Laboratorio Calcolo Numerico

Esercizio 1 Si vuole determinare un polinomio interpolatore della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

nell'intervallo $I = [-5, 5]$. Considerata la forma di Newton del polinomio interpolante, si costruisca una tabulazione della funzione data costituita da 11 nodi equidistanti nell'intervallo I, e si memorizzino i nodi in una vettore `xn` ed i corrispondenti valori della funzione nel vettore `fxn`.

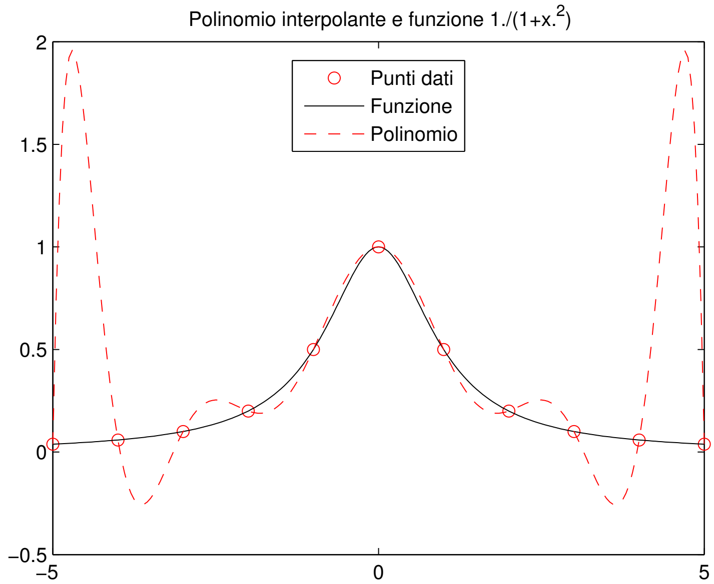
Si scriva una funzione di nome `polnewton` che abbia la seguente intestazione e che calcoli i coefficienti della base di Newton con le differenze divise.

```
function c = polnewton (x,y)
% POLNEWTON Calcola i coefficienti del polinomio interpolatore
%           utilizzando la forma di Newton con le differenze
%           divise
%
% Uso:
%   c = polnewton (x,y)
%
% Dati di ingresso:
%   x    vettore dei nodi
%   y    vettore dei valori della funzione da interpolare nei nodi
%
% Dati di uscita:
%   c    vettore colonna dei coefficienti ordinati per indici
%        crescenti (c_0, c_1, ... )
```

Si definisca poi una function di nome `horner` che, dati i coefficienti c_i ed i nodi, permetta di valutare un polinomio interpolatore $P(x)$ in un valore x^*. La function avrà la seguente intestazione

```
function fxstar = horner (x,c,xstar)
% HORNER Calcola il valore del polinomio interpolatore in x^*
%        utilizzando la forma di Newton e l'algoritmo di Horner
%
% Uso:
%   fxstar = horner (x,c,xstar)
%
% Dati di ingresso:
%   x      vettore dei nodi
%   c      vettore dei coefficienti della forma di Newton
%          ordinati per indici crescenti (c_0, c_1, ... )
%   xstar  valore in cui si vuole valutare il polinomio
%
% Dati di uscita:
%   fxstar valore di P(x^*)
```

Si scriva poi uno script che calcoli il valore del polinomio di interpolazione in 201 valori dell'intervallo I, per poterlo rappresentare graficamente (linea tratteggiata rossa).
Sullo stesso grafico si rappresentino anche i punti della tabulazione (con un cerchietto rosso) e la funzione data (linea intera nera).
Il risultato dovrà essere quello della seguente figura:



Esercizio 2

Si vari (aumentando e diminuendo) il numero di punti di interpolazione (e quindi il grado del polinomio interpolante) e si cerchi di capire cosa accade.

Si provi infine a utilizzare n nodi di Chebyshev al posto dei nodi equispaziati,

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{x}_k^{(n)}, \quad \hat{x}_k^{(n)} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n$$

con a, b estremi dell'intervallo I. Cosa accade?