Interpolazione polinomiale.

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

April 23, 2018

Introduzione

In questa lezione desideriamo introdurre dei metodi per determinare l'interpolante polinomiale di grado n, nei nodi a due a due distinti x_0, ..., x_n, di una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ovvero $p_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$p_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \ldots, n.$$

Mostreremo come farlo mediante

- la formulazione di Newton di p_n e la valutazione di p_n in un punto x mediante l'algoritmo di Horner;
- le routines Matlab `polyfit`, `polyval`.

Differenze divise

Siano

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua;
- x_0, ..., x_n nodi a due a due distinti.

Dati $x_0^*, \ldots, x_k^* \in \{x_0, \ldots, x_n\}$, a due a due distinti, la quantità

$$f[x_0^*, \ldots, x_k^*] = \begin{cases} \frac{f[x_1^*, \ldots, x_k^*] - f[x_0^*, \ldots, x_{k-1}^*]}{x_k^* - x_0^*} & \text{se } k > 0 \\ f[x_0^*] = f(x_0) & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si chiamano differenze divise.

Differenze divise

Il polinomio p_n, descritto nella formulazione di Newton

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1})$$

è tale che

$$p_n(x_k) = f(x_k), \;\; k = 0, \ldots, n.$$

Risulta quindi rilevante calcolare

$$f[x_0, \ldots, x_k]$$

per $k = 0, \ldots, n$.

Differenze divise e polinomio interpolatore

Il polinomio p_n, descritto nella formulazione di Newton

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1})$$

è tale che

$$p_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0, \ldots, n.$$

Differenze divise e polinomio interpolatore

Per valutare il polinomio interpolatore

$$p_n(x^*) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x^* - x_0) \cdots (x^* - x_{k-1})$$

in un generico punto x^* si usa l'algoritmo di Horner (che richiede $2n$ addizioni e n moltiplicazioni). Un pseudocodice è il seguente

```
u = c(n)
for j = n - 1, ... , 0 step -1
   u = u * (x - x(j)) + c(j)
end for j
```

I comandi `polyfit` e `polyval`

Noto il vettore **p** è possibile valutare il polinomio associato $p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i x^{n-i+1}$ nelle ascisse **x** mediante `polyval`

```
>> help polyval
polyval Evaluate polynomial.
    Y = polyval(P,X) returns the value of a polynomial P
    evaluated at X. P is a vector of length N+1 whose
    elements are the coefficients of the
    polynomial in descending powers.

        Y = P(1)*X^N + P(2)*X^(N-1) + ... + P(N)*X + P(N+1)
```

Si noti che nel caso di più valori di ascisse da valutare x_i, si ha che $p(x_i) = y_i$, essendo x_i, y_i rispettivamente la i-sima componente dei vettori **x**, **y**.