Derivazione numerica [1]

A. Sommariva [2]

Keywords: Derivazione numerica. Differenza in avanti. Rapporto incrementale simmetrico. Estrapolazione.

Revisione: 25 giugno 2019

1. Il problema della derivazione numerica

Problema 1.1 (Derivazione numerica). *Il problema della derivazione numerica consiste nell'approssimare la derivata di una funzione f in un certo punto x_0, ovvero (qualora esista)*

$$\boxed{f'(x_0) = Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.} \tag{1}$$

Si potrebbe approssimare f con una successione di funzioni f_n facili da derivare e poi differenziare f_n, valutandola nel punto x_0.

Purtroppo,

$$\text{dist}(f_n, f) \to 0 \not\Rightarrow \text{dist}(Df_n, Df) \to 0, \;\; n \to +\infty.$$

che si può pure leggere come *esistono f e f_n arbitrariamente "vicine", ma con derivate f' e f_n' arbitrariamente distanti*, fenomeno noto come instabilità dell'operatore di derivazione (nel continuo).

Quale esempio, consideriamo la successione

$$\boxed{f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx), \;\; x \in [0, 1].} \tag{2}$$

Osserviamo che essendo $\sin(x) \in [-1, 1]$ qualora $x \in [0, 1]$ abbiamo

$$\frac{-1}{n} \le f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \le \frac{1}{n}$$

e sicuramente, detta f la funzione costantemente nulla abbiamo $f_n \to f$ non solo puntualmente ma anche <u>uniformemente</u> visto che

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{n}\sin(nx) - 0 \right| \le \frac{1}{n} \to 0.$$

Osserviamo che

- la derivata di f è la funzione costantemente nulla,
- la derivata di f_n è
$$f_n'(x) = \cos(nx)$$

Questo implica che
$$f_n \to f, \quad \text{uniformemente}$$
ma non è vero che
$$f_n' \to f', \quad \text{uniformemente}$$
in quanto
$$\max_{x \in [a,b]} |\cos(nx) - 0| = \max_{x \in [a,b]} |\cos(nx)|$$
non è infinitesima.

Commento 1.2. *Questo non vuol dire che se f e f_n arbitrariamente "vicine" allora le derivate f' e f_n' sono arbitrariamente distanti, e quindi possiamo sperare che sotto certe ipotesi su f, se f_n sono scelte bene e sono vicine a f, allora pure f_n' e f' sono vicine.*

Ad esempio, se (a,b) è un intervallo limitato e s_{3,Δ_n} è un interpolante spline cubica di $f \in C^4(a,b)$, nei nodi determinati dalla suddivisione $\Delta_n = \{x_k\}$ con $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0, \ldots, n$, ovvero punti equispaziati con passo $h_n = (b-a)/n$,

- *la successione di splines cubiche $\{s_{3,\Delta_n}\}_n$ converge a f uniformemente,*
- *$\{s_{3,\Delta_n}'\}_n$ converge a f' uniformemente.*

In effetti, esiste una costante c_1 tale che
$$0 \leq \max_{x \in [a,b]} |f'(x) - s_{3,\Delta_n}'(x)| \leq c_1 h_n^3 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| = c_1 \frac{(b-a)^3}{n^3} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$
e quindi per quanto visto precedentemente e per il teorema del confronto, deduciamo la convergenza uniforme.

Sia f una funzione derivabile nell'intervallo $[a,b]$ e consideriamo il rapporto incrementale $\delta_+(f,h)$, detto tecnicamente differenza in avanti, di una funzione f almeno derivabile, ovvero per un fissato $h > 0$, e supposto $x, x+h \in [a,b]$,
$$\boxed{\delta_+(f,x,h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \tag{3}$$
(cf. [2]).

In particolare, se $f \in C^2([a,b])$ e $x \in [a,b]$ allora, dalla formula di Taylor,
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(\xi_x)/2, \;\; \xi_x \in (x, x+h)$$
per cui riarrangiando i termini

$$\delta_+(f,x,h) = f'(x) + hf''(\xi_x)/2, \;\; \xi_x \in (x, x+h).$$

Per il teorema di Weierstrass, essendo $f'' \in C([a,b])$ e $|\cdot| \in C([a,b])$, esiste finito

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|/2 \geq 0$$

e quindi, essendo

$$\delta_+(f,x,h) - f'(x) = hf''(\xi_x)$$

ricaviamo che se $x+h \in [a,b]$ allora

$$0 \leq |\delta_+(f,x,h) - f'(x)| \leq |hf''(\xi_x)| \leq M_2 h \tag{4}$$

per cui, per il teorema del confronto, se $h \to 0$ allora

$$|\delta_+(f,x,h) - f'(x)| \to 0.$$

In altri termini, ci <u>verrebbe da credere</u> che utilizzando passi h sempre più piccoli abbiamo approssimazioni sempre migliori della derivata prima, in un punto arbitrario dell'intervallo $[a,b]$.

Numericamente, le cose vanno in modo diverso. La funzione f non viene sempre valutata esattamente, ed ogni volta calcoliamo invece di

$$\delta_+(f,x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

un *rapporto incrementale perturbato*

$$\tilde{\delta}_+(f,x,h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$$

e abbiamo, sottraendo e aggiungendo $\tilde{\delta}_+(f,x,h)$,

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(f,x,h)| &= |(f'(x) - \delta_+(f,x,h)) + (\delta_+(f,x,h) - \tilde{\delta}_+(f,x,h))| \\ &\leq |f'(x) - \delta_+(f,x,h)| + |\delta_+(f,x,h) - \tilde{\delta}_+(f,x,h)|. \end{aligned}$$

- Osserviamo che se ϵ è il massimo errore compiuto nel valutare la funzione

$$\begin{aligned} |\delta_+(f,x,h) - \tilde{\delta}_+(f,x,h)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\ &= \left| \frac{f(x+h) - \tilde{f}(x+h)}{h} - \frac{f(x) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x+h) - \tilde{f}(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{f(x) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \leq \frac{2\epsilon}{h} \end{aligned}$$

- Ricordiamo che $|f'(x) - \tilde{\delta}_+(f,x,h)| \leq |f'(x) - \delta_+(f,x,h)| + |\delta_+(f,x,h) - \tilde{\delta}_+(f,x,h)|$

- Se $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, $x+h \in [a,b]$, allora $|\delta_+(f,x,h) - f'(x)| \leq M_2 h$.

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(f,x,h)| &\leq |f'(x) - \delta_+(f,x,h)| + |\delta_+(f,x,h) - \tilde{\delta}_+(f,x,h)| \\ &\leq M_2 h + \frac{2\epsilon}{h}. \end{aligned} \tag{5}$$

Commento 1.3. *Il fatto che*

$$|f'(x) - \tilde{\delta}_+(f,x,h)| \leq M_2 h + \frac{2\epsilon}{h}.$$

dice che numericamente, se $h \to 0$ può accadere che fino ad un certo h_0 otteniamo approssimazioni della derivata in x sempre migliori, ma poi diventando per h piccolo rilevante la quantità $\frac{2\epsilon}{h}$, i risultati cominciano a peggiorare.

Siccome l'analisi viene fatta per $h \to 0$, e l'unica richiesta è che sia $x + h, x \in [a,b]$, generalmente $[a,b]$ è un intervallo con una piccola ampiezza, contenente x e possiamo pensare quindi che se la derivata seconda non varia troppo vicino a x, ovvero sia $M_2 \approx f''(x)$.

Inoltre, visto che la funzione $g(h) := M_2 h + \frac{2\epsilon}{h}$ ha minimo in $h^* = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{M_2}}$, si suggerisce di non scegliere numericamente valori di h più piccoli di h^* con

$$\boxed{h^* = \sqrt{\frac{2\epsilon}{M_2}}.} \tag{6}$$

Esempio. Derivare in $x_0 = 0$ la funzione $f(x) = \exp(x)$ la cui derivata è $f'(x) = \exp(x)$, calcolando

$$\delta_+(f,x,h) = \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}.$$

Il valore desiderato è $f'(0) = \exp(0) = 1$.

Otteniamo i risultati della tabella e della figura, dove valutiamo $E_h(f,0) = |\delta_+(f,x,h) - 1|$ per $h = 10^{-1}, \ldots, 10^{-26}$.

Nel nostro caso, dalla definizione di numero macchina, e dal fatto che $\exp(h) \approx 1$, ci possiamo aspettare che l'errore compiuto nel valutare $\exp(h)$ sia pari alla precisione di macchina, ovvero $\epsilon = 10^{-16}$. Visto che $M_2 \approx \exp(0) = 1$, ci aspettiamo che il passo critico sia

$$h^* = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{M_2}} \approx 1.4 \cdot 10^{-8}$$

come confermato dagli esperimenti numerici.

h	$E_h(f,0)$	h	$E_h(f,0)$
$1.0e-01$	$5.171e-02$	$1.0e-14$	$7.993e-04$
$1.0e-02$	$5.017e-03$	$1.0e-15$	$1.102e-01$
$1.0e-03$	$5.002e-04$	$1.0e-16$	$1.000e+00$
$1.0e-04$	$5.000e-05$	$1.0e-17$	$1.000e+00$
$1.0e-05$	$5.000e-06$	$1.0e-18$	$1.000e+00$
$1.0e-06$	$5.000e-07$	$1.0e-19$	$1.000e+00$
$1.0e-07$	$4.943e-08$	$1.0e-20$	$1.000e+00$
$1.0e-08$	$6.077e-09$	$1.0e-21$	$1.000e+00$
$1.0e-09$	$8.274e-08$	$1.0e-22$	$1.000e+00$
$1.0e-10$	$8.274e-08$	$1.0e-23$	$1.000e+00$
$1.0e-11$	$8.274e-08$	$1.0e-24$	$1.000e+00$
$1.0e-12$	$8.890e-05$	$1.0e-25$	$1.000e+00$
$1.0e-13$	$7.993e-04$	$1.0e-26$	$1.000e+00$

Tabella 1: Valutazione dell'errore $E_h(f,0)$, $f(x) = \exp(x)$, per alcuni passi h. L'errore degrada a partire da circa $h = 1.0e-08$.

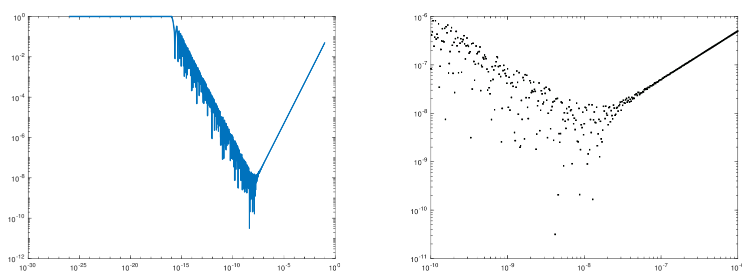

Figura 1: A sinistra, grafico in scala semilogaritmica dell'errore $E_h(f,0)$, $f(x) = \exp(x)$, per alcuni passi h. A destra lo studio in scala loglog, attorno al valore $h = 10^{-8}$, in cui si vede come già vicino a $h = 10^{-7}$ incomincino a esserci problemi di convergenza

Esempio. Derivare in $x_0 = 5$ la funzione funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\ x \in \mathbb{R}$ la cui derivata è $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, calcolando

$$\delta_+(f,x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Il valore desiderato è $f'(5) = \frac{-10}{26^2} = -0.01479289940828402$.

Approssimiamo $f'(x_0)$, calcolando

$$\delta_+(f,5,h) = \frac{f(5+h) - f(5)}{h}.$$

Otteniamo i risultati della tabella, dove valutiamo

$$E_h(f,5) = |\delta_+(f,5,h) - f'(5)|$$

per $h = 1, 10^{-1}, \ldots, 10^{-15}$. Come nel caso precedente, per $h < 10^{-8}$ i valori della derivata cominciano a degradare.

h	$E_h(f,0)$	h	$E_h(f,0)$
$1.0e+00$	$3.358e-03$	$1.0e-08$	$2.258e-10$
$1.0e-01$	$4.108e-04$	$1.0e-09$	$2.381e-09$
$1.0e-02$	$4.200e-05$	$1.0e-10$	$1.150e-08$
$1.0e-03$	$4.209e-06$	$1.0e-11$	$8.212e-07$
$1.0e-04$	$4.210e-07$	$1.0e-12$	$4.927e-07$
$1.0e-05$	$4.210e-08$	$1.0e-13$	$7.159e-05$
$1.0e-06$	$4.210e-09$	$1.0e-14$	$8.321e-04$
$1.0e-07$	$3.913e-10$	$1.0e-15$	$8.645e-03$

Tabella 2: A sinistra, grafico in scala semilogaritmica dell'errore $E_h(f,0)$, $f(x) = 1/(1+x^2)$, per alcuni passi h. A destra lo studio in scala loglog, attorno al valore $h = 10^{-8}$, in cui si vede come già vicino a $h = 10^{-7}$ incomincino a esserci problemi di convergenza.

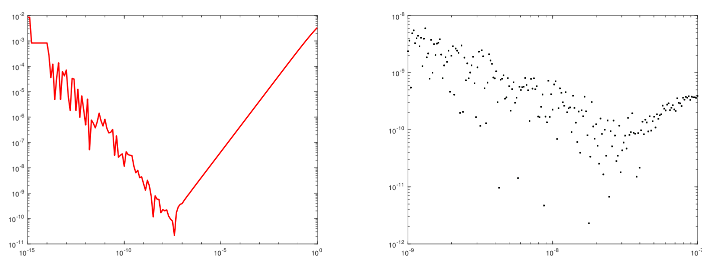

Figura 2: Errore $E_h(f,0)$ per alcuni passi h. Zoom attorno al valore $h = 10^{-8}$ in cui si vede come tra $h = 10^{-7}$ e $h = 10^{-8}$ incomincino a esserci problemi di convergenza.

Supponiamo $f \in C^3([a,b])$ e che $x-h, x+h \in [a,b]$. Allora,

- per $\xi_+ \in (x, x+h)$ abbiamo

$$f(x+h) = f(x) + hf^{(1)}(x) + h^2 \frac{f^{(2)}(x)}{2} + \frac{h^3 f^{(3)}(\xi_+)}{6},$$

- per $\xi_- \in (x-h, x)$ abbiamo

$$f(x-h) = f(x) - hf^{(1)}(x) + h^2 \frac{f^{(2)}(x)}{2} - \frac{h^3 f^{(3)}(\xi_+)}{6}.$$

Sottraendo membro a membro,

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf^{(1)}(x) + h^3 \frac{f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_+)}{6}.$$

Dal teorema dei valori intermedi, la funzione assume tutti i valori nell'intervallo

$$[\min(f^{(3)}(\xi_-), f^{(3)}(\xi_+)), \max(f^{(3)}(\xi_-), f^{(3)}(\xi_+))]$$

e quindi in particolare il loro valore medio. Quindi possiamo asserire che esiste $\xi \in (x-h, x+h)$ tale che

$$f^{(3)}(\xi) = \frac{f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)}{2}$$

e di conseguenza

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf^{(1)}(x) + h^3 \frac{f^{(3)}(\xi)}{3}.$$

da cui riarrangiando i termini

$$\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi).$$

Da

$$\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} f^{(3)}(\xi).$$

se $M_3 = \max_{x \in (a,b)} |f^{(3)}(x)|$ abbiamo

$$0 \leq \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| = \frac{h^2}{2} |f^{(3)}(\xi)| \leq \frac{h^2}{2} M_3 \tag{7}$$

da cui, per il teorema del confronto

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| = 0$$

e quindi

$$\lim_{h \to 0} \delta_2(f, x, h) = f^{(1)}(x).$$

Come nel caso precedente, questo risultato teorico non trova sempre riscontro nella pratica numerica.

La funzione f non viene sempre valutata esattamente, ed ogni volta calcoliamo

$$\tilde{\delta}_2(f, x, h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)}{2h}$$

invece di $\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ e abbiamo

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &= |f'(x) - \delta_2(f, x, h) + \delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \\ &\leq |f'(x) - \delta_2(f, x, h)| + |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \end{aligned} \tag{8}$$

- Se ϵ è il massimo errore compiuto nel valutare la funzione

$$\begin{aligned} |\delta_2(f,x,h) - \tilde{\delta}_2(f,x,h)| &= \left| \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x-h)}{2h} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x+h)-\tilde{f}(x+h)}{2} \right| + \left| \frac{f(x-h)-\tilde{f}(x-h)}{2} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2h} + \frac{\epsilon}{2h} = \frac{\epsilon}{h} \end{aligned} \tag{9}$$

,

- essendo

$$|f'(x) - \tilde{\delta}_2(f,x,h)| \leq |f'(x) - \delta_2(f,x,h)| + |\delta_2(f,x,h) - \tilde{\delta}_2(f,x,h)|$$

- se $M_3 = \max_{s \in [a,b]} |f^{(3)}(s)|$ abbiamo

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} M_3$$

ricaviamo

$$\begin{aligned} |\delta_2(f,x,h) - \tilde{\delta}_2(f,x,h)| &\leq |f'(x) - \delta_2(f,x,h)| + |\delta_2(f,x,h) - \tilde{\delta}_2(f,x,h)| \\ &\leq \frac{h^2}{2} M_3 + \frac{\epsilon}{h}. \end{aligned} \tag{10}$$

Siccome l'analisi viene fatta per $h \to 0$, e l'unica richiesta è che sia $x+h, x-h \in [a,b]$, generalmente possiamo pensare ad $[a,b]$ come ad un intervallo di piccola ampiezza e contenente x al suo interno.

Di conseguenza che se la derivata terza non varia troppo vicino a x, sia $M_2 \approx f^{(3)}(x)$.

In particolare, visto che la funzione

$$g_2(h) := \frac{h^2}{2} M_3 + \frac{\epsilon}{h}$$

ha minimo in

$$h^* = \sqrt[3]{\frac{\epsilon}{M_3}},$$

si suggerisce di non scegliere numericamente valori di h più piccoli di h^* con

$$\boxed{h^* = \sqrt[3]{\frac{\epsilon}{M_3}}.} \tag{11}$$

Esempio. Derivare in $x_0 = 0$ la funzione $f(x) = \exp(x)$ la cui derivata è $f'(x) = \exp(x)$, calcolando

$$\delta_2(f, 0, h) = \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \frac{\exp(h) - \exp(-h)}{2h}.$$

Il valore desiderato è $f'(0) = \exp(0) = 1$.

Otteniamo i risultati della tabella e della figura, dove valutiamo

$$E_h(f, 0) = |\delta_2(f, 0, h) - 1|$$

per $h = 10^0, \ldots, 10^{-25}$, che evidenziano un degradamento attorno a $h^* = 10^{-6}$. Osserviamo come gli errori, per $h < h^* = (10^{-16})^{1/3} \approx 6 \cdot 10^{-6}$ siano circa $(h^2/2)M_3 = (h^2/2)$ in quanto $M_3 \approx D^3 \exp(0) = 1$. Ad esempio per $h = 10^{-4}$ ci aspettiamo un errore di $5 \cdot 10^{-9}$ non troppo distante, almeno come ordine, da $1.667e - 09$.

h	$E_h(f,0)$	h	$E_h(f,0)$
$1.0e+00$	$1.752e-01$	$1.0e-13$	$2.442e-04$
$1.0e-01$	$1.668e-03$	$1.0e-14$	$7.993e-04$
$1.0e-02$	$1.667e-05$	$1.0e-15$	$5.471e-02$
$1.0e-03$	$1.667e-07$	$1.0e-16$	$4.449e-01$
$1.0e-04$	$1.667e-09$	$1.0e-17$	$1.000e+00$
$1.0e-05$	$1.210e-11$	$1.0e-18$	$1.000e+00$
$1.0e-06$	$2.676e-11$	$1.0e-19$	$1.000e+00$
$1.0e-07$	$5.264e-10$	$1.0e-20$	$1.000e+00$
$1.0e-08$	$6.077e-09$	$1.0e-21$	$1.000e+00$
$1.0e-09$	$2.723e-08$	$1.0e-22$	$1.000e+00$
$1.0e-10$	$8.274e-08$	$1.0e-23$	$1.000e+00$
$1.0e-11$	$8.274e-08$	$1.0e-24$	$1.000e+00$
$1.0e-12$	$3.339e-05$	$1.0e-25$	$1.000e+00$

Tabella 3: Valutazione dell'errore $E_h(f, 0)$, $f(x) = \exp(x)$, per alcuni passi h. L'errore sembra degradare a partire da circa $h = 1.0e - 06$.

Esempio. Derivare in $x_0 = 5$ la funzione funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ la cui derivata è $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, calcolando

$$\delta_2(f, 5, h) = \frac{f(5+h) - f(5-h)}{2h}.$$

Il valore desiderato è $f'(5) = -0.01479289940828402$.

Dopo qualche conto, $f^{(3)}(5) \approx -6.302300339623963e - 03$.

- Nella tabella, valutiamo $E_h(f, 5) = |\delta_2(f, 5, h) - f'(5)|$ per $h = 1, 10^{-1}, \ldots, 10^{-15}$.

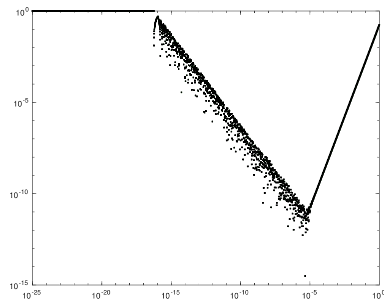

Figura 3: Errore $E_h(f, 0)$, con $f(x) = \exp(x)$, per alcuni passi h. Si vede, partendo da destra, come l'errore compiuto sia una funzione decrescente al diminuire di h fino a 10^{-5} (e non 10^{-6} come dice la tabella), dopo di che l'andamento, pur meno prevedibile, è essenzialmente crescente, fornendo errori tendenzialmente maggiori al diminuire di h.

- da $|\delta_2(f, x, h) - f'(x)| = |h^2 f^{(3)}(\xi)|/2$, ci aspettiamo un errore

$$E_h(f, 5) \approx \frac{6 \cdot 10^{-3} h^2}{2} = 3 \cdot 10^{-3} h^2.$$

Ad esempio, per $h = 10^{-4}$ la stima offre $3 \cdot 10^{-11}$ molto prossima al valore numerico effettivo di $1.050e - 11$ (almeno come ordine!).

Come nel caso precedente, per $h^* = (10^{-16}/0.0063)^{1/3} = 2 \cdot 10^{-5}$, da $h <= h^*$ i valori della derivata cominciano a degradare.

h	$E_h(f, 0)$	h	$E_h(f, 0)$
$1.0e + 00$	$1.105e - 03$	$1.0e - 08$	$1.211e - 10$
$1.0e - 01$	$1.051e - 05$	$1.0e - 09$	$1.088e - 09$
$1.0e - 02$	$1.050e - 07$	$1.0e - 10$	$1.150e - 08$
$1.0e - 03$	$1.050e - 09$	$1.0e - 11$	$1.273e - 07$
$1.0e - 04$	$1.050e - 11$	$1.0e - 12$	$4.927e - 07$
$1.0e - 05$	$1.293e - 13$	$1.0e - 13$	$2.455e - 06$
$1.0e - 06$	$1.458e - 12$	$1.0e - 14$	$1.219e - 04$
$1.0e - 07$	$2.505e - 11$	$1.0e - 15$	$8.321e - 04$

Tabella 4: Valutazione dell'errore $E_h(f, 5)$, con $f(x) = 1/(1 + x^2)$, per alcuni passi h. L'errore degrada a partire da circa $h = 1.0e - 05$.

[1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.

[2] Wikipedia, Finite Difference, https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference

[3] Wikipedia, Numerical Differentiation, https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_differentiation

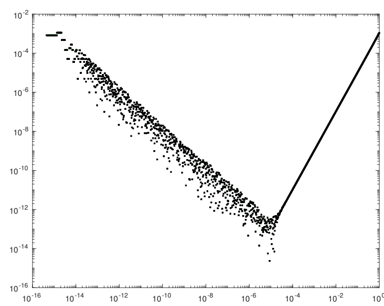

Figura 4: Errore $E_h(f, 5)$, con $f(x) = 1/(1 + x^2)$, per alcuni passi h. Si vede, partendo da destra, come l'errore compiuto sia una funzione decrescente al diminuire di h fino a 10^{-5}, dopo di che l'andamento, pur meno prevedibile, è essenzialmente crescente, fornendo errori tendenzialmente maggiori al diminuire di h.