

# Interpolazione polinomiale

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

27 marzo 2019

# Interpolazione polinomiale

## Problema. (Interpolazione polinomiale)

Siano dati  $n + 1$  punti  $x_0, \dots, x_n$  a due a due distinti e i valori  $y_0, \dots, y_n$  (assunti ad esempio da una funzione  $y = f(x)$ ).

Il problema dell'interpolazione polinomiale (cf. [1, p.131], [6, p.289]) consiste nel calcolare il polinomio  $p_n$  di grado  $n$  tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

## Esempio.

Dati 2 punti distinti  $x_0, x_1$  e i valori  $y_0, y_1$ , determinare il polinomio  $p_1$  di grado 1 tale che

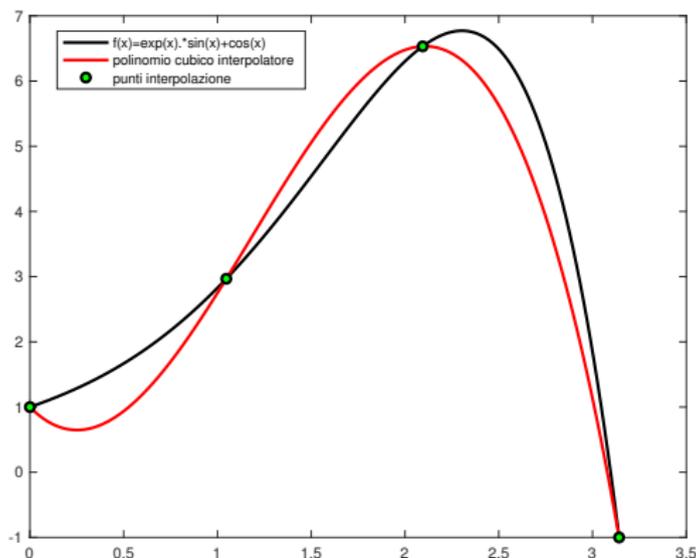
$$p_1(x_0) = y_0, \quad p_1(x_1) = y_1 \quad (2)$$

ovvero la retta che passa per le coppie  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ .

In questa sezione mostreremo che questo polinomio interpolatore  $p_n$  esiste ed è **unico e come calcolarlo**.

Di seguito denoteremo con  $\mathbb{P}_n$  l'insieme dei polinomi il cui grado è al più  $n$ .

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore



**Figura:** Esempio di interpolazione della funzione  $f(x) = \exp(x) \sin(x) + \cos(x)$  mediante un polinomio di grado 3 in 4 punti equispaziati di  $[0, \pi]$ .

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

## Teorema (Unicità del polinomio interpolatore)

*Dati  $n + 1$  punti distinti  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e i valori  $y_0, y_1, \dots, y_n$  il polinomio  $p_n$  di grado al più  $n$  tale che*

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

*è al più unico.*

## Dimostrazione.

*La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che esistano due polinomi distinti  $p_n$  e  $q_n$  di grado al più  $n$  tali che*

$$p_n(x_i) = y_i, \quad q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

*Allora*

$$(p_n - q_n)(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

*e quindi  $(p_n - q_n)(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$  è un polinomio di grado  $n + 1$ , il che è assurdo, visto che la differenza di due polinomi di grado  $n$  è un polinomio di grado  $n$ .*

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

Per studiare l'esistenza del polinomio interpolatore, Lagrange (cf. [9]) osservò che il polinomio di grado  $n$

$$L_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (3)$$

è tale che  $L_k(x_j) = \delta_{kj}$  dove  $\delta_{kj}$  è l'operatore di Kronecker, il cui valore è 1 se  $k = j$  e 0 altrimenti.

## Teorema (Unicità del polinomio interpolatore)

*Dati  $n + 1$  punti distinti  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e i valori  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , il polinomio di grado al più  $n$*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x). \quad (4)$$

*è tale che*

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

## Dimostrazione.

Poichè  $L_k$  è un polinomio di grado al più  $n$ , lo è certamente lo stesso moltiplicato per lo scalare  $y_k$  e la somma di polinomi di grado al più  $n$ . Quindi sicuramente  $p_n \in \mathbb{P}_n$ .

Inoltre  $p_n$  interpola i dati visto che

$$p_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k \delta_{k,j} = y_j, \quad j = 0, \dots, n. \quad (5)$$

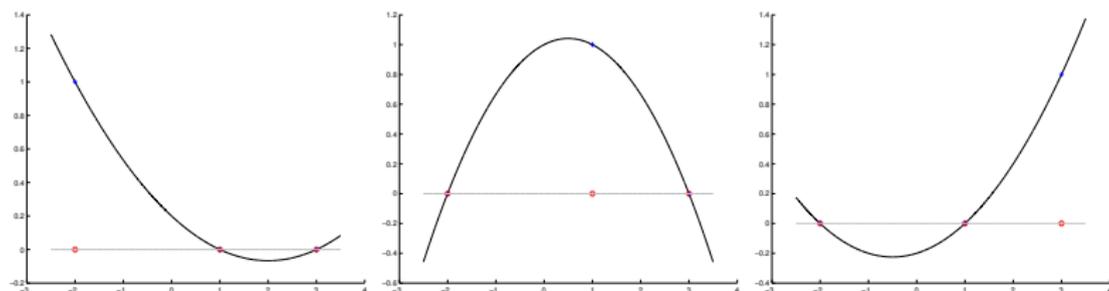
Quindi  $p_n$  è un polinomio interpolatore.

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

## Nota.

- 1 Il teorema precedente è **costruttivo**, non solo permette di stabilire l'esistenza del polinomio interpolatore, ma ne evidenzia un metodo di calcolo.
- 2 Si osservi inoltre come ogni termine della sommatoria  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$  **separa (in qualche senso) il contributo** delle ordinate  $y_k$  da quello dei polinomi di Lagrange  $L_k$  essenzialmente dipendenti dai punti  $\{x_j\}_{j=0,\dots,n}$  (si rifletta bene su questa affermazione).
- 3 Esistono **altre dimostrazioni** dell'esistenza e unicità del polinomio interpolatore. Ad esempio, ciò è equivalente a mostrare che il sistema lineare  $Va = y$  dove  $V = (v_{i,j}) = (x_i^j)$ ,  $0 \leq i, j \leq n$  è detta matrice di Vandermonde [13] dei nodi di interpolazione,  $a = (a_0, \dots, a_n)^T$ ,  $y = (y_0, \dots, y_n)^T$ , ha una e una sola soluzione, ovvero che il  $\det(V) \neq 0$ .

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore



**Figura:** I polinomi di Lagrange  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  relativi ai punti  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ .

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

## Esempio.

Calcolare il polinomio di grado 2 che assume nei nodi  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$  rispettivamente i valori  $f_0 = -2$ ,  $f_1 = 11$ ,  $f_2 = 17$ .

Come si vede dalla definizione,

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(-2 - 1)(-2 - 3)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{15} \\L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-2))(x - 3)}{(1 - (-2))(1 - 3)} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{-6} \\L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - (-2))(x - 1)}{(3 - (-2))(3 - 1)} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{10}\end{aligned}$$

I polinomi  $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{P}_2$  (e quindi tali le loro combinazioni lineari), e

$$L_0(x_0) = L_0(-2) = 1, L_0(x_1) = L_0(1) = 0, L_0(x_2) = L_0(3) = 0$$

$$L_1(x_1) = L_1(1) = 1, L_1(x_0) = L_1(-2) = 0, L_1(x_2) = L_1(3) = 0$$

$$L_2(x_2) = L_2(3) = 1, L_2(x_0) = L_2(-2) = 0, L_2(x_1) = L_2(1) = 0$$

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

Inoltre il polinomio interpolatore risulta

$$p_2(x) = -2 L_0(x) + 11 L_1(x) + 17 L_2(x)$$

è tale che

$$p(x_0) = -2 L_0(x_0) + 11 L_1(x_0) + 17 L_2(x_0) = -2 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 0 = -2,$$

$$p(x_1) = -2 L_0(x_1) + 11 L_1(x_1) + 17 L_2(x_1) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 17 \cdot 0 = 11,$$

$$p(x_2) = -2 L_0(x_2) + 11 L_1(x_2) + 17 L_2(x_2) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 1 = 17,$$

e quindi è proprio il polinomio interpolante cercato.

# Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

Nota.

*Dal punto di vista pratico, (4) ha alcuni problemi.*

*Se dopo aver calcolato il polinomio  $p_N$  interpolante in  $N + 1$  punti*

$$(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$$

*desideriamo ottenere il polinomio  $p_{N+1}$  interpolante in  $N + 2$  punti*

$$(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N), (x_{N+1}, y_{N+1})$$

*la formula (4) è inefficiente poichè bisogna ricalcolare da capo tutti i polinomi di Lagrange.*

*Fortunatamente, esistono altre maniere di esprimere il polinomio interpolatore, come quella di **Newton** (cf. [1, p.138], [6, p.294], [8], [10]), che non risentono di questo problema.*

# Errore di interpolazione

Per quanto concerne l'errore compiuto nell'approssimare una funzione  $f$  con il polinomio  $p_n$  tale che  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$  vale il seguente teorema [4, p.70],

**Teorema (Errore di interpolazione, Cauchy (1840))**

*Sia  $f \in C^{n+1}([a, b])$  e si supponga che  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  siano a 2 a 2 distinti e che il polinomio  $p_n$  sia tale che*

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

*Allora*

$$E_n[f](x) := f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \quad (6)$$

*dove  $\xi \in I$  con  $I$  il più piccolo intervallo aperto contenente  $x_0, \dots, x_n$ .*

# Interpolazione polinomiale

## Teorema (Rolle)

*Sia  $f$  una funzione continua definita in un intervallo chiuso  $[a, b]$ , derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto  $(a, b)$ , tale che  $f(a) = f(b)$ . Allora esiste almeno un punto  $c \in (a, b)$  in cui  $f'(c) = 0$ .*

## Dimostrazione. (Errore di interpolazione, Cauchy (1840))

*Se  $x = x_i$ , per qualche  $i$ , l'asserto è ovvio.*

*Altrimenti, sia  $x \neq x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  e poniamo per  $z \in [a, b]$*

$$G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x), \quad (7)$$

*dove*

- $w(z) = \prod_{i=0}^n (z - x_i)$  è un polinomio di grado  $n + 1$ ,
- $Q(x) = E_n[f](x)/w(x)$ .

*Si noti che in (7) la funzione  $Q$  viene valutata in  $x$  e non in  $z$ .*

# Interpolazione polinomiale

Osserviamo che essendo  $G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x)$ , ove

- $E_n[f](z) := f(z) - p_n(z)$ ,
- $w(z) = \prod_{i=0}^n (z - x_i)$  è un polinomio di grado  $n + 1$ ,
- $Q(x) = E_n[f](x)/w(x)$ .

abbiamo

$$G(x) = E_n[f](x) - w(x)Q(x) = E_n[f](x) - w(x)(E_n[f](x)/w(x)) = 0,$$

e che per  $k = 0, \dots, n$

$$G(x_k) = E_n[f](x_k) - w(x_k)Q(x) = 0 - 0 \cdot Q(x) = 0.$$

Dato che

- $f \in C^{n+1}([a, b])$ ,  $p_n \in C^\infty([a, b])$ , sicuramente  $E_n[f] \in C^{n+1}([a, b])$ ,
- $w \in C^\infty([a, b])$ ,
- $Q(x)$  è un numero (si osservi che  $Q$  non dipende da  $z$ ),

deduciamo che  $G \in C^{n+1}([a, b])$  e **si annulla in  $n + 2$  punti**.

# Interpolazione polinomiale

Sia

$$\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$$

il più piccolo intervallo aperto contenente  $x, x_0, \dots, x_n$ .

Per il teorema di Rolle [12], visto che  $G$  si annulla in  $n + 2$  punti, allora

- $G^{(1)}$  si annulla in  $n + 1$  punti di  $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$ ,
- $G^{(2)}$  si annulla in  $n$  punti di  $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$ ,
- $G^{(k)}$  si annulla in  $n + 2 - k$  punti di  $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$ ,
- $G^{(n+1)}$  si annulla in 1 punto  $\xi$  di  $\mathcal{I}(x, x_0, \dots, x_n)$ .

# Interpolazione polinomiale

Indicata con  $D^n f$  la derivata  $n$ -sima di  $f$ , abbiamo

- $D^{n+1} p_n \equiv 0$  ( $p_n$  ha grado  $n$ ),
- $D^{n+1} w \equiv 0$  ( $w$  ha grado  $n$ ),

visto che  $Q(x)$  è costante (non dipende da  $z$ ),  $G(z) = E_n[f](z) - w(z)Q(x)$ ,

$$\begin{aligned} G^{(n+1)}(z) &= D^{n+1} E_n[f](z) - Q(x) D^{n+1} w(z) \\ &= D^{n+1}(f(z) - p_n(z)) - Q(x) D^{n+1} w(z) \\ &= f^{(n+1)}(z) - Q(x) \cdot (n+1)! \end{aligned} \quad (8)$$

Da  $Q(x) = E_n[f](x)/w(x)$

$$0 = G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - Q(x) \cdot (n+1)! = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{E_n[f](x)}{w(x)} \cdot (n+1)!$$

per cui riarrangiando i termini

$$E_n[f](x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{w(x)}{(n+1)!} = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!}.$$

# Interpolazione polinomiale

## Nota.

*Si osservi che è noto che esiste  $\xi$  ma non si sa dire in generale chi sia. Quindi non si può dire esattamente quanto sia l'errore compiuto.*

*Se è nota  $M = \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)|$  è comunque possibile stimare l'errore compiuto da*

$$|E_n[f](x)| = |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} \leq M \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}.$$

# Interpolazione polinomiale

## Esempio.

Sia  $f(x) = \exp(x)$  sia  $p_4$  il polinomio che la interpola nei punti equispaziati  $x_i = -1 + 2i/4$ ,  $i = 0, \dots, 4$ . Stimare l'errore di interpolazione.

Essendo  $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ , per  $k = 0, 1, \dots$  ed  $\exp(x)$  una funzione crescente, abbiamo

$$M = \|f^{(5)}\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |\exp(x)| = \exp(1) \approx 2.7183.$$

Inoltre, come si può vedere dal grafico in figura,  $\prod_{i=0}^4 |x - x_i| \leq 0.12$ . Visto che  $5! = 120$ , abbiamo che se  $E_n[f]$  è il massimo errore compiuto in  $[-1, 1]$  nell'approssimare la funzione  $f$  con l'interpolante  $p_4$  nei nodi equispaziati  $\{x_i\}_{i=0, \dots, 4}$ , dal teorema 0.3, fissato  $x \in [-1, 1]$

$$E_4[f](x) = |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{\prod_{i=0}^n |x - x_i|}{(n+1)!} \leq \frac{\exp(1) \cdot 0.12}{120} \approx 0.0027.$$

L'esperimento numerico in figura mostra che in effetti l'errore è minore di  $1.2 \cdot 10^{-3} < 2.7 \cdot 10^{-3}$ . Si osservi come il grafico sia tale che  $E_4[f]$  si annulla ovviamente nei 5 punti di interpolazione  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ .

# Interpolazione polinomiale

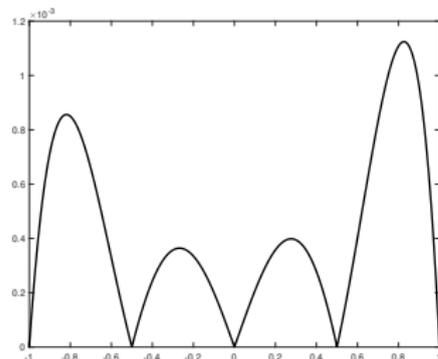
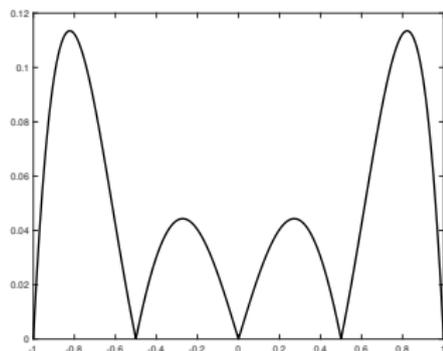


Figura:

A sinistra, il grafico di  $\prod_{i=0}^4 |x - x_i|$  dove  $x_i = -1 + 2i/4$ ,  $i = 0, \dots, 4$ .

A destra, il grafico dell'errore  $E_n[f]$  in  $[-1, 1]$  che evidentemente è sempre minore di  $2.7 \cdot 10^{-3}$ .

# Convergenza dell'interpolazione polinomiale

Un serio problema riguarda la **scelta dei punti in cui interpolare** la funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostriamo alcuni casi notevoli.

**1 nodi equispaziati:** fissato  $n$ , i punti sono

$$x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n; \quad (9)$$

**2 nodi di Chebyshev (scalati)** [6, p.294], [11]: fissato  $n$ , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (10)$$

con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (11)$$

**3 nodi di Chebyshev-Lobatto (scalati)** [6, p.295]: fissato  $n$ , i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (12)$$

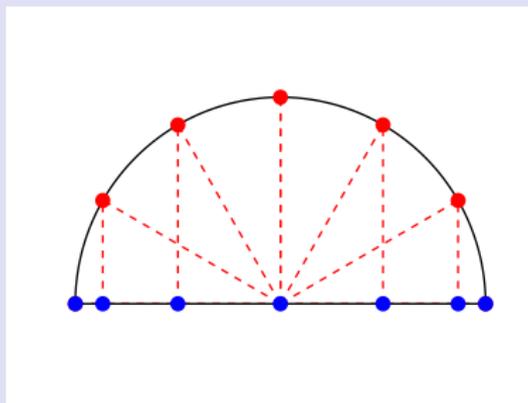
con

$$t_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n; \quad (13)$$

# Convergenza dell'interpolazione polinomiale

## Nota.

Il set di  $n + 1$  punti di Chebyshev-Lobatto in  $[-1, 1]$ , quindi utili per l'interpolazione polinomiale a grado  $n$ , come si vede in figura per  $n = 6$ , si ottengono proiettando i punti equispaziati nell'angolo della semicirconferenza  $\gamma = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, \pi]\}$  sull'asse delle ascisse.



**Figura:** Interpretazione geometrica dell'insieme dei punti di Chebyshev-Lobatto utili per determinare un'interpolante polinomiale di grado  $n = 6$ .

# Convergenza dell'interpolazione polinomiale

Una delle questioni rilevanti è se aumentando il numero di nodi, la successione di polinomi interpolatori  $p_n$  converge uniformemente alla funzione  $f$  da approssimare, ovvero

$$\lim_n \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

dove  $-\infty < a < b < +\infty$ .

Consideriamo il caso dei punti equispaziati in  $[a, b]$ , e osserviamo che la stima dell'errore di interpolazione porge, visto che  $\xi \in (a, b)$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} \\ &\leq \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (14)$$

e quindi

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

# Convergenza dell'interpolazione polinomiale

Da

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

se  $\max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)|$  è sufficientemente grande per ogni  $n$ , allora potrebbe accadere che

$$\max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

non sia infinitesima per  $n \rightarrow +\infty$  e quindi che *possa* succedere che

$$\|E_n[f]\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$$

non converga a 0.

# Convergenza dell'interpolazione polinomiale

In generale,

## Teorema (Teorema di Faber (1914))

*Per ogni distribuzione di nodi esiste almeno una funzione  $f \in C([a, b])$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , tale che l'errore di interpolazione  $\|E_n[f]\|_\infty$  non converge a 0 per  $n \rightarrow +\infty$ .*

Per contro

## Teorema

*Per ogni funzione  $f \in C([a, b])$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , esiste almeno una distribuzione di nodi tale che  $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .*

e

## Teorema (Teorema di Bernstein)

*Per ogni funzione  $f \in C^1([a, b])$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , allora se  $p_n$  è l'interpolante di  $f$  in  $n + 1$  nodi di Chebyshev,  $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .*

# Controesempio di Runge

Esempio.

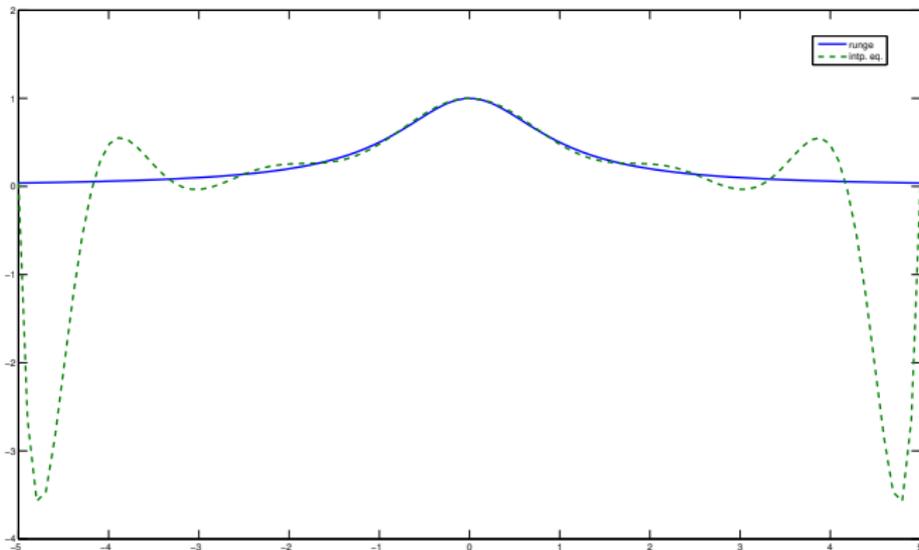
Sia  $f$  la **funzione di Runge** (scoperta nel 1901)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]. \quad (15)$$

Si dimostra che il polinomio  $p_n$  che interpola  $f$  in  $n+1$  **nodi equispaziati**, **non converge uniformemente a  $f$**  (vedasi relativa figura, e le forti differenze tra  $p_n$  e  $f$  vicino agli estremi  $-5, 5$ ).

Nelle tabelle e figure che seguono, illustriamo il fenomeno di Runge, e di come l'interpolante in nodi equispaziati non converga uniformemente alla funzione di Runge nell'intervallo  $[-5, 5]$ , nonostante la stessa appartenga a  $C^\infty([-5, 5])$ .

# Controesempio di Runge



**Figura:** Grafico che illustra il polinomio interpolante di grado 12 su 13 nodi equispaziati della funzione di Runge, (la funzione ha la linea continua, il polinomio interpolatore è tratteggiato, si osservino le oscillazioni agli estremi).

# Controesempio di Runge

Fortunatamente ciò non succede in questo caso per i **nodi di Chebyshev**, per cui comunque esistono funzioni continue  $f$  ma non di classe  $C^1$  tali che l'interpolante  $p_n$  non converge puntualmente a  $f$ .

Nel controesempio di Runge in cui  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , in virtù del teorema di Bernstein, essendo  $f \in C^\infty([-5, 5])$  e quindi in particolare  $f \in C^1([-5, 5])$ , possiamo affermare che se i nodi di interpolazione sono quelli di Chebyshev allora  $\|E_n[f]\|_\infty \rightarrow 0$ .

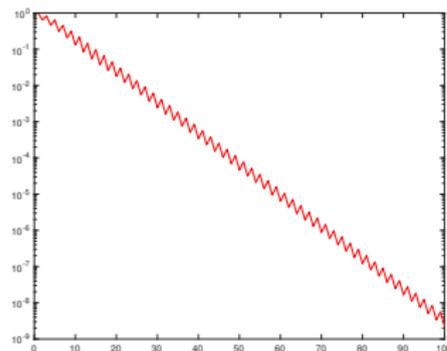
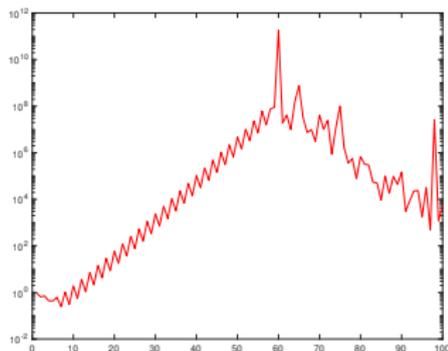
In effetti in tabella, si vede che l'errore in tali set di nodi ha numericamente tale proprietà, differentemente dall'interpolante in nodi equispaziati.

# Controesempio di Runge

$n$	$E_n^e$	$E_n^c$
1	$9.615e - 01$	$9.615e - 01$
2	$6.462e - 01$	$6.462e - 01$
3	$7.070e - 01$	$8.289e - 01$
4	$4.384e - 01$	$4.600e - 01$
5	$4.327e - 01$	$6.386e - 01$
6	$6.169e - 01$	$3.112e - 01$
7	$2.474e - 01$	$4.596e - 01$
8	$1.045e + 00$	$2.047e - 01$
9	$3.003e - 01$	$3.191e - 01$
10	$1.916e + 00$	$1.322e - 01$
20	$5.982e + 01$	$1.774e - 02$
30	$2.388e + 03$	$2.426e - 03$
40	$1.047e + 05$	$3.399e - 04$
50	$4.822e + 06$	$4.622e - 05$
60	$1.796e + 11$	$6.381e - 06$
70	$4.171e + 07$	$8.755e - 07$
80	$6.774e + 05$	$1.196e - 07$
90	$1.498e + 05$	$1.648e - 08$
100	$5.177e + 03$	$2.256e - 09$

**Tabella:** Grado  $n$  ed errore  $\|E_n[f]\|_\infty$  con  $p_n$  interpolante  $f$  risp. in  $n + 1$  nodi equispaziati e di Chebyshev (denotato rispettivamente con  $E_n^e$ ,  $E_n^c$ ).

# Controesempio di Runge



**Figura:** Grado  $n$  ed errore  $E_n[f] = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_n(x)|$  con  $p_n$  interpolante  $f$  rispettivamente in  $n + 1$  nodi equispaziati (figura a sinistra) e di Chebyshev (figura a destra), in scala semilogaritmica.

# Stabilità dell'interpolazione polinomiale

Sia  $f \in C([a, b])$ , con  $[a, b]$  intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio  $p_n \in \mathbb{P}_n$  che interpola le coppie  $(x_k, f(x_k))$  (per  $k = 0, \dots, n$ ,  $x_k$  a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione  $f_k := f(x_k)$ . Come è noto, indicato con  $L_k$  il  $k$ -simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$$

con

$$L_k(x) = \prod_{j \neq k} (x - x_j) / \prod_{j \neq k} (x_k - x_j).$$

Supponiamo che i valori di  $f_k$  siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con  $\tilde{f}_k$ .

# Stabilità dell'interpolazione polinomiale

Quindi il polinomio interpolatore è  $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x)$ . Essendo  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$  abbiamo che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

da cui

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k - \tilde{f}_k| |L_k(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

e

$$\max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

# Stabilità dell'interpolazione polinomiale

Quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

da

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

ricaviamo

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Osserviamo che il numero  $\Lambda_n$  dipende esclusivamente dai polinomi di Lagrange e quindi esclusivamente dai punti di interpolazione.

# Costanti di Lebesgue

Il valore  $\Lambda_n$  è nota come **costante di Lebesgue** (1910) dell'insieme di punti  $x_0, \dots, x_n$ . Si vede immediatamente che è un **indice di stabilità** dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [2, p.139-140]).

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di  $n + 1$  punti nell'intervallo  $[-1, 1]$ :

- **punti equispaziati**: si dimostra che asintoticamente (Turetskii, 1940)

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en \log(n)};$$

- **punti di Chebyshev**: corrispondono a  $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)$  dove  $k = 1, \dots, n + 1$ ; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) \right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

dove  $\gamma \approx 0.577$  è la *costante di Eulero-Mascheroni*;

# Costanti di Lebesgue

$n$	$\Lambda_n^{\text{eq}}$	$\Lambda_n^{\text{ch}}$
5	$2.208e + 00$	$1.989e + 00$
10	$1.785e + 01$	$2.429e + 00$
15	$2.832e + 02$	$2.687e + 00$
20	$5.890e + 03$	$2.870e + 00$
25	$1.379e + 05$	$3.012e + 00$
30	$3.448e + 06$	$3.128e + 00$
35	$9.001e + 07$	$3.226e + 00$
40	$2.422e + 09$	$3.311e + 00$
45	$6.665e + 10$	$3.386e + 00$
50	$1.868e + 12$	$3.453e + 00$
55	$5.518e + 13$	$3.514e + 00$
60	$8.354e + 16$	$3.569e + 00$
65	$7.507e + 15$	$3.620e + 00$
70	$3.292e + 16$	$3.667e + 00$
75	$1.339e + 17$	$3.711e + 00$
80	$1.286e + 17$	$3.752e + 00$
85	$3.831e + 18$	$3.791e + 00$
90	$5.980e + 18$	$3.827e + 00$
95	$8.922e + 16$	$3.862e + 00$
100	$3.790e + 17$	$3.894e + 00$

**Tabella:** Valore  $n$  e costanti di Lebesgue in  $n$  punti equispaziati di  $[-1, 1]$  e nei punti di Chebyshev  $\cos((2k - 1) \cdot \pi / (2 \cdot n))$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Se ne evince la maggiore stabilità dell'interpolazione nei nodi di Chebyshev.

# Bibliografia I

-  K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
-  V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
-  W. Gautschi, *Interpolation before and after Lagrange*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Vol. 70, 4 (2012), pp.347–368.
-  A. Quarteroni, *Elementi di calcolo scientifico*, Progetto Leonardo, 1999.
-  A. Quarteroni e F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico*, Springer Verlag, 2006.
-  A. Quarteroni, R. Sacco e F. Saleri, *Matematica numerica*, Springer Verlag, 1998.
-  Wikipedia, Fenomeno di Runge,  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Fenomeno\\_di\\_Runge](http://it.wikipedia.org/wiki/Fenomeno_di_Runge).

# Bibliografia II

-  Wikipedia, Interpolazione polinomiale,  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione\\_polinomiale](http://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione_polinomiale).
-  Wikipedia, Interpolazione di Lagrange,  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione\\_di\\_Lagrange](https://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione_di_Lagrange)
-  Wikipedia, Newton polynomial,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Newton\\_polynomial](http://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polynomial).
-  Wikipedia, Nodi di Chebyshev,  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Nodi\\_di\\_Chebyshev](http://it.wikipedia.org/wiki/Nodi_di_Chebyshev).
-  Wikipedia, Teorema di Rolle,  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_di\\_Rolle](https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Rolle)
-  Wikipedia, Vandermonde matrix,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde\\_matrix](http://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix).