Laboratorio Calcolo Numerico

Esercizio 1
Prendendo spunto dagli algoritmi a pagg. 192-193 per risolvere un sistema triangolare superiore ed inferiore con i metodi delle *sostituzioni all'indietro* e *sostituzioni in avanti*, si scrivano due funzioni Matlab che abbiano le seguenti intestazioni

```
function xv = trisup(U, b)
%TRISUP Determina la soluzione di un sistema triangolare
%   superiore
%
% Uso:
%   xv = trisup(U, b)
%
% Dati di ingresso:
%   U:      matrice triangolare superiore quadrata
%   b:      vettore COLONNA termine noto
%
% Dati di uscita:
%   xv:     vettore COLONNA contenente la soluzione
```

```
function xv = triinf(L, b)
%TRIINF Determina la soluzione di un sistema triangolare
%   inferiore
%
% Uso:
%   xv = triinf(L, b)
%
% Dati di ingresso:
%   L:      matrice triangolare inferiore quadrata
%   b:      vettore COLONNA termine noto
%
% Dati di uscita:
%   xv:     vettore COLONNA contenente la soluzione
```

Si noti che tra i parametri di ingresso manca il valore `n` che indica la dimensione del sistema. Tale valore deve essere determinato all'interno della funzione stessa.
All'interno delle due funzioni deve anche essere verificato se il sistema è singolare (determinante della matrice uguale a zero, ovvero, essendo un sistema a matrice triangolare, prodotto degli elementi diagonali uguale a zero). Se è singolare, si visualizzi un avviso (con `disp`) e si esca con una soluzione nulla, oppure, in alternativa, si aggiunga una variabile `flag` (di segnalazione) negli argomenti di uscita.

Si costruiscano poi due script files `trisupscript.m` e `triinfscript.m`) che

- Definiscano la matrice `U` (rispettivamente `L`) ed il vettore termine noto `b`;
- calcolino nuovamente la dimensione della matrice;
- verifichino che la matrice sia effettivamente triangolare superiore (rispettivamente inferiore);
- utilizzino la function `trisup` (rispettivamente `triinf`) per determinare la soluzione;
- visualizzino la matrice `U` (rispettivamente `L`), il vettore `b`, la dimensione del sistema ed il vettore soluzione.

Si provi lo script `trisupscript.m` e la function `trisup.m` con il seguente sistema rappresentato come matrice aumentata.

$$(U|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1.75 & 2.02 & 3.04 & 4.92 \\ 0 & 13.2 & 18.9 & 23.1 \\ 0 & 0 & 50.3 & 62.2 \end{array}\right)$$

e si verifichi il proprio risultato con la soluzione (impostare sulla finestra comandi `format long e`) ottenuta dando il comando Matlab `U\b` subito dopo aver eseguito il proprio script.

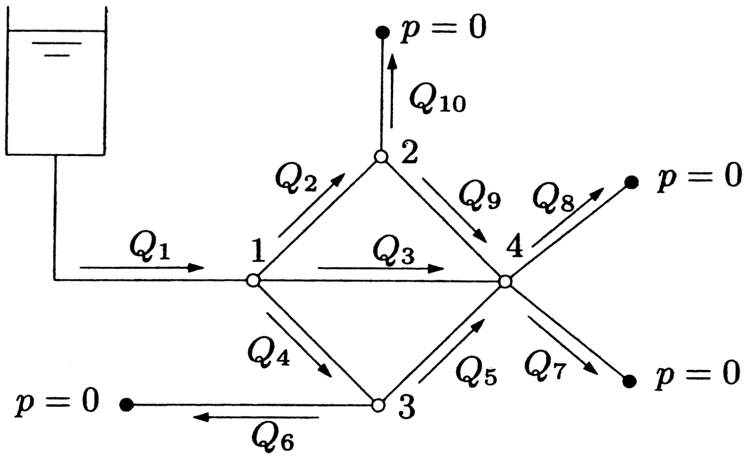
Si provi lo script `triinfscript.m` e la function `triinf.m` con il seguente sistema rappresentato come matrice aumentata.

$$(L|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3.5 & 0 & 0 & 2.46 \\ 4.04 & 26.4 & 0 & 11.55 \\ 6.08 & 37.8 & 100.6 & 31.1 \end{array}\right)$$

e si verifichi il proprio risultato con la soluzione ottenuta dando il comando Matlab `L\b` subito dopo aver eseguito il proprio script.

Esercizio 2

Si consideri un sistema idraulico alimentato da un bacino d'acqua posto ad una pressione costante $p_r = 10\,\text{bar}$ e formato da 10 condotte disposte come nella figura seguente:



In questo problema i valori delle pressioni corrispondono alla *differenza* fra la pressione effettiva e quella atmosferica.

Nella condotta j-esima vale la seguente relazione fra la portata Q_j (in m^3/s) e la differenza di pressione Δp_j alle estremità della condotta

$$Q_j = kL\Delta p_j,$$

dove k è la resistenza idraulica (misurata in $\text{m}^2/(\text{bar s})$) e L è la lunghezza in metri della condotta. Supponiamo che nelle condotte terminali (indicate in figura dal pallino nero) l'acqua esca alla pressione atmosferica $p = 0$.

Per determinare i valori di pressione nei nodi interni 1, 2, 3 e 4 del sistema, si sfrutta il fatto che la somma algebrica delle portate nel nodo j-esimo deve essere nulla (una portata positiva indica che l'acqua entra nel nodo, una portata negativa indica che l'acqua ne esce).

Denotando con $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$ il vettore delle pressioni nei nodi interni, si ottiene un sistema di 4 equazioni e 4 incognite della forma $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$.

A partire dai seguenti dati

condotta	k	L
1	0.010	20
2	0.005	10
3	0.005	14
4	0.005	10
5	0.005	10
6	0.002	8
7	0.002	8
8	0.002	8
9	0.005	10
10	0.002	8

si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} -0.370 & 0.050 & 0.050 & 0.070 \\ 0.050 & -0.116 & 0 & 0.050 \\ 0.050 & 0 & -0.116 & 0.050 \\ 0.070 & 0.050 & 0.050 & -0.202 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si costruisca uno script `idrascript.m` che

- definisca la matrice `A` ed il vettore termine noto `b`;
- calcoli le matrici della fattorizzazione di Gauss **con pivoting** con il comando Matlab

```
[L,U,P]=lu(A)
```

- risolva il sistema $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ utilizzando tale fattorizzazione (si ricordi che $P \times A = L \times U$) e le due function `triinf` e `trisup`, calcolando la soluzione $\mathbf{p}$;
- calcoli la soluzione dello stesso sistema (assegnandola ad un **altro** vettore) con il comando Matlab

```
A\b
```

- visualizzi la matrice `A`, il vettore `b`, la dimensione del sistema, il vettore soluzione ottenuto utilizzando la risoluzione dei sistemi triangolari ed il vettore soluzione ottenuto utilizzando l'operatore Matlab \.