Estrapolazione

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

31 dicembre 2018

Estrapolazione

Problema. (Estrapolazione)

*Il metodo di estrapolazione (di Richardson) è una procedura molto generale basata sul calcolo di diverse stime, in funzione di un parametro $h > 0$, di una quantità incognita α, da combinare opportunamente allo scopo di fornire un valore più accurato di α stessa [**?**, p.347].*

Estrapolazione

Data una formula di approssimazione $\phi_0(h)$ di una quantità α, con la struttura

$$\phi_0(h) = \alpha + ch^p + O(h^q),\ \ q > p \geq 1$$

dove c è una costante indipendente da h, necessariamente

$$\phi_0\left(\frac{h}{2}\right) = \alpha + c\left(\frac{h^p}{2^p}\right) + O(h^{pq}). \tag{1}$$

da cui moltiplicando (1) per 2^p, visto che dalla teoria degli infinitesimi $2^p O(h^{pq})) + O(h^q) = O(h^q)$ in quanto $pq > q$, ricaviamo

$$\begin{aligned}\phi_0(h) - 2^p\phi_0(h/2) &= (\alpha + ch^p + O(h^q)) - 2^p(\alpha + c\left(\frac{h^p}{2^p}\right) + O(h^{pq})) \\ &= (1-2^p)\alpha + O(h^q)\end{aligned}$$

ovvero, visto che $O(h^q)/(1-2^p) = O(h^q)$,

$$\phi_1(h) = \frac{\phi_0(h) - 2^p\phi_0(h/2)}{1-2^p} = \alpha + O(h^q).$$

Estrapolazione

In definitiva, abbiamo ottenuto una nuova approssimazione di α, il cui errore non è più dell'ordine di p, ma di $q > p$ e quindi potenzialmente migliore. Ciò significa che se consideriamo ad esempio la successione di passi $h_0, h_0/2, h_0/4, \ldots, h_0/2^k, \ldots$, allora la successione $\{\phi_1(h_0/2^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad α più rapidamente di quanto non faccia $\{\phi_0(h_0/2^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$.
Il procedimento può essere iterato per

$$\phi_0(h) = \alpha + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \ldots + c_m h^m + O(h^{p_{m+1}})$$

con $1 \leq p_1 < p_2 \ldots < p_m < p_{m+1}$.

Estrapolazione

A tal proposito, poniamo

$$\phi_0(h) = \phi_0(h)$$

e

$$\phi_1(h) = \frac{2^{p_1}\phi_0(h/2) - \phi_0(h)}{2^{p_1} - 1}.$$

Con qualche conto un po' tedioso, si ottiene

$$\phi_1(h) = \alpha + \sum_{k=2}^{m} c_k \left(1 - \frac{2^{p_1}}{2^{p_k}}\right) h^{p_k} + O(h^{p_{m+1}}).$$

Posto $c_k^{(1)} = c_k(1 - \frac{2^{p_1}}{2^{p_k}})$, abbiamo

$$\phi_1(h) = \alpha + c_2^{(1)} h^{p_2} + c_3^{(1)} h^{p_3} + \ldots + c_m^{(1)} h^m + O(h^{p_{m+1}})$$

su cui possiamo reiterare il processo, ottenendo

$$\phi_i(h) = \frac{2^{p_i}\phi_{i-1}(h/2) - \phi_{i-1}(h)}{2^{p_i} - 1}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Estrapolazione

Usualmente si tabula il procedimento, come si puo vedere nella seguente tabella.

$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=\ldots$	$i=m$
$\phi_0(h_0)$				
$\phi_0(h_0/2)$	$\phi_1(h_0)$			
$\phi_0(h_0/4)$	$\phi_1(h_0/2)$	$\phi_2(h_0/2^{m-2})$		
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\phi_0(h_0/2^m)$	$\phi_1(h_0/2^{m-1})$	$\phi_2(h_0/2^{m-2})$	$\ldots$	$\phi_m(h_0)$

Tabella: Esempio di tabella di estrapolazione.

Alcuni esempi

Mostriamo di seguito alcuni esempi in cui si ha la struttura

$$\phi_0(h) = \alpha + ch^p + O(h^q),\ \ q > p \geq 1.$$

Per il teorema di Eulero-Mac Laurin,

1. se $f \in C^{(4)}([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$,
2. $T(f, h)$ è la formula dei trapezi composta, avente passo $h = (b-a)/m$, $m \in \{1, 2, \ldots\}$, ovvero

$$T(f, h) = \frac{h}{2}(f(a) + 2f(a+h) + \ldots + 2f(b-h) + f(b))$$

abbiamo

$$T(f, h) = \int_a^b f(x)dx + \frac{h^2(f'(b) - f'(a))}{12} + O(h^4)$$

Quindi, $T(f, h) = \alpha + ch^p + O(h^q)$ per $\alpha = \int_a^b f(x)dx$, $c = \frac{(f'(b)-f'(a))}{12}$, $p = 2$, $q = 4$.

Alcuni esempi

Il metodo di estrapolazione legato alla formula dei trapezi è detto di Romberg (pubblicato nel 1955).
Di seguito, mostriamo alcune tabelle che mostrano tale metodo per calcolare

1. $\int_{-1}^{1} \exp(x) dx = \exp(1) - \exp(-1)$,
2. $\int_{-1}^{1} \cos(x) dx = \sin(1) - \sin(-1)$,
3. $\int_{0}^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cos(x) dx = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}$.

In ognuna di esse, la prima colonna è il passo utilizzato, la seconda colonna è quella della formula dei trapezi con passo h_k, in cui si valutano vari $\phi_0(h_k)$, le colonne successive sono gli errori di $|\phi_j(h_k) - I|$ dove I è l'integrale da approssimare. Nei casi in questione è evidente il miglioramento dei risultati ottenuto nell'ultima colonna.

Alcuni esempi

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$2.0e+00$	$7.4e-01$					
$1.0e+00$	$1.9e-01$	$1.2e-02$				
$5.0e-01$	$4.9e-02$	$7.9e-04$	$6.9e-05$			
$2.5e-01$	$1.2e-02$	$5.1e-05$	$1.2e-06$	$1.1e-07$		
$1.2e-01$	$3.1e-03$	$3.2e-06$	$1.9e-08$	$4.6e-10$	$4.2e-11$	
$6.2e-02$	$7.7e-04$	$2.0e-07$	$3.0e-10$	$1.8e-12$	$4.5e-14$	$4.0e-15$

Tabella: Errori nel calcolo dell'integrale $\int_{-1}^{1} \exp(x)dx = \exp(1) - \exp(-1)$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo $2, 1, 1/2, \ldots, 1/16$, e successiva estrapolazione.

Alcuni esempi

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$2.0e+00$	$6.0e-01$					
$1.0e+00$	$1.4e-01$	$1.1e-02$				
$5.0e-01$	$3.5e-02$	$6.0e-04$	$6.4e-05$			
$2.5e-01$	$8.8e-03$	$3.7e-05$	$9.0e-07$	$1.0e-07$		
$1.2e-01$	$2.2e-03$	$2.3e-06$	$1.4e-08$	$3.5e-10$	$3.9e-11$	
$6.2e-02$	$5.5e-04$	$1.4e-07$	$2.1e-10$	$1.3e-12$	$3.5e-14$	$3.1e-15$

Tabella: Errori nel calcolo dell'integrale $\int_{-1}^{1} \cos(x)dx = \sin(1) - \sin(-1)$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo $2, 1, 1/2, \ldots, 1/16$, e successiva estrapolazione.

Alcuni esempi

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$1.6e+00$	$1.3e+00$					
$7.9e-01$	$3.1e-01$	$2.4e-03$				
$3.9e-01$	$7.8e-02$	$2.4e-04$	$9.9e-05$			
$2.0e-01$	$1.9e-02$	$1.6e-05$	$1.3e-06$	$2.6e-07$		
$9.8e-02$	$4.9e-03$	$1.0e-06$	$1.9e-08$	$9.1e-10$	$1.2e-10$	
$4.9e-02$	$1.2e-03$	$6.6e-08$	$3.0e-10$	$3.5e-12$	$1.1e-13$	$1.2e-14$

Tabella: Errori nel calcolo dell'integrale $\int_0^{\pi/2}(x^2+x+1)\cos(x)dx = -2+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}$, mediante la formula dei trapezi composta, con passo $2, 1, 1/2, \ldots, 1/16$, e successiva estrapolazione.

Alcuni esempi

Sviluppando il rapporto incrementale δ_+ dopo qualche conto simile a quelli già fatti, ma troncando la formula di Taylor rispettivamente al terzo e quinto ordine, abbiamo per $f \in C^3([a,b])$, $x, x+h \in [a,b]$,

$$f(x+h) = f(x) + f^{(1)}(x)h + f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(\xi)\frac{h^3}{6}, \;\; \xi \in (x, x+h)$$

e riarrangiando i termini, visto che $f \in C^3([a,b])$,

$$\delta_+(f,x,h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f^{(1)}(x)+hf^{(2)}(x)+O(h^2), \;\; \xi_x \in (x, x+h).$$

Quindi, $\delta_+(f,x,h) = \alpha + ch^p + O(h^q)$ per $\alpha = f'(x)$, $c = 1$, $p = 1$, $q = 2$.

Alcuni esempi

Di seguito, mostriamo alcune tabelle che mostrano tale metodo per calcolare

1. $D \exp(x)$ in $x = 0$,
2. $D \frac{1}{1+x^2}$ in $x = 5$,
3. $D \sin(x)$ in $x = \pi/4$.

In ognuna di esse, la prima colonna è il passo utilizzato, la seconda colonna è quella della formula δ_+ con passo h_k, in cui si valutano vari $\phi_0(h_k)$, le colonne successive sono gli errori di $|\phi_j(h_k) - I|$ dove I è l'integrale da approssimare. Nei casi in questione è evidente il miglioramento dei risultati ottenuto nell'ultima colonna.

Alcuni esempi

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$1.0e-02$	$5.0e-03$					
$5.0e-03$	$2.5e-03$	$8.4e-06$				
$2.5e-03$	$1.3e-03$	$2.1e-06$	$5.2e-09$			
$1.3e-03$	$6.3e-04$	$5.2e-07$	$6.5e-10$	$1.3e-12$		
$6.3e-04$	$3.1e-04$	$1.3e-07$	$8.1e-11$	$5.6e-13$	$5.1e-13$	
$3.1e-04$	$1.6e-04$	$3.3e-08$	$1.0e-11$	$1.1e-13$	$1.5e-13$	$1.7e-13$

Tabella: Errori nel calcolo della derivata di $\exp(x)$ in $x=0$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/100, 1/200, 1/400, \ldots, 1/3200$, e successiva estrapolazione.

Alcuni esempi

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$1.0e-02$	$4.2e-05$					
$5.0e-03$	$2.1e-05$	$5.2e-08$				
$2.5e-03$	$1.1e-05$	$1.3e-08$	$3.0e-11$			
$1.3e-03$	$5.3e-06$	$3.3e-09$	$3.8e-12$	$1.3e-14$		
$6.3e-04$	$2.6e-06$	$8.2e-10$	$4.5e-13$	$2.8e-14$	$3.1e-14$	
$3.1e-04$	$1.3e-06$	$2.1e-10$	$6.5e-14$	$1.1e-14$	$1.3e-14$	$1.5e-14$

Tabella: Errori nel calcolo della derivata di $1/(1+x^2)$ in $x=5$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/100, 1/200, 1/400, \ldots, 1/3200$, e successiva estrapolazione.

Alcuni esempi

h	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$1.0e-02$	$3.5e-03$				
$5.0e-03$	$1.8e-03$	$5.9e-06$			
$2.5e-03$	$8.8e-04$	$1.5e-06$	$3.7e-09$		
$1.3e-03$	$4.4e-04$	$3.7e-07$	$4.6e-10$	$9.3e-13$	
$6.3e-04$	$2.2e-04$	$9.2e-08$	$5.8e-11$	$6.6e-15$	$5.5e-14$

Tabella: Errori nel calcolo della derivata di $\sin(x)$ in $x=\pi/4$, mediante il rapporto incrementale, con passo $1/100, 1/200, 1/400, \ldots, 1/1600$, e successiva estrapolazione.