

# Equazioni nonlineari <sup>1</sup>

A. Sommariva <sup>2</sup>

---

*Keywords:* Metodo di bisezione, stima dell'errore col residuo pesato; metodo di Newton, convergenza globale, velocità (ordine) di convergenza, cenno alla convergenza locale, stima dell'errore, altri metodi di linearizzazione (secanti); iterazioni di punto fisso, convergenza e ordine di convergenza.

---

*Revisione:* 3 giugno 2019

---

## 1. Soluzione numerica di equazioni nonlineari

**Problema 1.1.** *Data una funzione continua  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (dove al solito  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ ), si desidera calcolare  $x^*$  tale che  $f(x^*) = 0$ .*

Questo problema è diffuso nel calcolo numerico, ad esempio nella soluzione di equazioni differenziali con metodi impliciti, e richiede in generale l'utilizzo di un metodo iterativo per approssimare tali soluzioni  $x^*$ .

In altri termini, partendo da un valore iniziale  $x_0$  si genera una sequenza di valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

che si desidera convergano, magari velocemente, ad una opportuna soluzione  $x^*$ , o perfino la determinino in un numero finito di passi.

**Esempio.** Sia  $f = p_n$  un polinomio di grado  $n$ . Determinarne uno o più zeri.

Per un teorema di Galois (a volte detto di Abel-Ruffini [16]), per  $n \geq 5$ , non esistono formule risolutive mediante le 4 operazioni e estrazione di radici per il calcolo degli zeri di una generica equazione polinomiale  $p_n(x) = 0$  che richiedano un numero finito di operazioni.

Ciò non vieta di approssimare tali radici con un metodo numerico compiendo un errore assoluto e/o relativo inferiore a un valore prestabilito detto tolleranza.

Equazioni polinomiali di questo tipo possono

- non avere soluzioni reali, si pensi ad esempio  $x^2 + 2 = 0$  in cui il discriminante è negativo;
- avere più di una soluzione come nel caso di  $x^2 - 5x + 6 = 0$  che ha per soluzioni  $x = 2, x = 3$ ;

- avere  $x^*$  semplici ovvero tali  $f'(x^*) \neq 0$ , come nel caso di  $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$  che ha per soluzioni  $x = 1, x = 2$ , in cui non si annulla  $f'(x) = 2x - 3$  (vale rispettivamente  $-1$  e  $1$ );
- averne  $x^*$  multiple ovvero tali  $f'(x^*) = 0$ , come nel caso di  $(x^2 - 1)^2 = 0$  in cui  $1$  è soluzione multipla in quanto  $f'(x) = 2(x^2 - 1)$  ha zero in  $1$  tanto per  $f$  che per  $f'$ .

Queste differenti situazioni hanno causato varie difficoltà nella soluzione delle equazioni polinomiali, per cui usualmente si applicano metodi ad hoc.

**Esempio.** Calcolare gli zeri della funzione continua  $f(x) = \sin(x) - x$ .

Il problema consiste nel determinare quei valori  $x^*$  per cui  $\sin(x^*) - x^* = 0$ . Visto che

$$\sin(x^*) - x^* = 0 \Leftrightarrow \sin(x^*) = x^*$$

e  $|\sin x| \leq 1$  risulta evidente che se esiste un tale zero, necessariamente

$$x^* \in [-1, 1].$$

Inoltre da

$$f(1) = \sin(1) - 1 \approx -0.1585$$

$$f(-1) = \sin(-1) - (-1) \approx 0.1585$$

per il teorema degli zeri di una funzione continua, possiamo asserire che un tale zero esiste. In effetti la funzione è decrescente in  $[-1, 1]$  in quanto  $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$  per ogni  $x \in [-1, 1]$  e quindi tale zero è unico (e si vede subito essere  $x^* = 0$ ).

La prima tentazione che sorge per studiare gli zeri di una funzione continua  $f$  è di farne il grafico. Purtroppo questa strategia non è sempre efficace, e usualmente richiede troppi calcoli dovuti alla valutazione della funzione in molti punti.

Tipicamente

- si valuta  $f$  in molti punti campione  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_N$  (con  $x_k < x_{x_{k+1}}$ ),
- si disegnano le coppie  $(x_k, f(x_k))$  nel piano cartesiano,
- si approssima il grafico, unendo con segmenti tutte le coppie  $P_j = (x_j, f(x_j))$   
 $P_{j+1} = (x_{j+1}, f(x_{j+1}))$ ,  $j = 1, \dots, N - 1$ .

Se il numero  $N$  di campioni è piccolo, allora tra certi  $x_k$  e  $x_{k+1}$ , il grafico di  $f$  potrebbe essere molto diverso da quello della versione numerica, e alcuni zeri potrebbero non essere individuati.

**Esempio.** Si studino graficamente gli zeri di  $f(x) = 10^6(x - 1/1000)(x + 1/1000)$ .

Il polinomio  $f$  ha ovviamente zeri  $-1/1000, 1/1000$ . Se campioniamo la funzione nei punti equispaziati  $x_k = -1 + k/100$ , con  $k = 0, \dots, 100$  gli zeri non vengono individuati anche dopo zoom successivi, per mancanza di dati.

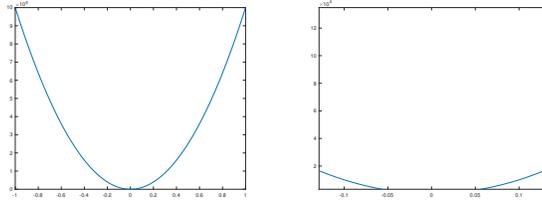


Figura 1: Problemi con grafici e zoom per lo studio di  $f(x) = 0$  per  $f(x) = 10^6 \cdot (x - 1/1000)(x + 1/1000)$ , qualora eseguito via campionamento nei punti  $x_k = -1 + k/100$ , con  $k = 0, \dots, 100$ . Se non si esegue lo zoom, si direbbe che esiste un unico zero, verosimilmente uguale a 0.

- Si potrebbe ovviare aumentando il numero di punti equispaziati, ma da una parte non si avrebbe ancora la garanzia di fedeltà del grafico, e dall'altra il numero di valutazioni diventerebbe eccessivo.
- A dispetto di questa analisi pessimistica, avere un'idea del grafico della funzione, ottenuto anche per mezzi analitici tramite il classico studio di funzione, nella maggior parte dei casi può permettere la localizzazione di alcuni zeri, problema potenzialmente non banale dal punto di vista algoritmico.

## 2. Metodi iterativi e convergenza

Introduciamo di seguito dei metodi iterativi che permettano l'approssimazione di zeri di funzioni continue.

**Definizione 2.1 (Metodo iterativo).** *Un metodo iterativo è un tipo di metodo numerico nel quale l'approssimazione  $x_n$  della soluzione al problema matematico esaminato è ottenuta partendo dai valori, noti in precedenza,*

$$x_0, \dots, x_{n-1},$$

ove  $n = 1, 2, \dots$

Usualmente si fornisce un punto di partenza  $x_0$  per tale processo, dopo una qualche analisi teorica, altrimenti lo si sceglie casualmente.

Nel caso della soluzione di equazioni non lineari, ci sono due aspetti specifici di cui è opportuno tenere conto

1. Garanzia della convergenza alla soluzione: se  $\{x_n\}$  è la soluzione generata dal metodo e  $x^*$  è uno zero per  $f$ , si cercano delle condizioni per cui  $x_n \rightarrow x^*$ .
2. Se  $x_n \rightarrow x^*$  si cerca la velocità con cui ciò accade. In tal senso, è importante calcolare il cosiddetto ordine di convergenza.

**Definizione 2.2 (Ordine di convergenza).** *Supponiamo che un metodo per la soluzione di equazioni non lineari, generi una successione  $\{x_k\}$  convergente allo zero  $x^*$  del problema  $f(x^*) = 0$ . Si ponga  $e_k = |x_k - x^*|$ .*

Il metodo ha ordine di convergenza almeno  $p \geq 1$  se esiste  $C > 0$  tale che

$$e_{n+1} \leq C e_n^p$$

e ordine esattamente  $p$  se vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = L \neq 0$$

In particolare,  $L$  è la costante asintotica di errore.

**Nota 2.3.** Si noti che per  $p = 1$ , necessariamente  $L \leq 1$  e che  $L < 1$  oppure  $C < 1$  sono condizioni sufficienti per la convergenza.

**Nota 2.4.** Se

- $p = 1$  la convergenza è detta lineare;
- $p > 1$  la convergenza è detta superlineare;

In particolare

- per  $p = 2$  si dice quadratica,
- per  $p = 3$  si dice cubica.

**Esempio.** Discutere numericamente la qualità della convergenza di un metodo per cui  $e_k$  sia tale che  $e_0 = 1$

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{1}{10}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

cioè

$$e_{k+1} = \frac{1}{10} e_k^p.$$

Evidentemente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{1}{10},$$

e il metodo ha ordine di convergenza  $p$ .

- Se  $p = 1$  allora  $e_0 = 1, e_1 = 1/10, e_2 = 1/100, e_3 = 1/1000, \dots$ ,
- $p = 2$  allora  $e_0 = 1, e_1 = 1/10, e_2 = 1/1000, e_3 = 1/10^6, \dots$ .

A parità di  $C$ , maggiore è  $p$  allora minore è l'errore  $e_k$  compiuto a parità di  $k$ .

In scala semilogaritmica, si ricava il seguente grafico che mostra come per  $n$  suff. grande, a parità di  $C$  sia da preferire un metodo con  $p$  maggiore possibile.

L'utilizzo di tale scala offre alcuni suggerimenti. Se appare asintoticamente come

- una retta decrescente vuol dire che la (possibile) convergenza verosimilmente ha ordine 1;
- una parabola decrescente, al di sotto di una qualsiasi retta, vuol dire che la (possibile) convergenza verosimilmente ha ordine  $> 1$ .

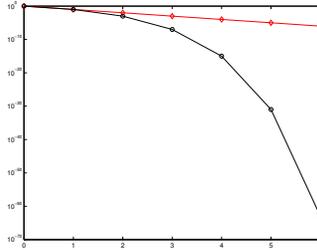


Figura 2: Grafico che illustra l'errore di un metodo con convergenza  $p = 1$  (in rosso a rombi) e  $p = 2$  (in nero a cerchietti), per  $C = 1/10$  ed  $e_0 = 1$ .

### 3. Metodo di bisezione (o dicotomico)

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e supponiamo  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , ovvero la funzione  $f$  non si annulla agli estremi e assume in  $a$  e  $b$  valori di segno opposto.

Di conseguenza, per il teorema degli zeri di una funzione continua, l'intervallo  $(a, b)$  contiene almeno uno zero  $x^*$  di  $f$ .

Definiamo algoritmicamente il metodo di bisezione (cf. [2, p.408], [12]):

1. si fissa un intervallo  $(a_k, b_k)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots\}$  in cui il segno di  $f(a_k)$  è diverso da quello di  $f(b_k)$ , ovvero  $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$ ; dal teorema degli zeri di una funzione continua, si sa che esiste almeno un certo  $x^* \in (a_k, b_k)$  che è zero di  $f$ ;
2. si calcola il punto medio  $x_k$  dell'intervallo  $(a_k, b_k)$  ovvero

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2};$$

3. se  $f(x_k) = 0$  si conclude il processo in quanto  $x_k$  è lo zero cercato;
4. se più in generale un certo criterio di arresto è applicabile ed è verificato allora si conclude il processo perchè si reputa che  $x_k$  sia un'approssimazione di uno zero;
5. altrimenti,
  - se  $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$  si pone  $a_{k+1} = a_k$ ,  $b_{k+1} = x_k$ ;
  - se  $f(x_k) \cdot f(b_k) < 0$  si pone  $a_{k+1} = x_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ ;

e si continua il processo relativamente al nuovo intervallo  $(a_{k+1}, b_{k+1})$ , ripartendo dal punto 1.

**Nota 3.1.** Si osservi che alla  $k$ -sima iterazione, il metodo di bisezione utilizza esclusivamente il segno di  $f(x_k)$  e non il suo valore effettivo.

Prima di citare un teorema di convergenza del metodo di bisezione, introduciamo la funzione  $\lceil x \rceil$  che arrotonda il numero reale  $x$  al minore intero non minore di  $x$ .

Ad esempio,

$$\lceil 3.14 \rceil = 4, \quad \lceil -2.13 \rceil = -2, \quad \lceil 8 \rceil = 8, \quad \lceil -4 \rceil = -4.$$

Sussiste il seguente teorema.

**Teorema 3.2 (Convergenza del metodo di bisezione).** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Allora se  $x_k$  è la  $k$ -sima iterazione del metodo di bisezione, esiste uno zero  $x^*$  di  $f$  tale che

$$|x_k - x^*| \leq 2^{-(k+1)}(b - a).$$

Inoltre affinché per un certo  $\epsilon > 0$  si abbia  $|x^* - x_k| \leq \epsilon$ , necessitano al più

$$k^*(\epsilon) = \lceil \log_2((b - a)/\epsilon) \rceil - 1$$

iterazioni.

**Dimostrazione 3.3.** Osserviamo che ad ogni iterazione il metodo di bisezione dimezza l'ampiezza dell'intervallo  $[a_k, b_k]$  e quindi essendo  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$

$$\begin{aligned} b_k - a_k &= (1/2)(b_{k-1} - a_{k-1}) = (1/2)^2(b_{k-2} - a_{k-2}) = \\ \dots &= (1/2)^k(b_0 - a_0) = 2^{-k}(b - a). \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $x^* \in (a_k, b_k)$  per ogni  $k = 0, 1, \dots$  per cui essendo  $x_k$  il punto medio di  $(a_k, b_k)$ , e  $x^*$  sta in  $[a_k, x_k]$  o  $[x_k, b_k]$ , abbiamo

$$|x_k - x^*| \leq (b_k - a_k)/2.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &\leq (b_k - a_k)/2 = (1/2)^k(b - a) \cdot (1/2) \\ &= (1/2)^{k+1}(b - a) = 2^{-(k+1)}(b - a). \end{aligned}$$

Se  $2^{-(k+1)}(b - a) \leq \epsilon$  necessariamente

$$|x_k - x^*| \leq 2^{-(k+1)}(b - a) \leq \epsilon.$$

Vediamo qual'è il primo indice  $k^*(\epsilon)$  per cui  $2^{-(k+1)}(b - a) \leq \epsilon$  e di conseguenza otterremo  $|x_{k^*(\epsilon)} - x^*| \leq \epsilon$ .

Essendo il logaritmo in base 2 una funzione continua e crescente in  $(0, +\infty)$ , applicandolo ad ambo i membri della prima disuguaglianza

$$2^{-(k+1)} \leq \frac{\epsilon}{b - a}$$

ricaviamo  $-(k + 1) = \log_2(2^{-(k+1)}) \leq \log_2(\epsilon/(b - a))$  ovvero

$$k + 1 \geq -\log_2\left(\frac{\epsilon}{b - a}\right)$$

e il primo intero per cui ciò accade è

$$k^*(\epsilon) = \lceil -\log_2\left(\frac{\epsilon}{b - a}\right) \rceil - 1 = \lceil \log_2((b - a)/\epsilon) \rceil - 1.$$

Si osservi che tipicamente  $\frac{\epsilon}{b - a} \ll 1$  e quindi  $\log_2\left(\frac{\epsilon}{b - a}\right) < 0$ , per cui il numero di iterazioni  $k(\epsilon)$  è effettivamente un numero naturale.

- Nota 3.4.** 1. Il teorema precedente implica che, se  $f(a) \cdot f(b) < 0$  allora il metodo di bisezione converge a una soluzione  $x^* \in (a, b)$  (anche se in quell'intervallo ce n'è più di una!) perchè per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $k^*(\epsilon)$  tale che se  $k \geq k^*(\epsilon)$  allora  $|x_k - x^*| \leq \epsilon$ .
2. Il metodo di bisezione non ha un ordine di convergenza vero e proprio, ma in media converge linearmente.

### 3.1. Bisezione: alcuni esempi

**Esempio.** Calcolare la soluzione  $x^* = 0$  dell'equazione

$$f(x) = \sin(x) - x = 0$$

mediante il metodo di bisezione.

Visto che  $f(-2) = 1.090\dots$ ,  $f(3) = -2.858\dots$ , utilizziamo l'algoritmo di bisezione con  $a_0 = -2$  e  $b_0 = 3$ . Interrompiamo il processo alla iterazione  $n$ -sima se  $f(x_n) = 0$  oppure  $(b_n - a_n)/2 \leq \epsilon$ , con  $\epsilon = 10^{-5}$ . Come detto, il fatto che  $(b_k - a_k)/2 \leq \epsilon$  implica  $|x_k - x^*| \leq (b_k - a_k)/2 \leq \epsilon$ .

Osserviamo che

$$\begin{aligned} k^*(\epsilon) &= \lceil -\log_2\left(\frac{\epsilon}{b_0 - a_0}\right) \rceil - 1 = \lceil -\log_2(10^{-5}/5) \rceil - 1 \\ &= \lceil 18.9316\dots \rceil - 1 = 18. \end{aligned}$$

Dal grafico dell'errore assoluto in scala semilogaritmica, si vede che non si può affermare che la convergenza sia lineare (non è approssimativamente una retta).

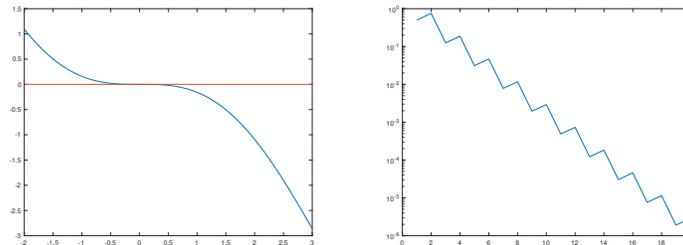


Figura 3: A sinistra, grafico della funzione  $\sin(x) - x = 0$ , in  $[-2, 3]$ . A destra errore assoluto  $|x_k - x^*|$  in scala semilogaritmica.

- Si noti che  $f(a_k) > 0$ ,  $f(b_k) < 0$  per ogni  $k$ . E' interessante guardare come si passi da  $(a_k, b_k)$  a  $(a_{k+1}, b_{k+1})$ , al variare di  $\text{sgn}_k = \text{sgn}(f(x_k))$
- Una particolarità di quest'esempio è che posto  $e_k = |x_k - x^*|$ , il rapporto  $\frac{e_{k+1}}{e_k}$  assume alternativamente valori  $0.6$  e  $0.\bar{6} = 0.666\dots$  e quindi non esiste il limite  $\lim_k \frac{e_{k+1}}{e_k}$ .

Conseguentemente, il metodo di bisezione non ha convergenza lineare, pur avendo ordine di convergenza almeno 1 (si guardi con molta attenzione la definizione!).

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$(b_k - a_k)/2$	$\text{sgn}_k$
0	$-2.00000000e + 00$	$3.00000000e + 00$	$5.00000000e - 01$	$2.5e + 00$	-
1	$-2.00000000e + 00$	$5.00000000e - 01$	$-7.50000000e - 01$	$1.2e + 00$	+
2	$-7.50000000e - 01$	$5.00000000e - 01$	$-1.25000000e - 01$	$6.2e - 01$	+
3	$-1.25000000e - 01$	$5.00000000e - 01$	$1.87500000e - 01$	$3.1e - 01$	-
4	$-1.25000000e - 01$	$1.87500000e - 01$	$3.12500000e - 02$	$1.6e - 01$	-
5	$-1.25000000e - 01$	$3.12500000e - 02$	$-4.68750000e - 02$	$7.8e - 02$	+
6	$-4.68750000e - 02$	$3.12500000e - 02$	$-7.81250000e - 03$	$3.9e - 02$	+
7	$-7.81250000e - 03$	$3.12500000e - 02$	$1.17187500e - 02$	$2.0e - 02$	-
8	$-7.81250000e - 03$	$1.17187500e - 02$	$1.95312500e - 03$	$9.8e - 03$	-
9	$-7.81250000e - 03$	$1.95312500e - 03$	$-2.92968750e - 03$	$4.9e - 03$	+
10	$-2.92968750e - 03$	$1.95312500e - 03$	$-4.88281250e - 04$	$2.4e - 03$	+
11	$-4.88281250e - 04$	$1.95312500e - 03$	$7.32421875e - 04$	$1.2e - 03$	-
12	$-4.88281250e - 04$	$7.32421875e - 04$	$1.22070312e - 04$	$6.1e - 04$	-
13	$-4.88281250e - 04$	$1.22070312e - 04$	$-1.83105469e - 04$	$3.1e - 04$	+
14	$-1.83105469e - 04$	$1.22070312e - 04$	$-3.05175781e - 05$	$1.5e - 04$	+
15	$-3.05175781e - 05$	$1.22070312e - 04$	$4.57763672e - 05$	$7.6e - 05$	-
16	$-3.05175781e - 05$	$4.57763672e - 05$	$7.62939453e - 06$	$3.8e - 05$	-
17	$-3.05175781e - 05$	$7.62939453e - 06$	$-1.14440918e - 05$	$1.9e - 05$	+
18	$-1.14440918e - 05$	$7.62939453e - 06$	$-1.90734863e - 06$	$9.5e - 06$	+

Tabella 1: Studio dell'equazione  $\sin(x) - x = 0$ , in  $(0, 1)$  con  $\text{toll} = 10^{-5}$ .

**Esempio.** Calcolare la soluzione dell'equazione  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$  mediante il metodo di bisezione.

Osserviamo che  $f$  è una funzione continua e crescente, che  $f(0) = -2$ ,  $f(1) = \exp(1) - 2 + 1 = 1.7182\dots$ , e di conseguenza ha un unico zero e questo sta in  $(0, 1)$ .

Quindi utilizziamo l'algoritmo di bisezione con  $a_0 = 0$  e  $b_0 = 1$ . Interrompiamo il processo alla iterazione  $n$ -sima se  $f(x_n) = 0$  oppure  $(b_n - a_n)/2 \leq \epsilon$ , con  $\epsilon = 10^{-5}$ .

La soluzione è  $x^* \approx 0.4428544010023885$ . Osserviamo che

$$k^*(\epsilon) = \lceil -\log_2\left(\frac{\epsilon}{b_0 - a_0}\right) \rceil - 1 = \lceil -\log_2(10^{-5}) \rceil - 1 = \lceil 16.6096 \rceil - 1 = 16.$$

Dal grafico dell'errore assoluto in scala semilogaritmica, si vede che non si può affermare che la convergenza sia lineare (non è approssimativamente una retta).

### 3.2. Alcuni criteri di arresto per il metodo di bisezione

Esistono vari criteri di arresto per il metodo di bisezione.

Fissata una tolleranza  $\text{toll}$  dall'utente, ad esempio  $\text{toll}=10^{-6}$ , si può terminare il processo qualora

- $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$  (criterio dello step);
- $|f(x_k)| \leq \epsilon$  (criterio del residuo);

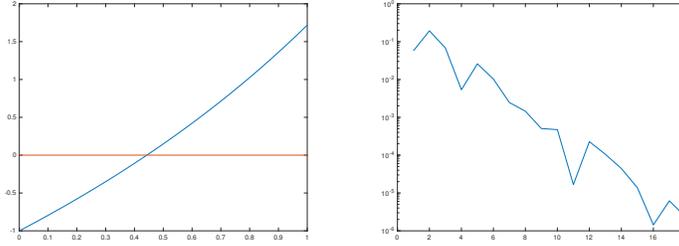


Figura 4: A sinistra, grafico della funzione  $\exp(x) - 2 + x = 0$ , in  $[0, 1]$ . A destra errore assoluto  $|x_k - x^*|$  in scala semilogaritmica.

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$(b_k - a_k)/2$	$\text{sgn}_k$
0	0.00000000e + 00	1.00000000e + 00	5.00000000e - 01	5.0e - 01	+
1	0.00000000e + 00	5.00000000e - 01	2.50000000e - 01	2.5e - 01	-
2	2.50000000e - 01	5.00000000e - 01	3.75000000e - 01	1.2e - 01	-
3	3.75000000e - 01	5.00000000e - 01	4.37500000e - 01	6.2e - 02	-
4	4.37500000e - 01	5.00000000e - 01	4.68750000e - 01	3.1e - 02	+
5	4.37500000e - 01	4.68750000e - 01	4.53125000e - 01	1.6e - 02	+
6	4.37500000e - 01	4.53125000e - 01	4.45312500e - 01	7.8e - 03	+
7	4.37500000e - 01	4.45312500e - 01	4.41406250e - 01	3.9e - 03	-
8	4.41406250e - 01	4.45312500e - 01	4.43359375e - 01	2.0e - 03	+
9	4.41406250e - 01	4.43359375e - 01	4.42382812e - 01	9.8e - 04	-
10	4.42382812e - 01	4.43359375e - 01	4.42871094e - 01	4.9e - 04	+
11	4.42382812e - 01	4.42871094e - 01	4.42626953e - 01	2.4e - 04	-
12	4.42626953e - 01	4.42871094e - 01	4.42749023e - 01	1.2e - 04	-
13	4.42749023e - 01	4.42871094e - 01	4.42810059e - 01	6.1e - 05	-
14	4.42810059e - 01	4.42871094e - 01	4.42840576e - 01	3.1e - 05	-
15	4.42840576e - 01	4.42871094e - 01	4.42855835e - 01	1.5e - 05	+
16	4.42840576e - 01	4.42855835e - 01	4.42848206e - 01	7.6e - 06	-

Tabella 2: Studio dell'equazione  $\exp(x) - 2 + x = 0$ , in  $(0, 1)$  con  $\epsilon = 10^{-5}$ .

- $\frac{|f(x_k)|}{w_k} \leq \epsilon$  ove  $w_k = \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{b_k - a_k} \approx |f'(x^*)|$ , (criterio del residuo pesato).

**Nota 3.5.** Supponiamo sia  $(a_0, b_0)$  l'intervallo iniziale. Dopo la prima iterazione è noto esclusivamente  $x_0$  e quindi

- non è applicabile il criterio dello step

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$$

in quanto oltre a  $x_0$  necessita pure di  $x_1$ , che è quindi utilizzabile a partire solo dalla seconda iterazione;

- sono applicabili i criteri del residuo e del residuo pesato in quanto rispettivamente

$$|f(x_k)| \leq \epsilon,$$

$$\frac{|f(x_k)|}{w_k} \leq \epsilon \text{ dove } w_k = \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{b_k - a_k} \approx |f'(x^*)|$$

richiedono esclusivamente il calcolo di  $f(x_0)$  e possibilmente di  $w_0$  che dipende esclusivamente da  $f(a_0)$ ,  $f(b_0)$ .

**Esempio.** Risolvere mediante il metodo di bisezione, con i criteri di arresto esposti, le equazioni  $f_k(x) = 0$  dove:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 2 \\ f_2(x) &= 10^{-8} \cdot (x^2 - 2) \\ f_3(x) &= 10^8 \cdot (x^2 - 2) \end{aligned}$$

Non è difficile vedere che hanno tutte quali zeri  $\pm\sqrt{2}$ , ma che in termini di grafico,

1. la prima non ha un grafico molto ripido vicino alla soluzione (in effetti la derivata in  $\sqrt{2}$  vale  $2\sqrt{2}$ ),
2. la seconda è molto piatta vicino alla soluzione (la derivata in  $\sqrt{2}$  vale  $2\sqrt{2} \cdot 10^{-8}$ ),
3. la terza è molto ripida vicino alla soluzione (la derivata in  $\sqrt{2}$  vale  $2\sqrt{2} \cdot 10^{+8}$ ).

Il metodo di bisezione, implementato con ognuno dei test di arresto porge i seguenti risultati, in cui

- `res` indica il test del residuo,
- `wres` indica il test del residuo pesato,
- `step` indica il criterio dello step.

Abbiamo interrotto il processo se il metodo aveva fatto 10000 iterazioni, o si fosse verificato il criterio di arresto con tolleranza `tol=10-10`.

test	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ f(x_n) $	$n$
res	1.414213562384248e + 00	1.115e - 11	3.154e - 11	29
wres	1.414213562384248e + 00	1.115e - 11	3.154e - 11	29
step	1.414213562326040e + 00	4.706e - 11	1.331e - 10	34

Tabella 3: La funzione  $f_1$  non è piatta o ripida nei pressi dello zero  $x^*$  e i test di arresto sono circa equivalenti.

### Commento 3.6. I risultati mostrano

1. la superiorità del test basato sul residuo pesato, rispetto al test del residuo, qualora la funzione abbia derivate molto grandi o molto piccole in prossimità della soluzione;
2. l'invarianza rispetto alla pendenza del metodo dello step, che in effetti non ha a che fare con valutazioni delle funzioni  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  (rifletterci su).

test	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ f(x_n) $	$n$
res	$1.414062500000000e + 00$	$1.511e - 04$	$4.272e - 12$	7
wres	$1.414213562384248e + 00$	$1.115e - 11$	$3.154e - 19$	29
step	$1.414213562326040e + 00$	$4.706e - 11$	$1.331e - 18$	34

Tabella 4: La funzione  $f_2$  è molto piatta nei pressi dello zero  $x^*$  e il test del residuo risulta molto impreciso, effettuando poche iterazioni, offrendo però una scarsa approssimazione di  $x^*$ . Gli altri due test d'arresto risultano appropriati.

test	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ f(x_n) $	$n$
res	$1.414213562373095e + 00$	$2.220e - 16$	$4.441e - 08$	10000
wres	$1.414213562384248e + 00$	$1.115e - 11$	$3.154e - 03$	29
step	$1.414213562326040e + 00$	$4.706e - 11$	$1.331e - 02$	34

Tabella 5: La funzione  $f_3$  è molto ripida nei pressi dello zero  $x^*$  e il test del residuo risulta molto conservativo, superando il numero massimo di iterazioni concesse, nonostante abbia calcolato una ottima approssimazione di  $x^*$ . Gli altri due test d'arresto risultano appropriati.

#### 4. Metodo di Newton per la risoluzione di equazioni nonlineari

Supponiamo che

- $x^*$  sia uno zero di  $f$  in  $[a, b]$ ,
- $f$  sia derivabile due volte con continuità in  $[a, b]$ .

Dalla formula di Taylor centrata in  $x_k \in [a, b]$ , per un certo  $\xi_k$  che sta nel più piccolo intervallo aperto contenente  $x_k, x^*$ , abbiamo

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2.$$

Tralasciando il termine di ordine superiore  $f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2$  abbiamo

$$0 \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k)$$

e se  $f'(x_k) \neq 0$ , dopo facili conti,

$$x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Visto che

$$x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

il metodo di Newton genera la successione

$$x_{k+1} = x_k + h_k, \quad h_k = -f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

supposto che sia  $f'(x_k) \neq 0$  per  $k = 0, 1, \dots$  (cf. [1, p.58], [13]).

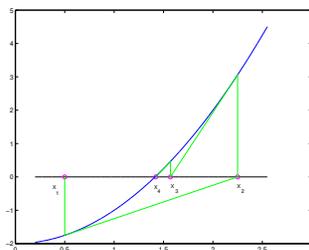


Figura 5: Interpretazione geometrica del metodo di Newton, alla iterazione  $n$ -sima,  $n = 1, 2, 3, 4$ , per calcolare uno zero di una funzione convessa.

**Nota 4.1.** Si osservi che a parte il ragionamento con la formula di Taylor, per definire il metodo di Newton, si richiede esclusivamente che la funzione sia derivabile una volta (e non 2) nei punti  $x_k$ , con  $f'(x_k) \neq 0$ .

**Nota 4.2.** Il metodo ha una interpretazione geometrica. Alla  $k$ -sima iterazione:

1. si calcola  $f(x_{k-1})$ ;
2. si disegna la retta tangente  $\gamma_k$  alla curva definita dalle coppie  $(x, f(x))$ , nel punto  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ;
3. si pone  $x_k$  l'intersezione di  $\gamma_k$  con l'asse delle ascisse.

#### 4.1. Metodo di Newton: criteri di arresto

Le iterazioni del metodo di Newton terminano tipicamente secondo due criteri di arresto.

- In quello dello step, fissata una tolleranza `tol1` si ferma il processo qualora

$$|x_{k+1} - x_k| < \text{tol1}$$

- In quello dello residuo, in cui ciò accade qualora

$$|f(x_k)| < \text{tol1}.$$

**Nota 4.3.** Per il metodo di Newton si ha che il criterio dello step è molto simile a un residuo pesato, in quanto per  $w_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \approx f'(x_k)$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \approx -\frac{f(x_k)}{w_k}.$$

#### 4.2. Metodo di Newton: teoremi di convergenza

Per quanto riguarda la velocità di convergenza proveremo un teorema di convergenza locale (cf. [1], p. 60).

Un tale asserto mostra come sia possibile risolvere numericamente l'equazione  $f(x) = 0$ , partendo da un punto  $x_0$  appartenente a un certo intervallo  $I$  contenente la radice  $x^*$ . Usualmente tale intervallo non è di semplice determinazione.

Differentemente, in quelli detti di convergenza globale, un tale  $I$  è noto esplicitamente.

**Teorema 4.4 (Convergenza locale).** *Si supponga*

1.  $f \in C^2([a, b])$ ;
2.  $x^* \in (a, b)$  sia uno zero semplice di  $f$ , ovvero  $f(x^*) = 0$ ,  $f'(x^*) \neq 0$ .

Allora per  $x_0 \in [a, b]$  sufficientemente vicino a  $x^*$  le iterazioni del metodo di Newton

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sono ben definite e convergono almeno quadraticamente a  $x^*$ .

Se  $f''(x^*) \neq 0$ , allora la convergenza è esattamente quadratica.

**Traccia 4.5.** *Nelle ipotesi del teorema di mostra che esiste un intervallo  $\mathcal{I} = [x^* - \delta, x^* + \delta]$  tale che*

- se  $x_0 \in \mathcal{I}$  e  $x_k$  è la  $k$ -sima iterata del metodo di Newton partendo da  $x_0$ , allora  $x_k \in \mathcal{I}$ ;
- posto  $e_k = |x_k - x^*|$  si ha

$$e_{k+1} \leq C e_k^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

con  $C \geq 0$  indipendente da  $x_0 \in \mathcal{I}$  e  $k$ ;

- la costante  $C \geq 0$  è tale che  $C\delta \in [0, 1)$  (dove  $\delta$  è la semiampiezza dell'intervallo  $\mathcal{I}$ )

Detto questo, visto che  $x_0 \in \mathcal{I}$ , abbiamo  $e_0 = |x_0 - x^*| \leq \delta$  e

$$\begin{aligned} 0 &\leq C e_{k+1} \leq C(C e_k^2) = (C e_k)^2 \leq (C \cdot C e_{k-1}^2)^2 = (C e_{k-1})^{2^2} \\ &\leq (C \cdot C e_{k-2}^2)^{2^2} = (C e_{k-2})^{2^3} \leq (C \cdot C e_{k-3}^2)^{2^3} = (C e_{k-3})^{2^4} \\ &\leq \dots \leq (C e_0)^{2^{k+1}} \leq (C\delta)^{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Da

$$0 \leq C e_{k+1} \leq (C\delta)^{2^{k+1}}$$

visto che  $C\delta \in [0, 1)$  necessariamente

$$\lim_k (C\delta)^{2^{k+1}} = 0$$

e quindi per il teorema del confronto pure  $C e_{k+1} \rightarrow 0$  ovvero, essendo  $C > 0$  una costante indipendente da  $k$ ,  $e_{k+1} \rightarrow 0$  cioè il metodo di Newton è convergente con convergenza almeno quadratica.

Con qualche conto, partendo da questo risultato, si mostra che

$$\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{|f''(x^*)|}{2 \cdot |f'(x^*)|} \neq 0$$

cioè la convergenza è esattamente quadratica.

Dimostriamo un teorema di convergenza globale, che permette di risolvere numericamente l'equazione  $f(x) = 0$ , partendo da un punto  $x_0$  appartenente a un ben determinato intervallo  $I$  contenente la radice  $x^*$ .

**Teorema 4.6 (Convergenza globale del metodo di Newton).** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che gode delle seguenti proprietà

1.  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ ;
2.  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Allora

1. esiste uno ed un solo  $x^* \in (a, b)$  tale che  $f(x^*) = 0$  e tale zero è semplice;
2. per  $x_0 \in [x^*, b]$  il metodo di Newton  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$  è ben definito;
3. la successione  $\{x_n\}$  è decrescente e converge a  $x^*$ .

**Dimostrazione 4.7.** 1. Essendo  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ , allora la funzione  $f'$  è continua e monotona crescente in  $[a, b]$ . Di conseguenza,

- se  $f'$  ha segno costante in  $[a, b]$  si ha che pure  $f$  è monotona (crescente perchè  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ ) e quindi in  $(a, b)$  c'è un unico zero  $x^*$  poichè  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ ;
- se  $f'$  non ha segno costante in  $[a, b]$ , essendo monotona crescente ha un unico zero. Di conseguenza, per la sua convessità (è  $f''(x) > 0$ ),  $f$  ha un unico minimo  $x_{\min} \in [a, b]$ . Quindi dalla monotonia crescente di  $f'$  in  $[x_{\min}, b]$  e dal fatto che  $f(x_{\min}) \leq f(a) < 0$  e  $f(x_{\min}) \leq 0 < f(b)$  abbiamo che vi è un unico zero in  $x^* \in [a, b]$ .

Osserviamo che per quanto appena visto,  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in [x^*, b]$  e quindi in particolare che lo zero  $x^*$  è semplice.

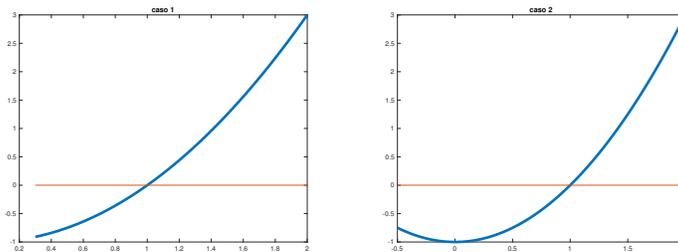


Figura 6: Grafico della funzione nei due sottocasi del punto 1 del teorema.

## 2. La successione

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

è ben definita in quanto la funzione  $f'$  è strettamente positiva in  $[x^*, b]$ .

3. Sia  $n \geq 0$  e  $x_n \geq x^*$ . Dalla formula di Taylor, essendo  $f''(x) > 0$ , per ogni  $x \in [a, b]$ , deduciamo che per  $\xi_n$  nel più piccolo intervallo aperto contenente  $x_n$  e  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  si ha

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) + f''(\xi_n) \cdot \frac{(\xi - x_n)^2}{2} \\ &> f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) = 0 = f(x^*). \end{aligned} \quad (2)$$

Poichè per  $x < x^*$  la funzione  $f$  è negativa, necessariamente ciò implica che  $x_{n+1} > x^*$ .

Inoltre la successione  $\{x_n\}$  è strettamente decrescente perchè da  $f(x_n) > 0$  e  $f'(x_n) > 0$  abbiamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n.$$

Poichè la successione  $\{x_n\}$  è decrescente e limitata inferiormente da  $x^*$ , essa ammette limite  $\xi^*$ . Ma allora per la continuità di  $f$  e  $f'$

$$\xi^* = \lim_n x_{n+1} = \lim_n x_n - \lim_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \xi^* - \frac{f(\xi^*)}{f'(\xi^*)}$$

ed essendo  $f'(\xi^*) \neq 0$  poichè tale zero è semplice abbiamo  $f(\xi^*) = 0$ . Ma  $x^*$  è l'unico zero di  $f$  e quindi  $\xi^* = x^*$  cioè il metodo di Newton converge decrescentemente a  $x^*$ .

**Teorema 4.8.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che gode delle seguenti proprietà

1.  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$ ;
2.  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Allora

1. esiste uno ed un solo  $x^* \in (a, b)$  tale che  $f(x^*) = 0$ . Tale zero è semplice.
2. per  $x_0 \in [a, x^*]$  il metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

è ben definito.

3. La successione  $\{x_n\}$  è crescente e converge a  $x^*$ .

**Traccia 4.9.** Applicare il teorema precedente a  $F(x) = f(-x)$ .

**Nota 4.10 (Zeri multipli).** Il metodo di Newton non ha sempre convergenza quadratica, come nel caso del problema  $f(x) = 0$  in cui  $x^*$  sia uno zero avente molteplicità  $p > 1$  cioè tale che

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(p-1)}(x^*) = 0.$$

Quale esempio si ponga

$$f(x) = (x - 2)\log(x - 1).$$

Si verifica facilmente che  $x^* = 2$  è un suo zero e visto che

- $f^{(1)}(x) = \log(x - 1) + (x - 2)/(x - 1)$ ,
- $f^{(2)}(x) = 2/(x - 1) - (x - 2)/(x - 1)^2$ ,

ha molteplicità 2, visto che  $f^{(1)}(2) = 0$  ma  $f^{(2)}(2) \neq 0$ . Si vede che il metodo di Newton non converge quadraticamente a tale radice.

**Esempio.** Si applichi il metodo di Newton per risolvere  $f(x) = \sin(x) - x = 0$ , la cui unica soluzione è  $x^* = 0$ .

- Da  $f'(x) = \cos(x) - 1$ , le iterate del metodo di Newton sono

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin(x_k) - x_k}{\cos(x_k) - 1}$$

- Osserviamo che il processo non è ben definito se  $\cos(x_k) - 1 = 0$ , ovvero  $x_k = m\pi$  con  $m \in \mathbb{Z}$ .
- Interrompiamo il metodo quando  $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-6}$  e quale punto iniziale poniamo  $x_0 = 3$ .
- Si noti che  $x^* = 0$  è uno zero multiplo in quanto  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Questo, per un teorema che vedremo successivamente causerà una povera performance da parte del metodo.
- Sperimentalmente  $e_{k+1}/e_k \approx 0.667$  per  $k > 1$  e quindi almeno empiricamente possiamo affermare che il metodo di Newton, relativamente a questo esempio, ha convergenza lineare.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	3.0000000000000000e + 00	3.00e + 00	—	2.86e + 00
1	1.563371471588948e + 00	1.56e + 00	1.44e + 00	5.63e - 01
2	9.957580269725619e - 01	9.96e - 01	5.68e - 01	1.57e - 01
3	6.524666397563195e - 01	6.52e - 01	3.43e - 01	4.53e - 02
4	4.318439019482230e - 01	4.32e - 01	2.21e - 01	1.33e - 02
5	2.869951130449173e - 01	2.87e - 01	1.45e - 01	3.92e - 03
6	1.910666484344176e - 01	1.91e - 01	9.59e - 02	1.16e - 03
7	1.273001625888427e - 01	1.27e - 01	6.38e - 02	3.44e - 04
8	8.484384021569123e - 02	8.48e - 02	4.25e - 02	1.02e - 04
9	5.655577232707287e - 02	5.66e - 02	2.83e - 02	3.01e - 05
10	3.770183802430618e - 02	3.77e - 02	1.89e - 02	8.93e - 06
...	...	...	...	...
15	4.964643054317002e - 03	4.96e - 03	2.48e - 03	2.04e - 08
...	...	...	...	...
33	3.359297519803817e - 06	3.36e - 06	1.68e - 06	6.32e - 18
34	2.239575075072224e - 06	2.24e - 06	1.12e - 06	1.87e - 18

Tabella 6: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione  $x^* = 0$  di  $f(x) = \sin(x) - x = 0$  è molto lenta, visto che la soluzione è multipla ovvero  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Il test del residuo non assicura che  $|x_n - x^*|$  sia piccolo, e questo è dovuto al fatto che la funzione, nei pressi della soluzione è molto piatta ( $f'(x^*) = 0$ ).

**Esempio.** Si applichi il metodo di Newton per risolvere  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ , la cui unica soluzione è  $x^* \approx 0.4428544010023885$ .

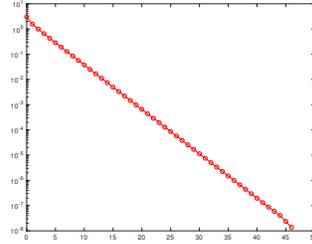


Figura 7: Errore assoluto  $|x_k - x^*|$  dove  $x_k$  è la  $k$ -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di  $f(x) = \sin(x) - x = 0$ , in scala semilogaritmica.

Da  $f'(x) = \exp(x) - 1$ , il metodo di Newton definisce la successione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\exp(x_k) - 2 + x_k}{\exp(x_k) - 1}$$

Osserviamo che il processo non è ben definito se  $\exp(x_k) + 1 = 0$ , ovvero  $x_k = 0$ . Essendo  $f'(x) = \exp(x) + 1 > 0$  lo zero è semplice.

Relazioniamo il test in tabella a quanto noto per la convergenza.

1.  $x^* = 0.4428544010023885 \dots$  è uno zero semplice;
2.  $f'(x) = \exp(x) + 1 > 0$ .
3.  $f''(x) = \exp(x) > 0$ .

Quindi

- $f$  è convessa,
- $f$  è strettamente crescente,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Di conseguenza, di sicuro esistono  $a$  e  $b$  nel dominio per cui  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Ad esempio, possiamo porre come nel caso di bisezione  $a = 0$ ,  $b = 1$  in quanto  $f(0) = -2$ ,  $f(1) = \exp(1) - 2 + 1 = 1.7182 \dots$

Il teorema di convergenza globale dice che partendo da  $x_0 = b = 1$  otterremo una successione

- decrescente,
- convergente a  $x^*$  e per il teorema di convergenza locale avrà convergenza quadratica, come si può verificare dal relativo grafico e dalla sua tabella.

**Esempio.** Si applichi il metodo di Newton per risolvere  $f(x) = x^2 - 2$ , la cui unica soluzione è  $x^* = 1.414213562373095 \dots$ , ovvero la radice quadrata di 2.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	1.0000000000000000e + 00	5.57e - 01	-	1.72e + 00
1	5.378828427399902e - 01	9.50e - 02	4.62e - 01	2.50e - 01
2	4.456167485265452e - 01	2.76e - 03	9.23e - 02	7.07e - 03
3	4.428567246451099e - 01	2.32e - 06	2.76e - 03	5.94e - 06
4	4.428544010040325e - 01	1.64e - 12	2.32e - 06	4.20e - 12
5	4.428544010023886e - 01	1.11e - 16	1.64e - 12	1.11e - 16

Tabella 7: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione  $x^* = 0$  di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$  è molto rapida ovvero  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Il test del residuo è molto accurato, mentre quello dello step individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente. Ad esempio, alla quinta iterata dice correttamente che l'errore alla quarta era  $1.64e - 12$ . Si osservi che la successione  $\{x_n\}$  è in effetti decrescente per  $n = 0, 1, \dots, 5$ .

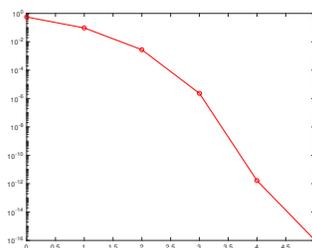


Figura 8: Errore assoluto  $|x_k - x^*|$  dove  $x_k$  è la  $k$ -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ , in scala semilogaritmica.

Visto che  $f'(x) = 2x$ , le iterazioni del metodo di Newton saranno

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

che saranno indefinite qualora per qualche  $k$  si abbia  $x_k = 0$ . Ovviamente  $f'(x^*) = 2\sqrt{2} \neq 0$  e quindi lo zero è semplice.

**Nota 4.11.** Osserviamo che il metodo calcola la radice di 2 utilizzando esclusivamente il prodotto  $x_k^2 = x_k \cdot x_k$ , la sottrazione e la divisione, ed era un metodo comune per calcolare più in generale, con semplici modifiche, le radici quadrate di numeri non negativi.

Dal punto di vista della convergenza

1. la funzione  $f(x) = x^2 - 2$  assume valori negativi per  $x \in [0, \sqrt{2})$ , e positivi per  $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ ,
  2. si ha che  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2 > 0$  per ogni  $x \in [0, +\infty)$ .
- Nell'esperimento, sapendo che  $\sqrt{2} \in (1, 2)$ , siamo partiti da  $x_0 = 2 > x^* = \sqrt{2}$ , con tolleranza  $\epsilon = 10^{-15}$ .

- In questo test le iterazioni si interrompono perché  $x_5 = \sqrt{2}$  e non perchè un criterio di arresto è verificato (si veda la terza colonna della tabella).
- Per il teorema di convergenza globale possiamo affermare che il metodo di Newton determina una successione  $\{x_k\}$  decrescente e convergente a  $x^*$ . Per il teorema di convergenza locale, la convergenza è quadratica.

Osserviamo che numericamente, per  $k = 1, 2, 3$ ,  $e_{k+1}/e_k^2 \approx 3.54e - 01$ , suggerendo una convergenza quadratica del metodo di Newton, applicato a questo esempio. Come visto, la successione è decrescente.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	2.0000000000000000e + 00	5.86e - 01	—	2.00e + 00
1	1.5000000000000000e + 00	8.58e - 02	5.00e - 01	2.50e - 01
2	1.4166666666666667e + 00	2.45e - 03	8.33e - 02	6.94e - 03
3	1.414215686274510e + 00	2.12e - 06	2.45e - 03	6.01e - 06
4	1.414213562374690e + 00	1.59e - 12	2.12e - 06	4.51e - 12
5	1.414213562373095e + 00	0.00e + 00	1.59e - 12	4.44e - 16

Tabella 8: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione  $x^* = \sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$  di  $f(x) = x^2 - 2 = 0$  è molto rapida ovvero  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Il test del residuo è molto accurato, mentre quello dello step individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente. Ad esempio, alla quinta iterata dice correttamente che l'errore alla quarta era  $1.59e - 12$ .

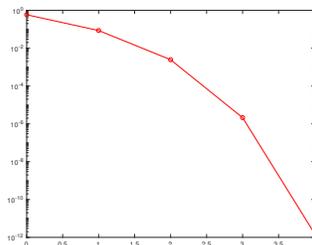


Figura 9: Errore assoluto  $|x_k - x^*|$  dove  $x_k$  è la  $k$ -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di  $f(x) = x^2 - 2 = 0$ , in scala semilogaritmica.

**Nota 4.12 (Calcolo radici  $n$ -sime).** Si osservi che più in generale per calcolare la radice  $n$ -sima di  $\alpha$  basta risolvere

$$f(x) = x^n - \alpha = 0$$

dove  $x^* \in I$ , con  $I$  dipendente da  $n$ . Ad esempio, se  $n$  è dispari si può supporre  $I = \mathbb{R}$ , mentre se  $n$  è pari  $I = [0, +\infty)$ .

In questo caso, visto che  $f'(x) = nx^{n-1}$  e quindi il metodo di Newton genera la successione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - \alpha}{nx_k^{n-1}} = \frac{n-1}{n}x_k + \frac{\alpha}{nx_k^{n-1}}.$$

In virtù del teorema di convergenza globale, per dedurre la convergenza basta scegliere  $x_0$  cosicchè  $x_0^n \geq \alpha$  e tale convergenza è quadratica per il teorema di convergenza locale.

**Facoltativo** Calcolare la divisione utilizzando esclusivamente somme, sottrazioni o moltiplicazioni.

Questo problema è sorto per effettuare la divisione con i primi calcolatori, che disponevano solo di somme, sottrazioni o moltiplicazioni.

Supponiamo di dover calcolare  $a/b = a \cdot \frac{1}{b}$ .

Quindi, visto che il processore era capace di calcolare moltiplicazioni, bastava calcolare  $1/b$  e moltiplicare il risultato ottenuto per  $a$ .

Dopo una complicata analisi sui numeri macchina normalizzati, si osserva che ci si può ricondurre al calcolare il reciproco di numeri in  $\alpha \in [1/2, 1)$  ovvero risolvere l'equazione

$$f(x) = \frac{1}{x} - \alpha = 0, \quad \alpha \in [1/2, 1).$$

Visto che  $f'(x) = -1/x^2$ , il metodo di Newton genera la successione

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - \alpha}{-\frac{1}{x_k^2}} \\ &= x_k + x_k^2 \left( \frac{1}{x_k} - \alpha \right) \\ &= 2x_k^2 - \alpha x_k^2 = (2 - \alpha \cdot x_k) \cdot x_k \end{aligned} \quad (3)$$

che può essere valutata solo con 1 sottrazione e due prodotti.

Di conseguenza, il metodo di Newton permette di calcolare la divisione di due numeri usando solo sottrazioni e moltiplicazioni.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	2.0000000000000000e + 00	8.24e - 01	-	-3.50e - 01
1	6.0000000000000001e - 01	5.76e - 01	1.40e + 00	8.17e - 01
2	8.9400000000000001e - 01	2.82e - 01	2.94e - 01	2.69e - 01
3	1.1086494000000000e + 00	6.78e - 02	2.15e - 01	5.20e - 02
4	1.172560831697694e + 00	3.91e - 03	6.39e - 02	2.83e - 03
5	1.176457594968538e + 00	1.30e - 05	3.90e - 03	9.39e - 06
6	1.176470588091793e + 00	1.44e - 10	1.30e - 05	1.04e - 10
7	1.176470588235294e + 00	0.00e + 00	1.44e - 10	0.00e + 00

Tabella 9: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione  $x^* = 1/0.85 \approx 1.176470588235294$  di  $f(x) = \frac{1}{x} - 0.85$ , partendo da  $x_0 = 2$  è molto rapida. Il test del residuo è molto accurato, mentre quello dello step individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente. Si osservi che il calcolo ha necessitato, viste le 7 iterazioni di 7 somme e 14 prodotti.

#### 4.4. Metodo delle secanti

Uno dei metodi più comunemente utilizzati per la risoluzione di equazioni nonlineari è quello delle secanti, che nel caso di sistemi di equazioni nonlineari porta (non banalmente) al molto noto metodo di Broyden (1965).

Se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, il metodo delle secanti definisce la successione (cf. [1, p.65])

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (4)$$

ottenuta dal metodo di Newton sostituendo  $f'(x_n)$  col rapporto incrementale

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Si nota subito che a differenza del metodo di Newton, quello delle secanti, ovvero

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (5)$$

richiede due punti iniziali  $x_0, x_1$  e non necessita ovviamente del calcolo della derivata  $f'$ .

Si dimostra che

**Teorema 4.13 (Jeeves, 1958).** *Se  $f \in C^2([a, b])$  con la radice  $\alpha \in [a, b]$  e  $f'(\alpha) \neq 0$  allora se  $x_0, x_1$  sono sufficientemente vicine ad  $\alpha$  le iterate del metodo delle secanti convergono ad  $\alpha$ , con ordine di convergenza pari alla sezione aurea, ovvero*

$$p = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \approx 1.62.$$

**Esempio.** L'intento di questa sezione è di vedere la performance del metodo delle secanti, per valutare gli zeri di

1.  $f(x) = \exp(x) - 1 + x = 0$ , con  $x_1 = 0, x_2 = 1$ ;
2.  $f(x) = \sin(x) - x = 0$ , con  $x_1 = -2, x_2 = 3$ ;
3.  $f(x) = x^2 - 2 = 0$ , con  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

**Nota 4.14 (Facoltativa).** *Un primitivo utilizzo del metodo delle secanti si trova in una tavoletta babilonese del 1800 A.C.. Noto anche come Regola della doppia falsa posizione, fu perfezionato da Cardano nel 1545, che lo utilizzò come metodo iterativo. Pare che il nome metodo delle secanti, sia stato proposto da Jeeves nel 1958, che per primo provò l'ordine di convergenza di tale metodo. Per ulteriori ragguagli storici si veda [8].*

Si vede che in linea di massima sono paragonabili a quelle del metodo di Newton, richiedendo però due dati iniziali, ma non la derivata di  $f$  che viene stimata tramite un rapporto incrementale.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	0.0000000000000000e + 00	4.43e - 01	-	-1.00e + 00
1	1.0000000000000000e + 00	5.57e - 01	1.00e + 00	1.72e + 00
2	3.678794411714423e - 01	7.50e - 02	6.32e - 01	-1.87e - 01
3	4.300563616528947e - 01	1.28e - 02	6.22e - 02	-3.26e - 02
4	4.431457539835317e - 01	2.91e - 04	1.31e - 02	7.45e - 04
5	4.428532661274237e - 01	1.13e - 06	2.92e - 04	-2.90e - 06
6	4.428544009017152e - 01	1.01e - 10	1.13e - 06	-2.57e - 10
7	4.428544010023887e - 01	1.67e - 16	1.01e - 10	1.67e - 16

Tabella 10: La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione  $x^* = 0.4428544010023887 \dots$  di  $f(x) = \exp(x) - 1 + x = 0$  è molto rapida, paragonabile in termini di iterazioni a quella del metodo di Newton. Quali dati iniziali abbiamo scelto  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ . Lo step fornisce buone stime a posteriori dell'errore compiuto all'iterazione precedente.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	-2.0000000000000000e + 00	2.00e + 00	-	1.09e + 00
1	3.0000000000000000e + 00	3.00e + 00	5.00e + 00	-2.86e + 00
2	-6.192179107632967e - 01	6.19e - 01	3.62e + 00	3.88e - 02
3	-5.707325299195892e - 01	5.71e - 01	4.85e - 02	3.05e - 02
4	-3.934167222042483e - 01	3.93e - 01	1.77e - 01	1.01e - 02
5	-3.059435414661084e - 01	3.06e - 01	8.75e - 02	4.75e - 03
6	-2.278322477580405e - 01	2.28e - 01	7.81e - 02	1.97e - 03
7	-1.726853342973921e - 01	1.73e - 01	5.51e - 02	8.57e - 04
8	-1.300690036608595e - 01	1.30e - 01	4.26e - 02	3.66e - 04
9	-9.823363631520615e - 02	9.82e - 02	3.18e - 02	1.58e - 04
10	-7.412520006397208e - 02	7.41e - 02	2.41e - 02	6.79e - 05
20	-4.453415286714068e - 03	4.45e - 03	1.45e - 03	1.47e - 08
30	-2.675831159495087e - 04	2.68e - 04	8.69e - 05	3.19e - 12
40	-1.607772401198045e - 05	1.61e - 05	5.22e - 06	6.93e - 16
50	-9.661064115820756e - 07	9.66e - 07	3.14e - 07	1.50e - 19
60	-5.537352656281193e - 08	5.54e - 08	2.06e - 08	2.65e - 23
65	-1.420660201192862e - 08	1.42e - 08	0.00e + 00	0.00e + 00

Tabella 11: La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione  $x^* = 0$  di  $f(x) = \sin(x) - x = 0$  è molto lenta, ed è causata dal fatto che la soluzione è multipla ovvero  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ .

#### 4.5. Metodo di punto fisso (o di Picard)

Consideriamo i problemi di punto fisso

$$x = \phi(x)$$

in cui supponiamo che  $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$  sia una funzione continua.

- Notiamo subito che ogni problema di tipo  $f(x) = 0$  si può riscrivere come  $x = \phi(x)$ , ad esempio ponendo  $\phi(x) = f(x) + x$ .
- Dal punto di vista geometrico, coincide col calcolare l'intersezione tra la bisettrice  $y = x$  con il grafico della curva  $y = \phi(x)$ .

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	1.0000000000000000e + 00	4.14e - 01	-	-1.00e + 00
1	2.0000000000000000e + 00	5.86e - 01	1.00e + 00	2.00e + 00
2	1.3333333333333333e + 00	8.09e - 02	6.67e - 01	-2.22e - 01
3	1.4000000000000000e + 00	1.42e - 02	6.67e - 02	-4.00e - 02
4	1.414634146341463e + 00	4.21e - 04	1.46e - 02	1.19e - 03
5	1.414211438474870e + 00	2.12e - 06	4.23e - 04	-6.01e - 06
6	1.414213562057320e + 00	3.16e - 10	2.12e - 06	-8.93e - 10
7	1.414213562373095e + 00	2.22e - 16	3.16e - 10	8.88e - 16

Tabella 12: La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione  $x^* = \sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$  di  $f(x) = x^2 - 2 = 0$  è molto rapida, paragonabile in termini di iterazioni a quella del metodo di Newton. Quali dati iniziali abbiamo scelto  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$ . Lo step fornisce buone stime a posteriori dell'errore compiuto all'iterazione precedente.

- Nel metodo di punto fisso, si definisce la successione

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

che si desidera convergere ad  $\alpha$  tale che  $\phi(\alpha) = \alpha$ . La funzione  $\phi$  è talvolta detta di iterazione perchè a partire da  $x_k$  determina  $x_{k+1}$ .

**Teorema 4.15 (Banach, [1, p.80]).** *Si assuma che*

1.  $\phi$  sia derivabile con continuità in  $[a, b]$ ,
2.  $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$
3. se  $x \in [a, b]$  allora

$$|\phi'(x)| \leq \theta < 1$$

con  $\theta$  indipendente da  $x$ .

Allora

1.  $x = \phi(x)$  ha un'unica soluzione  $\alpha$  in  $[a, b]$ ;
2. per qualsiasi  $x_0 \in [a, b]$ , posto  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  si ha  $x_n \rightarrow \alpha$ ;
3. posto  $e_n = |x_n - \alpha|$  si ha

$$\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\alpha)|$$

ovvero la convergenza è almeno lineare;

4. si ha

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} |x_1 - x_0|;$$

5. vale la stima a priori

$$|x_n - \alpha| \leq \theta^n |x_0 - \alpha|;$$

6. vale la stima a posteriori

$$|x_n - \alpha| = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - \phi'(\xi_n)} \leq \frac{1}{1 - \theta} |x_{n+1} - x_n|,$$

con  $x_n$  nel più piccolo intervallo aperto contenente  $x_n$  e  $\alpha$ .

Si osservi che questo teorema

- stabilisce l'esistenza e unicità della soluzione del problema di punto fisso,
- offre un metodo iterativo  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  per poterla approssimare, con convergenza almeno lineare (potrebbe essere  $\phi'(\alpha) = 0$  ed avere effettivamente ordine  $p > 1$ ),
- offre una maggiorazione dell'errore  $|\alpha - x_n|$  dipendentemente dalla distanza delle prime due iterazioni,
- suggerisce stime dell'errore compiuto; in particolare il punto 6. fa capire che per  $\theta \approx 1$  lo step può non essere un buon criterio di arresto, perchè in tal caso  $1/(1 - \theta)$  può essere così grande, che nonostante  $|x_{n+1} - x_n|$  sia piccolo, può accadere che  $|x_n - \alpha|$  sia grande.

**Traccia 4.16 (Primo e secondo punto del teorema).** *Esistenza di  $\alpha$ . Sia  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ . Allora visto che se  $x \in [a, b]$  allora  $\phi(x) \in [a, b]$ , e  $\phi(x_k) = \phi(x_{k-1}) + \phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ ,*

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x_{k+1} - x_k| = |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| = |\phi'(\xi_k)|x_k - x_{k-1}| \\ &\leq \theta|x_k - x_{k-1}| \leq \theta^2|x_{k-1} - x_{k-2}| \leq \dots \leq \theta^k|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

e quindi per il teorema del confronto,

$$|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$$

da cui la successione è di Cauchy e, visto che  $[a, b]$  è un insieme compatto di  $\mathbb{R}$ , allora  $x_k \rightarrow \alpha$ . Dal fatto che  $\phi \in C([a, b])$ ,

$$\alpha = \lim_k x_{k+1} = \lim_k \phi(x_k) = \phi(\lim_k x_k) = \phi(\alpha)$$

e quindi esiste un punto fisso  $\alpha$ .

**Traccia 4.17 (Primo e secondo punto del teorema).** *Unicità di  $\alpha$ . Mostriamo che se esiste il punto fisso, allora è unico. Supponiamo che esistano due punti distinti  $\alpha, \beta \in [a, b]$  che siano punti fissi, e quindi*

$$\alpha = \phi(\alpha), \quad \beta = \phi(\beta).$$

Allora, dalla formula di Taylor, esiste  $\xi \in (a, b)$  tale che

$$|\alpha - \beta| = |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| = |\phi'(\xi)(\alpha - \beta)| \leq \theta|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$$

il che è assurdo.

**Nota 4.18.** *Nella parte dell'esistenza, abbiamo mostrato che esiste il punto fisso  $\alpha$  e che  $x_k \rightarrow \alpha$ . Poi abbiamo mostrato che  $\alpha$  è unico. Di conseguenza, se  $x_0 \in [a, b]$  allora la successione  $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$  converge all'unico punto fisso  $\alpha \in [a, b]$ .*

**Traccia 4.19 (Terzo punto del teorema).** Abbiamo mostrato che se  $x_0 \in [a, b]$  e  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  allora  $e_k := |x_k - \alpha| \rightarrow 0$ , con  $\alpha = \phi(\alpha)$ . Dalla formula di Taylor, esiste  $\xi_k$  nel più piccolo intervallo aperto contenente  $x_k$  e  $x_{k+1}$  tale che

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= |x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)| \\ &= |\phi'(\xi_k)||x_k - \alpha| = |\phi'(\xi_k)|e_k \end{aligned} \quad (6)$$

e siccome  $x_k \rightarrow \alpha$  e  $x_{k+1} \rightarrow \alpha$  necessariamente, per confronto,  $\xi_k \rightarrow \alpha$ . Di conseguenza, o esiste  $N$  tale che se  $k \geq N$  allora  $e_k = 0$  oppure, dalla continuità di  $\phi'$  in  $[a, b]$

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} = \phi'(\xi_k)$$

da cui

$$\lim_k \frac{e_{k+1}}{e_k} = \lim_k \phi'(\xi_k) = \phi'(\lim_k \xi_k) = \phi'(\alpha),$$

ovvero la convergenza è almeno lineare.

Per semplificare l'applicazione del precedente teorema (cf. [1, p.81])

**Teorema 4.20 (Convergenza locale).** Si assuma che

1.  $\alpha$  sia la soluzione di  $x = \phi(x)$
2.  $\phi$  sia derivabile con continuità in un intervallo centrato in  $\alpha$ ,
3.  $|\phi'(\alpha)| < 1$ .

Allora esiste un intorno  $I$  di  $\alpha$  per cui

1.  $x = \phi(x)$  ha un'unica soluzione  $\alpha$  in  $I$ ;
2. per qualsiasi scelta di  $x_0 \in I$ , posto

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

la successione converge ad  $\alpha$  almeno linearmente;

3. posto  $e_n = |x_n - \alpha|$  si ha  $\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\alpha)|$  (convergenza almeno lineare).

Vale il seguente teorema, molto utile per determinare l'ordine di convergenza di un metodo di punto fisso (cf. [1, p.82]).

**Teorema 4.21 (Ordine di convergenza del punto fisso).** Si supponga che partendo da un certo  $x_0 \in [a, b]$ , la successione  $\{x_k\}$  sia tale che  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ . Inoltre che

1.  $\phi \in C^p([a, b])$ ,
2.  $\phi(\alpha) = \alpha$ ,
3.  $\phi^{(j)}(\alpha) = 0$ , per  $j = 0, \dots, p-1$  e  $\phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$ ,
4. se  $p = 1$  allora  $|\phi'(\alpha)| < 1$ .

Se il punto iniziale  $x_0$  è sufficientemente vicino ad  $\alpha$ , allora  $x_k \rightarrow \alpha$  e l'ordine di convergenza del metodo è uguale a  $p$ , essendo

$$\lim \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!}.$$

**Dimostrazione 4.22 (Facoltativa).** Osserviamo che se

- $p = 1$  abbiamo per ipotesi  $|\phi(\alpha)| < 1$ ,
- $p > 1$  allora  $|\phi^{(1)}(\alpha)| = 0 < 1$ ,

e quindi  $x_k \rightarrow \alpha$  (per il teorema di convergenza locale del metodo di punto fisso).

Per un certo  $\xi_k \in \mathcal{I}(\alpha, x_k)$ , ovvero nel più piccolo intervallo aperto contenente  $\alpha$  e  $x_k$ , abbiamo dalla formula di Taylor

$$\begin{aligned} x_{k+1} = \phi(x_k) &= \phi(\alpha) + \sum_{j=1}^{p-1} \phi^{(j)}(\alpha) \frac{(x_k - \alpha)^j}{j!} + \phi^{(p)}(\xi_k) \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!} \\ &= \alpha + \phi^{(p)}(\xi_k) \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!}. \end{aligned}$$

Essendo

$$x_{k+1} = \alpha + \phi^{(p)}(\xi_k) \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!}$$

sottraendo  $\alpha$  ad ambo i membri, posto  $e_k = |x_k - \alpha|$ ,

$$x_{k+1} - \alpha = \phi^{(p)}(\xi_k) \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!} \Rightarrow e_{k+1} = |\phi^{(p)}(\xi_k)| \frac{e_k^p}{p!} \quad (7)$$

da cui

- per qualche  $k^*$  si ha  $e_{k^*} = 0$  e quindi da (7) è  $e_k = 0$  per  $k \geq k^*$ , o
- è ben definita per ogni  $k \in \mathbb{N}$  la frazione  $\frac{e_{k+1}}{e_k^p}$  ed è

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\phi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} = \frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq 0$$

cioè l'ordine di convergenza è uguale a  $p$ .

L'ultimo passaggio

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\phi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} = \frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq 0$$

necessita una spiegazione.

Sappiamo che  $\xi_k \in \mathcal{I}(x_k, \alpha)$ , ovvero al più piccolo intervallo aperto contenente  $x_k$  e  $\alpha$  e poichè  $x_k \rightarrow \alpha$ , per il teorema del confronto,  $\xi_k \rightarrow \alpha$ .

Quindi, essendo  $\phi \in C^p([a, b])$ , ricaviamo  $\phi^{(p)}(\xi_k) \rightarrow \phi^{(p)}(\alpha)$  e visto che il valore assoluto è una funzione continua, pure

$$|\phi^{(p)}(\xi_k)| \rightarrow |\phi^{(p)}(\alpha)|.$$

**Esempio.** Il metodo di Newton è un particolare metodo di punto fisso.

Infatti per

$$\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

abbiamo

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Supponiamo

1.  $x^*$  sia uno zero semplice di  $f(x) = 0$  tale che  $f''(x^*) \neq 0$ ,
2.  $x_n \rightarrow x^*$ ,
3.  $f : ([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  sia sufficientemente differenziabile con continuità.

Dopo qualche calcolo,

$$\phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

e

$$\phi''(x) = \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} + \frac{f(x)f^{(3)}(x)}{(f^{(1)}(x))^2} - \frac{2f(x)(f^{(2)}(x))^2}{(f^{(1)}(x))^3}.$$

Visto che  $f'(x^*) \neq 0$ , ma  $f(x^*) = 0$

$$\phi'(x^*) = \frac{f(x)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0$$

e se supponiamo  $f''(x^*) \neq 0$ , allora essendo  $f(x^*) = 0$ ,

$$\phi''(x^*) = \frac{f^{(2)}(x^*)}{f^{(1)}(x^*)} + \frac{f(x^*)f^{(3)}(x^*)}{(f^{(1)}(x^*))^2} - \frac{2f(x^*)(f^{(2)}(x^*))^2}{(f^{(1)}(x^*))^3} \neq 0$$

da cui deduciamo che il metodo di Newton ha convergenza locale quadratica.

**Nota 4.23.** *I teoremi precedenti comportano, sotto opportune ipotesi, che se la radice è multipla allora la convergenza è almeno lineare.*

**Nota 4.24.** *Il metodo delle secanti, a differenza del metodo di Newton, non determina una successione del tipo  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  perchè ogni iterazione dipende da 2 iterate precedenti (e non una sola!).*

**Facoltativo** Si calcoli lo zero di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$  mediante un metodo di punto fisso.

Ricordiamo che esiste una sola soluzione in  $[0, 1]$ , visto che  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = \exp(1) - 2 + 1 > 0$  e si può applicare il teorema degli zeri di una funzione continua. Avevamo visto che la unica soluzione è  $x^* = 0.4428544010023887 \dots$

La prima idea è di studiare il problema

$$x = \phi(x) := 2 - \exp(x)$$

ma purtroppo, essendo  $\phi'(x) = -\exp(x)$  e  $x^* \in (0, 1)$ , abbiamo  $|\phi'(\alpha)| = |-\exp(\alpha)| > 1$  e i teoremi di punto fisso sopra indicati non possono essere utilizzati.

Osserviamo che  $\exp(x) - 2 + x = 0$  se e solo se  $\exp(x) = 2 - x$  ovvero applicando il logaritmo ad ambo i membri  $x = \ln(2 - x)$  che è un'equazione in forma di punto fisso.

La funzione  $\phi(x) = \ln(2 - x)$  ha derivata

$$\phi'(x) = \frac{1}{2 - x}$$

che è una funzione strettamente crescente, ed essendo  $\phi'(0) = 1/2$ ,  $\phi'(1) = 1$ , visto che il punto fisso  $\alpha = x^* \in (0, 1)$ , sicuramente è tale che

$$1/2 < \phi'(\alpha) = \frac{1}{2 - \alpha} < 1.$$

e quindi

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Di conseguenza il metodo di punto fisso converge alla soluzione almeno localmente.

Testiamo numericamente la convergenza se scegliamo

- $x_0 = 0$  oppure
- $x_0 = 1$ .

In entrambi i casi il metodo converge linearmente, come si può evincere dai grafici dell'errore in scala semilogaritmica.

Confrontando con il numero di iterazioni

- del metodo di Newton o
- delle secanti

per raggiungere la stessa precisione si capisce che nonostante il basso costo di ogni iterazione, il metodo di punto fisso utilizzato non sia in questo caso da suggerire.

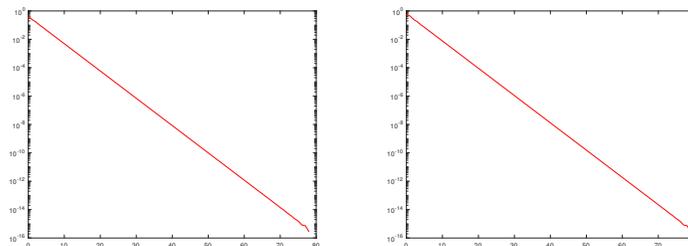


Figura 10: Convergenza lineare delle approssimazioni di punto fisso, partendo da  $x_0 = 0$  (a sinistra) e  $x_0 = 1$  (a destra).

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $
0	0.0000000000000000e + 00	4.43e - 01	-
1	6.931471805599453e - 01	2.50e - 01	6.93e - 01
2	2.676218188444345e - 01	1.75e - 01	4.26e - 01
3	5.494951357024610e - 01	1.07e - 01	2.82e - 01
4	3.719116781052663e - 01	7.09e - 02	1.78e - 01
5	4.874065178868661e - 01	4.46e - 02	1.15e - 01
6	4.138257153687164e - 01	2.90e - 02	7.36e - 02
7	4.613250066022943e - 01	1.85e - 02	4.75e - 02
8	4.309216521766674e - 01	1.19e - 02	3.04e - 02
9	4.504884073820321e - 01	7.63e - 03	1.96e - 02
10	4.379397797394399e - 01	4.91e - 03	1.25e - 02
20	4.427958160235598e - 01	5.86e - 05	1.50e - 04
30	4.428537019831390e - 01	6.99e - 07	1.79e - 06
40	4.428543926617972e - 01	8.34e - 09	2.13e - 08
50	4.428544009028699e - 01	9.95e - 11	2.54e - 10
60	4.428544010012012e - 01	1.19e - 12	3.04e - 12
70	4.428544010023746e - 01	1.39e - 14	3.60e - 14
78	4.428544010023882e - 01	2.78e - 16	9.99e - 16

Tabella 13: Lenta convergenza del metodo di punto fisso alla soluzione  $x^* \approx 0.4428544010023885$  di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ .

#### 4.6. Il metodo di Halley (facoltativo)

Il metodo di Halley [14] approssima uno zero  $x^*$  dell'equazione  $f(x) = 0$  con la sequenza di iterazioni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

a partire da un punto iniziale  $x_0$ . Ovviamente, si richiede l'esistenza della derivata seconda.

Se  $f$  è differenziabile tre volte con continuità e  $x^*$  non è uno zero delle sue derivate, allora si può dimostrare (non immediato!) che in un certo intorno di  $x^*$  le iterate  $x_n$  soddisfano

$$|x_{n+1} - x^*| \leq K \cdot |x_n - x^*|^3, \text{ per qualche } K > 0.$$

cioè con convergenza almeno cubica.

Quale esercizio si

1. approssimi col metodo di Halley lo zero di

$$f_2(x) := x - 6.28 - \sin(x),$$

partendo da  $x_0 = 4$ ;

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $
0	1.0000000000000000e + 00	5.57e - 01	-
1	0.0000000000000000e + 00	4.43e - 01	1.00e + 00
2	6.931471805599453e - 01	2.50e - 01	6.93e - 01
3	2.676218188444345e - 01	1.75e - 01	4.26e - 01
4	5.494951357024610e - 01	1.07e - 01	2.82e - 01
5	3.719116781052663e - 01	7.09e - 02	1.78e - 01
6	4.874065178868661e - 01	4.46e - 02	1.15e - 01
7	4.138257153687164e - 01	2.90e - 02	7.36e - 02
8	4.613250066022943e - 01	1.85e - 02	4.75e - 02
9	4.309216521766674e - 01	1.19e - 02	3.04e - 02
10	4.504884073820321e - 01	7.63e - 03	1.96e - 02
20	4.429456236721741e - 01	9.12e - 05	2.33e - 04
30	4.428554894767561e - 01	1.09e - 06	2.78e - 06
40	4.428544139899038e - 01	1.30e - 08	3.32e - 08
50	4.428544011573536e - 01	1.55e - 10	3.96e - 10
60	4.428544010042376e - 01	1.85e - 12	4.73e - 12
70	4.428544010024106e - 01	2.21e - 14	5.63e - 14
79	4.428544010023882e - 01	2.78e - 16	9.99e - 16

Tabella 14: Convergenza del metodo di punto fisso alla soluzione  $x^* \approx 0.4428544010023885$  di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ .

2. approssimi col metodo di Halley la radice quadrata di 2 partendo da  $x_0 = 1$ ;
3. approssimi col metodo di Halley la radice cubica di 2 partendo da  $x_0 = 1$ .

interrompendo il processo quando lo step  $|x_{n+1} - x_n|$  è inferiore di  $10^{-14}$ . Si paragoni quindi il metodo di Halley con quello di Newton, sugli stessi problemi: quale dei due sembra convergere più velocemente?

### Bibliografia

- [1] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
- [2] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, (1990).
- [3] J.E. Dennis, Jr. e R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, (1996).
- [4] C.T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM Frontiers in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, (1995).
- [5] A. Quarteroni, F. Saleri *Introduzione al Calcolo Scientifico*, Springer, (2002).
- [6] Mac Tutor (Newton),  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html>.

- [7] Mac Tutor (Raphson),  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Raphson.html>. Origin and Evolution of the Secant Method in One Dimension
- [8] J-M. Papanikolaou, R- A. Tapia, Origin and Evolution of the Secant Method in One Dimension, The American Mathematical Monthly, Vol. 120, No. 6 (June/July 2013), pp. 500-518.
- [9] G. Rodriguez, *Algoritmi Numerici*, Pitagora Editrice, (2008).
- [10] L.N. Trefethen, Numerical Analysis, Branches of Mathematics.
- [11] Wikipedia (Calcolo dello zero di una funzione),  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Calcolo\\_dello\\_zero\\_di\\_una\\_funzione](http://it.wikipedia.org/wiki/Calcolo_dello_zero_di_una_funzione).
- [12] Wikipedia (Metodo della bisezione),  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_della\\_bisezione](http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_della_bisezione).
- [13] Wikipedia (Metodo delle tangenti),  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_delle\\_tangenti](http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_delle_tangenti).
- [14] Wikipedia (Halley's method),  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_method).
- [15] Wikipedia (Newton's method),  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method).
- [16] Wikipedia (Teorema di Abel-Ruffini),  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_di\\_Abel-Ruffini](https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Abel-Ruffini).
- [17] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications: Part 1: Fixed-Point theorems*, Springer, (1998).