

Alcuni esperimenti in Matlab relativi alla teoria degli errori

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

3 gennaio 2019

Problema.

Dato $x^2 + 2px - q$, con $\sqrt{p^2 + q} \geq 0$ implementare alcuni algoritmi in Matlab che valutino la radice positiva mediante la formula

$$y = -p + \sqrt{p^2 + q}. \quad (1)$$

Osserviamo che

- $\sqrt{p^2 + q} \geq 0$ implica radici reali.
- La valutazione **diretta** (1) è potenzialmente instabile per $p \gg q$ a causa della sottrazione tra p e $\sqrt{p^2 + q}$ (fenomeno della cancellazione).

Valutiamo radice con un secondo algoritmo stabile via razionalizzazione di (1):

$$\begin{aligned} y &= -p + \sqrt{p^2 + q} = \frac{(-p + \sqrt{p^2 + q})(p + \sqrt{p^2 + q})}{(p + \sqrt{p^2 + q})} \\ &= \frac{q}{(p + \sqrt{p^2 + q})} \end{aligned} \quad (2)$$

Stabilità : radici secondo grado

Algoritmo 1. Salviamo il seguente codice in `radicesecgrado.m`.

```
p=1000; q=0.0180000000081; sol=0.9*10^(-5);  
  
% ALGORITMO 1  
s=p^2;  
t=s+q;  
if t >=0  
    u=sqrt(t);  
else  
    fprintf('\n \t [RADICI COMPLESSE]');  
end  
s1=-p+u;
```

Algoritmo 2. Di seguito, sullo stesso file scriviamo il secondo algoritmo, come descritto in (2),

```
% ALGORITMO 2  
s=p^2;  
t=s+q;  
if t >=0  
    u=sqrt(t);  
else  
    fprintf('\n \t [RADICI COMPLESSE]');  
end  
v=p+u;  
t1=q/v;
```

e infine, stampiamo risultati ed errori relativi.

Stabilità : radici secondo grado

```
% Soluzione fornita dal primo algoritmo.
fprintf('\n \t [ALG.1]: %10.19f',s1);

% Soluzione fornita dal secondo algoritmo.
fprintf('\n \t [ALG.2]: %10.19f',t1);

if length(sol) > 0 & (sol ~= 0)
    % Errore relativo del primo algoritmo.
    rerr1=abs(s1-sol)/abs(sol);
    % Errore relativo del secondo algoritmo.
    rerr2=abs(t1-sol)/abs(sol);
    % Stampa risultati.
    fprintf('\n \t [REL.ERR.ALG.1]: %2.2e',rerr1);
    fprintf('\n \t [REL.ERR.ALG.2]: %2.2e',rerr2);
end

fprintf('\n \n');
```

Stabilità : radici secondo grado, test.

Come previsto, il secondo algoritmo si comporta notevolmente meglio del primo, che compie un errore relativo dell'ordine di circa 10^{-9} . Infatti:

```
>> radicesecgrado  
[ALG.1]: 0.0000001000007614493  
[ALG.2]: 0.0000001000000000000  
[REL.ERR.ALG.1]: 7.61e-06  
[REL.ERR.ALG.2]: 1.32e-16  
>>
```

Seppure l'errore relativo sembri piccolo, è significativo e non è dovuto al problema ma esclusivamente all'algoritmo utilizzato.

Eseguiamo un codice Matlab che valuti le successioni $\{u_n\}$, $\{z_n\}$, definite rispettivamente come

$$\begin{cases} s_1 = 1, & s_2 = 1 + \frac{1}{4} \\ u_1 = 1, & u_2 = 1 + \frac{1}{4} \\ s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)^2} \\ u_{n+1} = \sqrt{6 s_{n+1}} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} z_1 = 1, & z_2 = 2 \\ z_{n+1} = 2^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} \cdot z_n^2}} \end{cases} \quad (3)$$

che **teoricamente** convergono a π .

Implementiamo poi una terza successione, diciamo $\{y_n\}$, che si ottiene **razionalizzando** (3), cioè moltiplicando numeratore e denominatore di

$$z_{n+1} = 2^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} \cdot z_n^2}}$$

per

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4^{1-n} \cdot z_n^2}}$$

e calcoliamo u_m , z_m e y_m per $m = 2, 3, \dots, 40$ (che teoricamente dovrebbero approssimare π).

Calcolo di π . La prima successione.

Infine disegniamo in un unico grafico l'andamento dell'errore relativo di u_n , z_n e y_n rispetto a π aiutandoci con l'help di Matlab relativo al comando `semilogy`. Di seguito scriviamo un'implementazione di quanto richiesto commentando i risultati. Si salvi in un file `pigreco.m` il codice

```
% SEQUENZE CONVERGENTI "PI GRECO".
```

```
% METODO 1.
```

```
s(1)=1; u(1)=1;
```

```
s(2)=1.25; u(2)=s(2);
```

```
for n=2:40
```

```
    s(n+1)=s(n)+(n+1)^(-2);
```

```
    u(n+1)=sqrt(6*s(n+1));
```

```
end
```

```
rel_err_u=abs(u-pi)/pi;
```

```
fprintf('\n');
```

Calcolo di π . La seconda successione.

Sempre sullo stesso file, scriviamo il codice relativo alla seconda successione,

```
% METODO 2.  
format long  
z(1)=1;  
z(2)=2;  
for n=2:40  
    c=(4^(1-n)) * (z(n))^2; inner_sqrt=sqrt(1-c);  
    z(n+1)=(2^(n-0.5))*sqrt( 1-inner_sqrt );  
end  
rel_err_z=abs(z-pi)/pi;  
fprintf( '\n' );
```

Calcolo di π . La terza successione.

Di seguito, implementiamo la terza successione

```
% METODO 3.  
y(1)=1;  
y(2)=2;  
for n=2:40  
    num=(2^(1/2)) * abs(y(n));  
    c=(4^(1-n)) * (z(n))^2;  
    inner_sqrt=sqrt(1-c);  
    den=sqrt(1+inner_sqrt);  
    y(n+1)=num/den;  
end  
rel_err_y=abs(y-pi)/pi;
```

e infine i relativi grafici

```
% SEMIOLOGY PLOT.  
semilogy(1:length(u),rel_err_u,'k.',...  
1:length(z),rel_err_z,'m+',...  
1:length(y),rel_err_y,'ro');
```

Calcolo di π . Risultati.

Per concludere si digiti nella command window pigreco. Nella figura descriviamo i risultati.

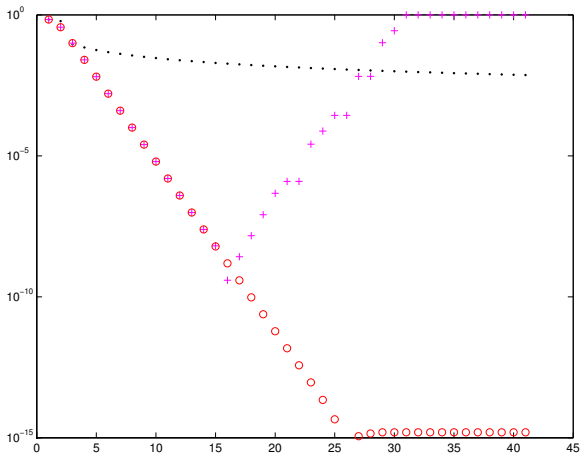


Figura: Grafico che illustra le 3 successioni, rappresentate rispettivamente da ., + e o.

Calcolo di π . La prima successione.

Discussione risultati.

- La prima successione converge molto lentamente a π , la seconda diverge mentre la terza converge velocemente a π .
- Per alcuni valori $\{z_n\}$ e $\{y_n\}$ coincidono per alcune iterazioni per poi rispettivamente divergere e convergere a π . Tutto ciò è naturale poichè le due sequenze sono analiticamente (ma non numericamente) equivalenti.
- Dal grafico dell'errore relativo, la terza successione, dopo aver raggiunto errori relativi prossimi alla precisione di macchina, si assesta ad un errore relativo di circa 10^{-15} (dovuti alla precisione di macchina).

Una successione ricorrente.

Consideriamo la successione $\{I_n\}$ definita da

$$I_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx \quad (4)$$

- $n = 0$: $I_0 = e^{-1} \int_0^1 e^x dx = e^{-1}(e^1 - 1) = 1 - e^{-1}$;
- integrando per parti

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= e^{-1} \left(x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx \right) \\ &= 1 - (n+1) I_n. \end{aligned}$$

In particolare $I_1 = 1 - I_0 = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$.

- $I_n > 0$, decrescente e si prova che $I_n \rightarrow 0$ come $1/n$.

Si noti che se $I_{n+1} = 1 - (n+1) I_n$ allora

$$I_n = (1 - I_{n+1})/(n+1)$$

e quindi $I_{n-1} = (1 - I_n)/n$.

Una successione ricorrente.

Calcoliamo I_n per $n = 1, \dots, 99$:

- mediante la successione **in avanti**

$$\begin{cases} s_1 = e^{-1} = I_1 \\ s_{n+1} = 1 - (n+1) s_n \approx I_{n+1} \end{cases} \quad (5)$$

con $n = 1, \dots, 98$;

- mediante la successione **all'indietro**

$$\begin{cases} t_{1000} = 0 \\ t_{n-1} = (1 - t_n)/n \approx I_{n-1}. \end{cases}$$

con $n = 1000, 999, \dots, 2$.

Una successione ricorrente.

Scriviamo il codice in un file `succricorrente.m`.

```
% cancelliamo variabili e funzioni precedentemente definite.
clear all;

% successione "s_n".
s(1)=exp(-1); % valore che approssima  $e^{-1}$ 
for n=1:99
    % valore che approssima  $e^{-(n+1)}$ 
    s(n+1)=1-(n+1)*s(n);
end

% successione "t_n".
M=1000;
t=zeros(1,M); % inizializzazione "t" come vettore riga.
for n=M:-1:2
    % valore che approssima  $e^{-(n-1)}$ 
    t(n-1)=(1-t(n))/n;
end

% plot semilogaritmico
clf;
semilogy(1:length(s),abs(s),'k-',...
    1:length(s),abs(t(1:length(s))), 'm-');
legend('s','t')
```

Quindi digitiamo sulla shell di Matlab/Octave `succricorrente`. Otteniamo il grafico in figura, che mostra come la prima successione non converge a 0 per una cattiva propagazione degli errori, mentre la seconda, quella all'indietro fornisce buoni risultati.

Una successione ricorrente.

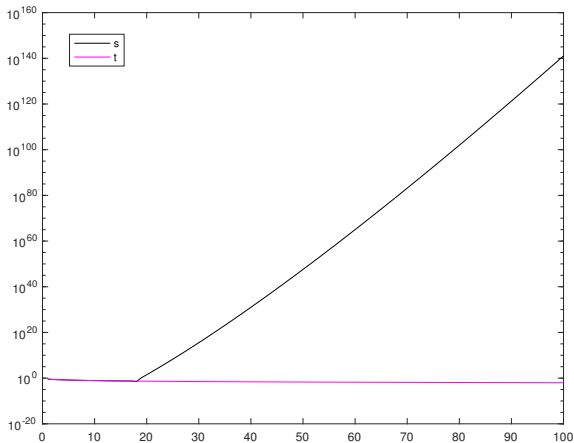


Figura: Grafico che illustra i valori assoluti assunti dalla successione in avanti (in nero) e all'indietro (in rosa magenta).

Una successione ricorrente. Commento.

Osserviamo per prima cosa che $\exp(-1)$ non è un numero macchina e quindi verrà approssimato, compiendo un certo errore assoluto

$\epsilon \leq \exp(-1) \cdot \text{eps} \approx 8.2e - 17$ (ricordare la definizione di precisione di macchina).

La successione in avanti amplifica gli errori. Infatti se

$$\bar{l}_1 = l_1 + \epsilon$$

$$\bar{l}_{n+1} = 1 - (n+1)\bar{l}_n$$

allora

$$\bar{l}_2 = 1 - 2\bar{l}_1 = 1 - 2(l_1 - \epsilon) = l_2 + 2 \cdot 1 \cdot \epsilon$$

$$\bar{l}_3 = 1 - 3\bar{l}_2 = 1 - 3(l_2 + 2\epsilon) = l_3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \epsilon$$

$$\bar{l}_4 = 1 - 4\bar{l}_3 = 1 - 4(l_3 + 3\epsilon) = l_4 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \epsilon$$

e in generale

$$\bar{l}_n = l_n + (-1)^n n! \cdot \epsilon$$

ovvero

$$|\bar{l}_n - l_n| = n! \cdot \epsilon$$

con il termine $n! \cdot \epsilon$ che tende velocemente a $+\infty$ al crescere di n .

Una successione ricorrente Commento.

La successione all'indietro invece smorza gli errori. Infatti, se

$$\bar{l}_m = l_m + \epsilon$$

e

$$\bar{l}_{n-1} = (1 - \bar{l}_n)/n$$

allora si vede con qualche conto che

$$\begin{aligned}\bar{l}_{m-1} &= l_{m-1} - \epsilon/m \\ \bar{l}_{m-2} &= l_{m-2} - \epsilon/((m-1) \cdot m) \\ &\dots \\ \bar{l}_{m-k} &= l_{m-k} - \epsilon / \prod_{s=0}^k (m-s)\end{aligned}$$

ovvero si compie un errore assoluto

$$|\bar{l}_{m-k} - l_{m-k}| = \epsilon / \prod_{s=0}^k (m-s)$$

con il termine $\epsilon / \prod_{s=0}^k (m-s)$ che tende velocemente a 0 al crescere di k .

Si tenga conto che relativamente all'esperimento

$$l_{1000} \approx 9.980049850517696e - 04$$

Di conseguenza

$$|\bar{I}_{999} - I_{999}| \approx 9e-04/1000 = 9e-07,$$

$$|\bar{I}_{998} - I_{998}| \approx \epsilon/(999 \cdot 1000) \approx 9e-10,$$

$$|\bar{I}_{997} - I_{997}| \approx \epsilon/(998 \cdot 999 \cdot 1000) \approx 9e-13,$$

$$|\bar{I}_{996} - I_{996}| \approx \epsilon/(997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000) \approx 9e-16,$$

e quindi già I_{996} è calcolato con estrema accuratezza.

L'algoritmo di Horner.

Ci poniamo il problema di **valutare il polinomio**

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \quad (6)$$

in un punto x .

Osserviamo che

$$p(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + \dots + x \cdot (a_{n-1} + x \cdot a_n))) \quad (7)$$

Supponiamo sia $a = (a_0, \dots, a_n)$ il vettore di dimensione $n + 1$ delle componenti del polinomio.

Possiamo valutare il polinomio tramite i seguenti due algoritmi, il primo che valuta direttamente il polinomio secondo quanto descritto in (6), il secondo che effettua la stessa operazione come descritto in (7) calcolando dapprima $s_1 = a_{n-1} + x \cdot a_n$, poi $s_2 = a_{n-2} + x \cdot s_1$ e così via.

L'algoritmo di Horner.

Di seguito salviamo nella function `algoritmo_horner` il codice

```
clear all;
% il polinomio 1+2x+3x^2+4x^3 e' codificato con [1 2 3 4].
a=[1 2 3 4];
x=pi;
y1=algoritmo1(a,x);
y2=algoritmo2(a,x);

fprintf('\n \t algoritmo 1: %1.15e',y1);
fprintf('\n \t algoritmo 2: %1.15e',y2);

fprintf('\n \n');
```

L'algoritmo di Horner.

Di seguito, sempre in `algoritmo_horner` scriviamo le function `algoritmo1`

```
function s=algoritmo1(a,x)
xk=1; s=a(1);
for i=2:length(a)
    xk=xk*x;
    s=s+a(i)*xk;
end
```

e la function `algoritmo2`

```
function s=algoritmo2(a,x)
L=length(a);
s=a(L); % COMPONENTE a_n IMMAGAZZINATA IN a(n+1).
for i=L-1:-1:1
    s=a(i)+x*s;
end
```

L'algoritmo di Horner.

Matlab permette di scrivere all'interno di una **function**, nel nostro caso `algoritmo_horner` altre functions utilizzato dallo stesso, ovvero `algoritmo1`, `algoritmo2`.

Nota.

Si osservi che questo non vale per uno script Matlab che non sia una function.

Quindi lanciamo il codice `algoritmo_horner` per la valutazione di $p(x) = 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3$ in $x = \pi$ e ricaviamo

```
>> algoritmo_horner  
algoritmo 1: 1.609171052316469e+02  
algoritmo 2: 1.609171052316469e+02  
>>
```

La differenza sta nella complessità computazionale e non nel risultato numerico.

- Il primo algoritmo richiede $2n$ moltiplicazioni e n somme.
- Il secondo algoritmo richiede n moltiplicazioni e n somme.