Calcolo di autovalori e autovettori

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

24 aprile 2015

Autovalori

Il problema del calcolo degli autovalori di una matrice quadrata A di ordine n consiste nel trovare gli n numeri (possibilmente complessi) λ tali che

$$\boxed{Ax = \lambda x, \;\; x \neq 0} \tag{1}$$

Si osservi che a seconda delle esigenze

- talvolta è richiesto solamente il calcolo di alcuni autovalori (ad esempio quelli di massimo modulo, per determinare lo spettro della matrice),
- talvolta si vogliono determinare tutti gli n autovalori in $\mathbb{C}$.

Autovalori

Per semplicità, dopo i teoremi di localizzazione di Gershgorin, mostreremo solo due metodi classici, uno per ognuna di queste classi, quello delle potenze e il metodo QR, rimandando per completezza alla monografia di Saad o a manuali di algebra lineare [2], [13].

Nota.

Una interessante applicazione è l'algoritmo di **PageRank** *[11], utilizzato da Google per fornire i risultati migliori tra i siti web relativamente a certe parole chiave ed in prima approssimazione basato sul calcolo di un autovettore relativo all'autovalore* 1 *(ad esempio via metodo delle potenze) di una matrice stocastica di dimensioni enormi.*

Teoremi di Gershgorin

In questo paragrafo mostriamo tre teoremi di localizzazione di autovalori dovuti a Gershgorin (cf. [2, p.76], [15]).

Teorema (Primo teorema di Gershgorin)

Gli autovalori di una matrice A di ordine n sono tutti contenuti nell'unione dei cerchi di Gershgorin

$$K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|\}$$

Teoremi di Gershgorin

Esempio

Vediamo quale esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Il primo teorema di Gershgorin stabilisce che gli autovalori stanno nell'unione dei cerchi di Gershgorin

$$\begin{aligned} K_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 15| \leq |-2| + |2| = 4\} \\ K_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq |1| + |-3| = 4\} \\ K_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 0| \leq |-2| + |1| = 3\} \end{aligned}$$

Teoremi di Gershgorin

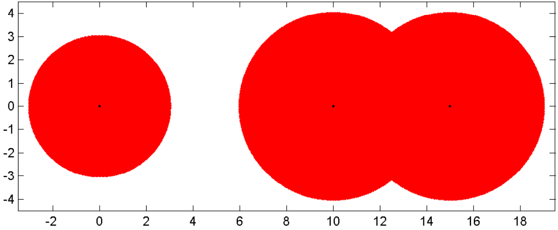

Figura : Cerchi di Gershgorin della matrice A definita in (5)

Teoremi di Gershgorin

Teorema (Secondo teorema di Gershgorin)

Se l'unione M_1 di k cerchi di Gershgorin è disgiunta dall'unione M_2 dei rimanenti $n-k$, allora k autovalori appartengono a M_1 e $n-k$ appartengono a M_2.

Esempio

Relativamente a

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

applicando il secondo teorema di Gershgorin, dal confronto con la figura abbiamo che un autovalore sta nel cerchio K_3 mentre due stanno nell'unione dei cerchi K_1, K_2.

Teoremi di Gershgorin

Definizione

Una matrice di ordine $n \geq 2$ è **riducibile** *se esiste una matrice di permutazione Π e un intero k, $0 < k < n$, tale che*

$$B = \Pi A \Pi^T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

in cui $A_{1,1} \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $A_{2,2} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$.

Definizione

Una matrice si dice **irriducibile** *se non è riducibile.*

Teoremi di Gershgorin

Nota.

Per verificare se una matrice $A = (a_{i,j})$ *sia irriducibile (cf. [8]), ricordiamo che data una qualsiasi matrice, è possibile costruire un grafo avente come nodi gli indici della matrice. In particolare, il nodo i-esimo è connesso al nodo j-esimo se l'elemento* $a_{i,j}$ *è diverso da* 0*.*

Il grafo associato si dice fortemente connesso se per ogni coppia (i, j) *posso raggiungere* j *a partire da* i*.*

Una matrice è irriducibile se e solo se il grafo ad essa associata (detto di adiacenza) è fortemente connesso.

In altre parole, una matrice riducibile se e solo se il grafo di adiacenza ad esso associato non è fortemente connesso.

Teoremi di Gershgorin

Teorema (Terzo teorema di Gershgorin)

Se la matrice di ordine n è irriducibile e un autovalore λ sta sulla frontiera dell'unione dei cerchi di Gershgorin, allora sta sulla frontiera di ogni cerchio di Gershgorin.

Esempio

La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è irriducibile, in quanto il grafico di adiacenza è fortemente connesso. Gli autovalori stanno nella disco centrato in $(2, 0)$ e raggio 2 (primo teorema di Gershgorin), ma non sulla frontiera (terzo teorema di Gershgorin). Quindi è non singolare.

Teoremi di Gershgorin

Vediamo ora in Matlab quali sono effettivamente gli autovalori. si ha

```
>> A=[15 -2 2; 1 10 -3; -2 1 0]
A =
    15    -2     2
     1    10    -3
    -2     1     0

>> eig(A)
ans =
    0.5121
   14.1026
   10.3854

>>
```

a conferma di quanto stabilito dai primi due teoremi di Gershgorin.

Teoremi di Gershgorin

Nota.

- *Ricordiamo che A è una matrice a coefficienti reali, allora A e A^T hanno gli stessi autovalori (cf. [2, p.47]) e quindi applicando i teoremi di Gershgorin alla matrice trasposta possiamo ottenere nuove localizzazioni degli autovalori.*
- *Nel caso A sia a coefficienti complessi, se λ è un autovalore di A allora il suo coniugato $\overline{\lambda}$ è autovalore della sua trasposta coniugata $\overline{A}$. Da qui si possono fare nuove stime degli autovalori di A.*

Esercizio

Cosa possiamo dire relativamente agli autovalori di A se applichiamo i teoremi di Gershgorin ad A^T invece che ad A?

Metodo delle potenze

Il metodo delle potenze è stato suggerito nel 1913 da Muntz ed è particolarmente indicato per il calcolo dell'autovalore di massimo modulo di una matrice.

Sia A una matrice quadrata di ordine n con

- n autovettori $x_1, \ldots, x_n$ linearmente indipendenti,
- autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$\boxed{|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.} \tag{4}$$

Metodo delle potenze

A tal proposito ricordiamo (cf. [3], p. 951) i seguenti risultati.

- Una matrice A è **diagonalizzabile** se e solo se possiede n autovettori linearmente indipendenti.
- Se tutti gli autovalori di A sono distinti la matrice è diagonalizzabile; l'opposto è ovviamente falso (si pensi alla matrice identica).
- Una matrice simmetrica (hermitiana) è diagonalizzabile. L'opposto è ovviamente falso, visto che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \tag{5}$$

è diagonalizzabile visto che ha tutti gli autovalori distinti ma non è simmetrica.

Metodo. (Potenze)

Sia $t_0 \in \mathbb{R}^n$ *definito da*

$$\boxed{t_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i, \ \ \alpha_1 \neq 0}$$

Il metodo delle potenze genera la successione

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0 = t_0 \\ y_k = A y_{k-1}, \ \ k = 1, 2, \ldots \end{array}}$$

Teorema

Sia A è una matrice quadrata diagonalizzabile avente autovalori λ_k tali che

$$\boxed{|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.}$$

Siano $u_k \neq 0$ autovettori relativi all'autovalore λ_k, cioè

$$Au_k = \lambda_k u_k.$$

Sia

$$y_0 = \sum_k \alpha_k u_k, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

La successione $\{y_s\}$ definita da $y_{s+1} = Ay_s$ converge ad un vettore parallelo a x_1 e che il coefficiente di Rayleigh (relativo al prodotto scalare euclideo)

$$\boxed{\rho(y_s, A) := \frac{(y_s, Ay_s)}{(y_s, y_s)} \to \lambda_1.} \tag{6}$$

Dimostrazione.

Per la dimostrazione si confronti [7, p.171]. Essendo la matrice A diagonalizzabile, esistono n autovettori u_k (relativi rispettivamente agli autovalori λ_k) che sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^n$. Sia

$$y_0 = \sum_k \alpha_k u_k, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

Essendo $Au_k = \lambda_k u_k$ abbiamo

$$y_1 = Ay_0 = A(\sum_k \alpha_k u_k) = \sum_k \alpha_k A u_k = \sum_k \alpha_k \lambda_k u_k$$

$$y_2 = Ay_1 = A(\sum_k \alpha_k \lambda_k u_k) = \sum_k \alpha_k \lambda_k A u_k = \sum_k \alpha_k \lambda_k^2 u_k$$

e più in generale

$$y_{s+1} = Ay_s = A(\sum_k \alpha_k \lambda_k^s u_k) = \sum_k \alpha_k \lambda_k^s A u_k = \sum_k \alpha_k \lambda_k^{s+1} u_k.$$

Metodo delle potenze

Osserviamo ora che

$$\frac{y_{s+1}}{\lambda_1^{s+1}} = \sum_k \alpha_k \frac{\lambda_k^{s+1}}{\lambda_1^{s+1}} u_k \quad (7)$$

per cui essendo per $k > 1$

$$\left| \frac{\lambda_k^{s+1}}{\lambda_1^{s+1}} \right| < 1,$$

si ha

$$\lim_{s \to +\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^s = 0$$

e quindi la direzione di $\frac{y_s}{\lambda_1^s}$, *che è la stessa di* y_s, *tende a quella dell'autovettore* u_1.

Metodo delle potenze

Si osservi che il coefficiente di Rayleigh $\rho(\cdot, A) = (x, Ax)/(x, x)$ è continuo in ogni $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ in quanto tanto il numeratore quanto il denominatore sono funzioni (multivariate) polinomiali (quadratiche) delle componenti x_k di $x = (x_k)_k \in \mathbb{R}^n$, che sono appunto continue.

Per continuità , se $y_s/\lambda^s \to \alpha_1 u_1$ allora, essendo $\lambda_1 \neq 0$, da

$$\begin{aligned} \lim_s \rho(y_s, A) &:= \lim_s \frac{(y_s, Ay_s)}{(y_s, y_s)} = \lim_s \frac{(y_s/\lambda_1^s, A(y_s/\lambda_1^s))}{(y_s/\lambda_1^s, y_s/\lambda_1^s)} \\ &= \frac{(\alpha_1 u_1, A(\alpha_1 u_1))}{(\alpha_1 u_1, \alpha_1 u_1)} = \frac{(u_1, Au_1)}{(u_1 u_1)} = \lambda_1, \end{aligned} \tag{8}$$

ricaviamo che il coefficiente di Rayleigh $\rho(y_s, A)$ converge a λ_1.

Metodo delle potenze

Nota.

Il metodo converge anche nel caso in cui

$$\boxed{\lambda_1 = \ldots = \lambda_r}$$

per $r > 1$*, tuttavia non è da applicarsi quando l'autovalore di modulo massimo non è unico.*

Nota.

In virtú di possibili underflow e underflow si preferisce normalizzare il vettore y_k *precedente definito. Così l'algoritmo diventa*

$$\boxed{\begin{array}{l} u_k = At_{k-1} \\ t_k = \frac{u_k}{\beta_k}, \ \beta_k = \|u_k\|_2 \\ l_k = \rho(t_k, A) \end{array}} \tag{9}$$

dove $\rho(t_k, A)$ *è il coefficiente di Rayleigh definito in (6).*

Metodo delle potenze inverse

Una variante particolarmente interessante del metodo delle potenze è stata scoperta da Wielandt nel 1944 [9] ed e' particolarmente utile nel caso in cui A sia una matrice quadrata con n autovettori linearmente indipendenti,

$$\boxed{|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots > |\lambda_n| > 0.} \tag{10}$$

e si desideri calcolare il **piú piccolo autovalore in modulo**, cioè λ_n, applicando il metodo delle potenze ad A^{-1}.

Metodo delle potenze inverse

Si ottiene cosí la successione $\{t_k\}$ definita da

$$\boxed{\begin{array}{c} Au_k = t_{k-1} \\ t_k = \frac{u_k}{\beta_k}, \\ \beta_k = \|u_k\|_2 \end{array}}$$

e convergente ad un vettore parallelo a x_n. La successione di coefficienti di Rayleigh è tale che

$$\rho(t_k, A^{-1}) := \frac{(t_k, A^{-1} t_k)}{(t_k, t_k)} = \frac{(t_k, u_{k+1})}{(t_k, t_k)} \to 1/\lambda_n. \qquad (11)$$

da cui è immediato calcolare λ_n.

Metodo delle potenze inverse

Vediamo in dettaglio questo punto. Se $\{\xi_i\}$ sono gli autovalori di A^{-1} con

$$|\xi_1| > |\xi_2| \geq |\xi_3| \geq \ldots \geq |\xi_n|$$

allora il metodo delle potenze inverse calcola un'approssimazione di ξ_1 e di un suo autoversore x.

Si osserva subito che se $A^{-1}x = \xi_i x$ (con $\xi_i \neq 0$) allora $x = A^{-1}x/\xi_i$ e

$$Ax = A(A^{-1}x/\xi_i) = \frac{1}{\xi_i}x$$

cioè ξ_i^{-1} è un autovalore di A e x è non solo autovettore di A^{-1} relativo all'autovalore ξ_i, ma pure autovettore di A relativo all'autovalore ξ_i^{-1}.

Metodo delle potenze inverse

Conseguentemente se ξ_1 è l'autovalore di massimo modulo di A^{-1} e λ_n è l'autovalore di minimo modulo di A si ha $\lambda_n = \xi_i^{-1}$ e che

$$A^{-1}x = \xi_1 x \Rightarrow Ax = \xi_1^{-1} x = \lambda_n x$$

Notiamo che il metodo delle potenze inverse, calcola $\xi_1 = \lambda_n^{-1}$ e il relativo autovettore x.

Nota.

Per ottenere λ_n viene naturale calcolare ξ_1^{-1}, ma usualmente essendo x autovettore di A relativo a λ_n si preferisce calcolare λ_n via il coefficente di Rayleigh

$$\rho(x, A) := \frac{(x, Ax)}{(x, x)}.$$

Metodo delle potenze inverse con shift

Metodo. (Potenze inverse con shift)

In generale, fissato $\mu \in \mathbb{C}$ è possibile calcolare, se esiste unico, l'autovalore λ più vicino a μ considerando il seguente pseudocodice [6, p.181]:

$$\boxed{\begin{array}{l} (A - \mu I)\, z_k = q_{k-1} \\ q_k = z_k / \|z_k\|_2 \\ \sigma_k = q_k^H A q_k. \end{array}} \tag{12}$$

Metodo delle potenze inverse

- Ricordiamo che se λ è autovalore di A allora

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \mu I)x = \lambda x - \mu x = (\lambda - \mu)x$$

  e quindi $\lambda - \mu$ è autovalore di $A - \mu I$.

- Il metodo delle potenze inverse applicato a $A - \mu I$ calcola il minimo autovalore $\sigma = \lambda - \mu$ in modulo di $A - \mu I$ cioè il σ che rende minimo il valore di $|\sigma| = |\lambda_i - \mu|$, dove λ_i sono gli autovalori di A.

  Quindi essendo $\lambda_i = \sigma_i - \mu$ si ottiene pure il λ_i più vicino a μ.

- Per versioni piú sofisticate di questa tecnica detta di *shift* (o in norma infinito invece che in norma 2) si confronti [2, p.379].

Problema. Si può applicare il metodo delle potenze inverse con shift μ nel caso μ sia proprio un autovalore di A?

Metodo QR

Il metodo QR, considerato tra i 10 algoritmi più rilevanti del ventesimo secolo, cerca di calcolare tutti gli autovalori di una matrice A.

Lemma (Fattorizzazione QR)

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Esistono

- Q *unitaria (cioè $Q^T * Q = Q * Q^T = I$),*
- R *triangolare superiore*

tali che

$$A = QR.$$

Metodo QR

Citiamo alcune cose:

- La matrice A ha quale sola particolarità di essere quadrata. Nel caso generale però la sua fattorizzazione QR in generale non è unica bensì determinata a meno di una matrice di *fase* (cf. [2, p.149]) .
- Nel caso sia non singolare, allora tale fattorizzazione è unica qualora si chieda che i coefficienti diagonali di R siano positivi.
- La routine Matlab `qr` effettua tale fattorizzazione. Si consiglia di consultare l'`help` di Matlab, per consultare le particolarità di tale routine.

Metodo QR

- Se la matrice H è simile a K (cioè esiste una matrice non singolare S tale che $H = S^{-1}KS$) allora H e K hanno gli stessi autovalori.
- Si può vedere facilmente che la relazione di similitudine è transitiva, cioè se H_1 è simile ad H_2 e H_2 è simile ad H_3 allora H_1 è simile ad H_3.

Il metodo QR venne pubblicato indipendentemente nel 1961 da Francis e da Kublanovskaya e successivamente implementato in EISPACK. Ci limiteremo a considerare versioni di base del metodo.

Metodo QR

Lemma

Sia

$$A_0 = A = Q_0 R_0$$

e

$$A_1 := R_0 Q_0.$$

Le matrici A_0 e A_1 sono simili e quindi hanno gli stessi autovalori.

Dimostrazione.

Basta notare che

$$Q_0 A_1 Q_0^T = Q_0 A_1 Q_0^T = Q_0 R_0 Q_0 Q_0^T = A_0$$

e quindi la matrice A_1 è simile ad A_0 (si ponga $S = Q_0^{-1} = Q_0^T$)

Metodo QR

Definiamo il seguente

Metodo. (QR)

$$\boxed{\begin{array}{c} A_k = Q_k R_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{array}}$$

Per un lemma precedente A_{k+1} è simile ad A_k, che è simile ad A_{k-1}, ..., A_0. Quindi A_{k+1} essendo per transitività simile ad A_0 ha gli stessi autovalori di A_0.

Metodo QR

Per la convergenza del metodo esistono vari risultati (cf. [3, p.393], [4, p.352], [7, p.180]). Da [6, p.169]

Teorema

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha autovalori tutti distinti in modulo, con

$$|\lambda_1| > \ldots > |\lambda_n| \tag{13}$$

allora l'alg. QR converge a $A_\infty = (a^\infty_{i,j})$ triangolare sup., cioè

$$\lim_k A_k = \begin{pmatrix} a^\infty_{1,1} & a^\infty_{1,2} & \ldots & \ldots & a^\infty_{1,n} \\ 0 & a^\infty_{2,2} & a^\infty_{2,3} & \ldots & a^\infty_{2,n} \\ 0 & 0 & a^\infty_{3,3} & \ldots & a^\infty_{3,n} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a^\infty_{n-1,n-1} & a^\infty_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^\infty_{n,n} \end{pmatrix} \tag{14}$$

con $\lambda_k = a^\infty_{k,k}$.

Metodo QR

Inoltre

- *Se la condizione (13) non è verificata si può dimostrare che la successione* $\{A_k\}$ *tende a una forma triangolare a blocchi.*
- *se* $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$, *e* $\lambda_{i-1} \neq 0$

$$|a_{i,i-1}^{(k)}| = \mathcal{O}\left(\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_{i-1}|}\right)^k, \; i = 2, \ldots, n, \;\; k \to \infty. \qquad (15)$$

- *se la matrice è simmetrica, allora*

$$A_\infty = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_1).$$

- *se* A *è una matrice Hessenberg superiore allora l'algoritmo QR converge ad* A_∞ *triangolare a blocchi, simile ad* A *e con gli autovalori di ogni blocco diagonale tutti uguali in modulo.*

Implementazione del metodo QR

Nelle implementazioni si calcola con un metodo scoperto da Householder (ma esiste un metodo alternativo dovuto a Givens) una matrice di Hessenberg T

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \ldots & a_{4,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

simile ad A ed in seguito si applica il metodo QR relativamente alla matrice T. Se A è simmetrica la matrice T risulta tridiagonale simmetrica.

Implementazione del metodo QR

Si può mostrare che

- se A è una matrice di Hessenberg superiore, allora $A = QR$ con Q di Hessenberg superiore.
- se A è tridiagonale allora $A = QR$ con Q di Hessenberg e R triangolare superiore con $r_{i,j} = 0$ qualora $j - i \geq 2$.
- le iterazioni mantengono la struttura, cioè
  - se $A_0 = T$ è di Hessenberg, allora A_k è di Hessenberg,
  - se $A_0 = T$ è tridiagonale allora A_k è tridiagonale.

Implementazione del metodo QR

Il numero di moltiplicazioni necessarie

- all'algoritmo di Givens per calcolare tale matrice T a partire da A è approssimativamente $10n^3/3$;
- all'algoritmo di Householder per calcolare tale matrice T a partire da A è approssimativamente $5n^3/3$.

Il metodo QR applicato ad una matrice A in forma di Hessenberg superiore ha ad ogni passo un costo di $2n^2$ operazioni moltiplicative.

Per versioni piú sofisticate come il metodo QR con shift, si veda [3], p. 394.

Bibliografia

- K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- D. Bini, M. Capovani e O. Menchi, *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, 1988.
- V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- G.H. Golub e C.F. Van Loan, *Matrix Computation, 3rd Edition*, The John Hopkins University Press 1996.
- Netlib,http://www.netlib.org/templates/matlab/
- A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Matematica numerica*, 2001.
- A. Quarteroni e F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico*, Springer Verlag, 2006.
- Wikipedia (Matrice irriducibile) http://it.wikipedia.org/wiki/Matrice_irriducibile
- Wikipedia (Inverse iteration) http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_iteration.
- Wikipedia (Metodo delle potenze) http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_delle_potenze.
- Wikipedia (PageRank) http://it.wikipedia.org/wiki/Page_rank.
- Wikipedia (Rayleigh quotient) http://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_quotient.
- Wikipedia (QR algorithm) http://en.wikipedia.org/wiki/QR_algorithm.
- Wikipedia (QR decomposition) http://en.wikipedia.org/wiki/QR_decomposition.
- Wikipedia (Teoremi di Gershgorin) http://it.wikipedia.org/wiki/Teoremi_di_Gershgorin.