▶ È possibile calcolarlo? Sì, $p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$, dove L_k è il k -simo polinomio di Lagrange relativo ai punti $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$.
- ▶ **Teorema.** Sia $f \in C^{(n+1)}(a, b)$ e sia p_n il polinomio che interpola le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\dots,n}$ con $x_k \neq x_s$ se $k \neq s$. Allora

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \quad (1)$$

dove $\xi \in \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ il più piccolo intervallo aperto contenente $x_0, \dots, x_n$.

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- ▶ **Equispaziati:** $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \dots, n$.
- ▶ **Gauss-Chebyshev (scalati):** fissato n , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (2)$$

con

$$t_k = \cos \left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi \right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (3)$$

- ▶ **Gauss-Chebyshev-Lobatto (scalati):** fissato n , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (4)$$

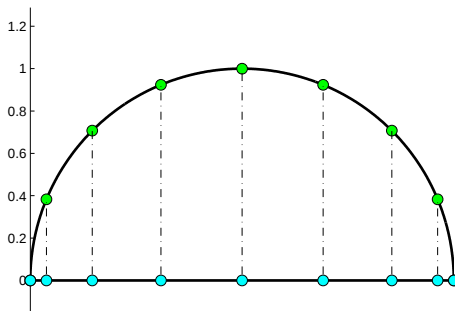
con

$$t_k = -\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n. \quad (5)$$

Interpretazione geometrica Gauss-Chebyshev-Lobatto

I punti di Gauss-Chebyshev-Lobatto si possono interpretare geometricamente.

- ▶ Si considerano gli $n + 1$ punti della circonferenza $\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))\}_{k=0,\dots,n}$ con $\theta_k = (k \cdot \pi)/n$
- ▶ Si proiettano $\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))\}_{k=0,\dots,n}$ sull'asse delle ascisse.
Le coordinate x di tali punti corrispondono ai punti di Gauss-Chebyshev-Lobatto.



Convergenza ed esempio di Runge

L'interpolante polinomiale in un set di nodi prefissati non converge sempre puntualmente alla funzione da approssimare. Infatti, per la **funzione di Runge**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5] \quad (6)$$

si ha che il **polinomio interpolatore p_n in nodi equispaziati non converge (puntualmente) a f** . Fortunatamente ciò non succede per i nodi di Gauss-Chebyshev(-Lobatto).

Purtroppo, per un teorema dovuto a **Faber**, esistono comunque funzioni continue f (ma non C^1 !!) tali che l'interpolante p_n nei nodi di Gauss-Chebyshev(-Lobatto) non converge puntualmente a f . Questo teorema è generalizzabile ad una famiglia arbitraria di nodi.

Esempio di Runge

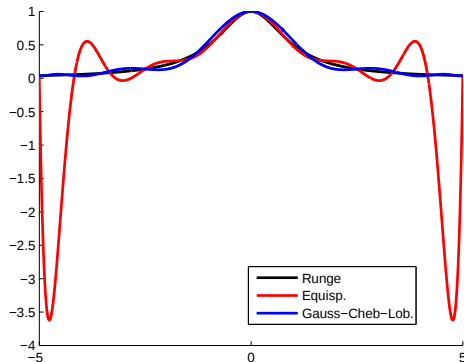


Figura: Grafico della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5, 5]$ e delle sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Gauss-Chebyshev-Lobatto.

Esempio di Runge

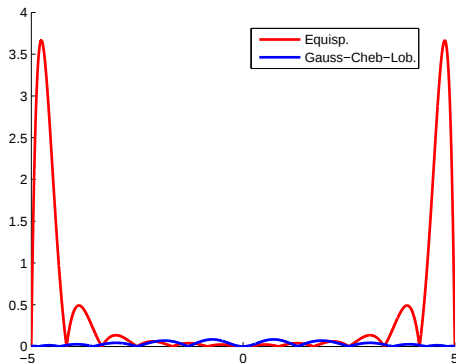


Figura: Grafico errore della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5, 5]$ con le sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Gauss-Chebyshev-Lobatto.

Esempio di Runge

Se $p_n \in \mathbb{P}_n$ è polinomio intp. nei nodi eqsp. o di G.-C.-L., vediamo al variare del grado quali sono gli errori $\|1/(1+x^2) - p_n(x)\|_\infty$:

Deg	Err. Eqs.	Err. GCL
2	6.46e - 001	9.62e - 001
3	7.07e - 001	6.46e - 001
4	4.38e - 001	8.29e - 001
5	4.33e - 001	4.58e - 001
6	6.09e - 001	6.39e - 001
7	2.47e - 001	3.11e - 001
8	1.04e + 000	4.60e - 001
9	2.99e - 001	2.04e - 001
10	1.92e + 000	3.19e - 001
11	5.57e - 001	1.32e - 001
12	3.66e + 000	2.18e - 001
13	1.07e + 000	8.41e - 002
14	7.15e + 000	1.47e - 001

Importante: l'esempio di Runge mostra che esiste una funzione $C^\infty([-5, 5])$ tale che al crescere del numero di nodi equispaziati n non sia garantita nemmeno la convergenza puntuale!

D'altra parte sussiste il seguente teorema dovuto a Bernstein:

Teorema. Se $f \in C^1([a, b])$ con $[a, b]$ intervallo limitato e chiuso della retta reale, il polinomio p_n di grado n di interpolazione della funzione f nei nodi di Gauss-Chebyshev di grado $n + 1$ converge uniformemente a f su $[a, b]$, per $n \rightarrow \infty$. Se inoltre $f \in C^2([a, b])$ si ha la seguente stima dell'errore

$$\|f - p_n\|_\infty = O(n^{-1/2}).$$

Interpolazione in Matlab/Octave

Supponiamo di dover interpolare le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0, \dots, n}$ e supponiamo sia $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_n]$, $\mathbf{y} = [y_0, \dots, y_n]$. I coefficienti del polinomio interpolatore sono ottenibili dal comando `polyfit`. A tal proposito l'help di Matlab suggerisce:

```
>> help polyfit

POLYFIT Fit polynomial to data.

POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a
polynomial P(X) of degree N that fits the
data, P(X(I))~=Y(I), in a least-squares sense.
...
See also POLY, POLYVAL, ROOTS.

>>
```

Interpolazione in Matlab/Octave

Per capire qualcosa in più eseguiamo il seguente codice

```
>> x=[-2 1 3];  
>> y=[-2 11 17];  
>> a=polyfit(x,y,2)  
a =  
    -0.2667    4.0667    7.2000  
>>
```

In effetti, calcolando manualmente il polinomio interpolatore si ha, semplificando quanto ottenuto coi polinomi di Lagrange che è

$$p_2(x) = (-4/15) \cdot x^2 + (61/15) \cdot x + (36/5) \approx -0.2\overline{6}x^2 + 4.0\overline{6}x + 7.2.$$

Quindi, se $a = (a_k)_{k=1,\dots,3}$, abbiamo $p_2(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ e più in generale, se p_n è il polinomio interpolatore di grado n , e $a = (a_k)$ è il vettore ottenuto utilizzando `polyfit`, allora

$$p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n+1}.$$

Interpolazione in Matlab/Octave

Per valutare in un vettore di ascisse $\mathbf{X} = [X_k]_{k=1,\dots,m}$ un polinomio

$$p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n+1}$$

i cui coefficienti sono i coeff. di in un vettore $\mathbf{P} = [a_k]_{k=1,\dots,n+1}$ usiamo il comando `polyval`. Dall'help:

```
>> help polyval
To get started, select "MATLAB Help" from the
Help menu.
POLYVAL Evaluate polynomial.
Y = POLYVAL(P,X), when P is a vector of length
N+1 whose elements are the coefficients of a
polynomial, is the value of the polynomial
evaluated at X.
...
Y=P(1)*X^N+P(2)*X^(N-1)+...+P(N)*X+P(N+1)
>>
```

Interpolazione in Matlab/Octave

Dati i vettori $\mathbf{x} = [x_k]_{k=1,\dots,n}$, $\mathbf{y} = [y_k]_{k=1,\dots,n}$ sia $p_{n-1}(x_k) = y_k$, per $k = 1, \dots, n$.

Sia $\mathbf{s} = [s_k]_{k=1,\dots,m}$ e desideriamo calcolare $\mathbf{t} = [t_k]_{k=1,\dots,m}$ per cui $t_k = p_{n-1}(s_k)$, per ogni k .

A tal proposito introduciamo la funzione:

```
function t=interpol(x,y,s)

m=length(x)-1;
coeff=polyfit(x,y,m);
t=polyval(coeff,s);
```

Esempio di Runge

Interpoliamo la funzione di Runge $1/(1+x^2)$ in $[-5, 5]$ sia su nodi equispaziati che di tipo Gauss-Chebyshev-Lobatto. A tal proposito definiamo la funzione di Runge

```
function [fx]=runge(x)
fx=1./(x.^2+1);
```

e una funzione che genera n nodi di Gauss-Chebyshev-Lobatto nell'intervallo $[a, b]$:

```
function xc=cheb(a,b,n)
for m=1:1:n
    xc(m)=(a+b)/2-((b-a)/2)*cos(pi*(m-1)/(n-1));
end
```

Esempio di Runge

Quindi scriviamo il file `esperimento.m`

```
n=12; % GRADO.
% NODI TEST.
s=-5:10/(10*n):5;
% NODI EQSP.: ASCISSE/ORDINATE + INTP.TEST.
x=-5:10/n:5; y=runge(x);
t=interp(x,y,s);
% NODI GCL.: ASCISSE/ORDINATE+INTP.TEST.
xgcl=cheb(-5,5,n+1); ygcl=runge(xgcl);
tt =interp(xgcl, ygcl,s);
% PLOT INTP. VS RUNGE.
plot(s,runge(s),s,t,s,tt);
% ERRORI ASSOLUTI.
ee=norm(runge(s)-t,inf);ec=norm(runge(s)-tt,inf);
fprintf('\n\t[ERR.][EQS]:%2.2e [GCL]:%2.2e',ee,ec);
```

Al variare di n :

- ▶ Otteniamo la tabella degli errori vista in precedenza.
- ▶ Notiamo che la scelta di n non può essere eccessiva. Provare $n = 30!!$
- ▶ Risulta evidente che **non sussiste** la convergenza puntuale al crescere di n , di p_n a $1/(1 + x^2)$, qualora si utilizzino nodi **equispaziati**.
- ▶ Risulta evidente che **sussiste** la convergenza puntuale al crescere di n , di p_n a $1/(1 + x^2)$, qualora si utilizzino nodi di **Gauss-Chebyshev-Lobatto**.

Esercizio 1

Calcolare analiticamente il polinomio di terzo grado che interpola le coppie $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 12)$, $(5, 21)$. Quindi valutare tale polinomio nei punti di ascissa -1 , 0 , 10 . Corrispondono tali valori a quelli ottenuti in Matlab/Octave utilizzando i comandi `polyfit`, `polyval`?

Esercizio 2

Un missile lanciato da terra ha una velocità $v(t)$ (m al s) misurata agli istanti $t(s)$. Si supponga sia

$t(s)$	$v(t)$
0	0
10	250
15	350
22	655
25	890
30	910

Usando la tabella, approssimare la velocità $v(t)$ agli istanti $t = 5s$, $t = 20s$, $t = 23s$, $t = 29s$, valutando l'interpolante polinomiale dei dati avente grado 5.