

# Interpolazione polinomiale a tratti e spline

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

1 aprile 2019

# Un problema dell'interpolazione polinomiale

Si è visto che nel caso dell'interpolazione polinomiale, dati  $n + 1$  punti  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ , e i valori  $y_0, \dots, y_n$ , ad esempio ivi assunti da una funzione  $y = f(x)$ , esiste uno ed un solo polinomio  $p_n$  di grado  $n$  tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Nel caso di nodi equispaziati

$$x_k = a + k \frac{(b - a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n; \quad (2)$$

al crescere di  $n$ , **non si può garantire che  $f(x) - p_n(x)$  tenda a 0** (si ricordi il fenomeno di Runge!).

# Un problema dell'interpolazione polinomiale

Piú in generale per un teorema di Faber (cf. [2, p.132], qualsiasi sia l'insieme di nodi relativi all'intervallo limitato  $[a,b]$  esiste una funzione continua  $f$  tale che l'interpolante  $P_n$  in tale set di punti non converge uniformemente a  $f$  (per  $n \rightarrow \infty$ ).

In altre parole al tendere di  $n \rightarrow +\infty$ , non si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0.$$

Di conseguente sorge spontaneo porsi il seguente

## Problema.

*Qualora si possenga un gran numero di punti, anche equispaziati, risulta possibile calcolare un'approssimante di tipo polinomiale per cui al crescere di  $n$  si abbia  $p_n \rightarrow f$  (uniformemente)?*

# Funzioni polinomiali a tratti

## Definizione (Funzioni polinomiali a tratti)

Sia dato un intervallo  $[a, b]$  e sia  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Una funzione  $f$  si dice **polinomiale a tratti** se la sua restrizione ad ogni intervallo  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  è un polinomio.

## Definizione (Interpolante polinomiale a tratti di grado $s$ )

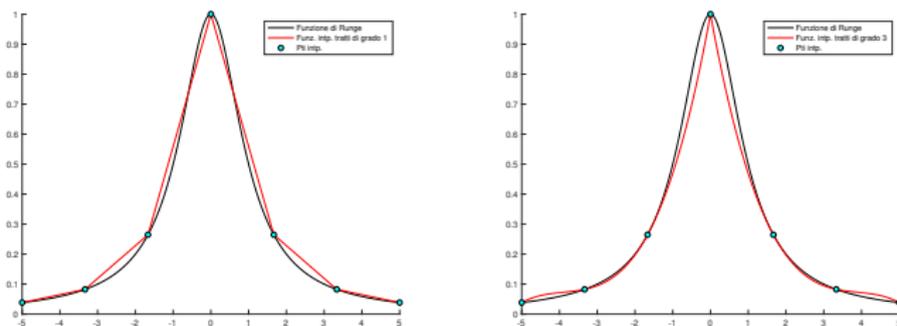
Siano  $x_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$  e si supponga che sia

$$t_k = x_{k \cdot s} < x_{k \cdot s + 1} < \dots < x_{k \cdot (s+1) - 1} < x_{k \cdot (s+1)} = t_{k+1}.$$

Si consideri la funzione  $p_s^*$  tale che in ogni subintervallo  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, n$ , sia il polinomio di grado  $s$  interpolante nei punti  $x_{k \cdot s}, \dots, x_{(k+1) \cdot s}$  i valori  $y_{k \cdot s}, \dots, y_{(k+1) \cdot s}$ . Tale  $p_s^*$  si chiama funzione **polinomiale a tratti di grado  $s$ , interpolante** le coppie  $(x_j, y_j)_{j=0, \dots, n}$ .

In altri termini  $p_s^*$  si ottiene *incollando* per continuità pezzi polinomiali ove in generale i punti di raccordo  $x_s, x_{2s}, x_{3s}, \dots$  sono punti angolosi della funzione interpolante.

# Funzioni polinomiali a tratti



**Figura:** La funzione di Runge, la interpolante polinomiale a tratti  $p_1^*$  a tratti di grado 1 e la interpolante polinomiale a tratti  $p_3^*$  a tratti di grado 3, nei punti  $x_k = -5 + k \cdot 10/6$ ,  $k = 0, \dots, 6$ . Si osservi che i punti  $x_4 = 0$  è angoloso per  $f$  in entrambi i casi.

## Funzioni polinomiali a tratti: esistenza ed unicità

Siccome in ogni subintervallo  $[t_k, t_{k+1}]$  l'interpolante richiesta esiste ed è unica, possiamo affermare che **tali interpolanti** relativamente ai dati  $(x_k, y_k)_{k=0, \dots, n}$  **esistono e sono uniche**.

Il primo caso è quello delle **interpolanti polinomiali a tratti di grado 1**, cioè funzioni che in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  (per  $i = 0, \dots, n - 1$ ) sono polinomi di grado  $m = 1$  (e globalmente funzioni continue).

# Errore dell'interpolante polinomiale a tratti di grado 1

## Teorema

Sia  $p_1^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione interpolante a tratti di **grado 1** relativamente alle coppie  $(x_i, f(x_i))$  dove

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Allora se

- 1  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,
- 2  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,
- 3 la funzione  $f$  è derivabile due volte con continuità ed è

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(x)|,$$

abbiamo

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq h_i^2 \frac{M_i}{8}. \quad (3)$$

# Errore dell'interpolante polinomiale a tratti di grado 1

## Dimostrazione.

Dal teorema dell'errore dell'interpolazione polinomiale di grado  $n = 1$ , relativamente alle coppie  $(x_i, f(x_i))$ ,  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ , per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$f(x) - p_1^*(x) = f^{(2)}(\xi) \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2}, \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}) \quad (4)$$

Se  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , da (4)

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1^*(x)| &= \left| f^{(2)}(\xi) \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| = |f^{(2)}(\xi)| \left| \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| \\ &\leq \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)| \cdot \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \left| \frac{(t - x_i)(t - x_{i+1})}{2} \right| \end{aligned}$$

da cui l'asserto in quanto visto che essendo  $c = (x_i + x_{i+1})/2$  il punto di massimo in  $[x_i, x_{i+1}]$  di  $\left| \frac{(t - x_i)(t - x_{i+1})}{2} \right|$  deduciamo visto che  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,

$$\max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \frac{|(t - x_i)(t - x_{i+1})|}{2} = \frac{|(c - x_i)(c - x_{i+1})|}{2} = \frac{(h_i/2)(h_i/2)}{2} = \frac{h_i^2}{8}.$$

e quindi essendo  $M_i := \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)|$

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq M_i \frac{h_i^2}{8}. \quad (5)$$

△

# Errore dell'interpolante polinomiale a tratti di grado 1

## Nota.

- 1 *Il teorema precedente, vale per  $h_i$  generica.*
  - 2 *Il massimo  $M_i = \max_{s \in (x_i, x_{i+1})} |f^{(2)}(s)|$  dipende solo dal  $i$ -simo intervallo che è quello in cui si esamina l'errore compiuto nel punto  $x$ .*
- A priori uno potrebbe utilizzare  $M = \max_{s \in (a, b)} |f^{(2)}(s)| \geq M_i$  ma la disuguaglianza sarebbe meno precisa.*

# Errore dell'interpolante polinomiale a tratti di grado 1

## Corollario

Sia  $p_1^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione interpolante a tratti relativamente alle coppie  $(x_k, f(x_k))$  dove  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

Allora se la funzione  $f$  è derivabile due volte con continuità in  $[a, b]$  ed è  $M = \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)|$ , abbiamo

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_1^*(x)| \leq \frac{(b-a)^2 M}{8n^2}.$$

## Dimostrazione.

Si osserva che i punti  $x_k$ , con  $k = 0, \dots, n$  sono equispaziati, ovvero  $x_k = a + kh$  con  $k = 0, \dots, n$ . Visto che

$$M = \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)| \geq M_i = \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)|$$

ricaviamo dal teorema precedente

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq M_i \frac{h^2}{8} \leq M \frac{h^2}{8}.$$

da cui, visto che  $M \frac{h^2}{8}$  non dipende da  $x$ ,

$$0 \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - p_1^*(t)| \leq M \frac{h^2}{8}.$$

# Errore dell'interpolante polinomiale a tratti di grado 1

Importante. (Convergenza uniforme)

*Indicato con  $p_{1,n}^*$  il polinomio a tratti interpolante  $n + 1$  nodi equispaziati di  $[a, b]$ , essendo  $h = (b - a)/n$ , ricaviamo*

$$0 \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - p_{1,n}^*(t)| \leq \frac{(b - a)^2 M}{8n^2}. \quad (6)$$

*da cui si evince che se  $f \in C^2([a, b])$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$  e il numero di punti equispaziati nell'intervallo  $[a, b]$  tende ad infinito allora, per il teorema del confronto*

$$\max_{t \in [a, b]} |f(t) - p_{1,n}^*(t)| \rightarrow 0$$

*ovvero la successione  $\{p_{1,n}^*\}$  converge uniformemente a  $f$ .*

## Il controesempio di Runge

In questa sezione analizziamo numericamente la convergenza delle spline lineari  $s_{1,n}$  interpolanti in  $n$  punti equispaziati

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

Dopo qualche calcolo si vede che

$$f^{(1)}(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2 \cdot (3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

e quindi l'errore di interpolazione è per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , visto che

- $h_i = x_{i+1} - x_i = h = 10/n$ ,

- $\max_{s \in [-5, 5]} |f^{(2)}(x)| = 2$

ricaviamo

# Il controesempio di Runge

Di conseguenza,

$$0 \leq \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq \frac{200}{n^2}.$$

e come detto sopra deduciamo per il teorema del confronto che

$$\lim_n \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| = 0,$$

ovvero la successione  $\{p_{1,n}^*\}$  converge uniformemente a  $f$ .

## Il controesempio di Runge

$n$	$E_n$	$n$	$E_n$
2	$9.62e-01$	16384	$9.31e-08$
4	$7.35e-01$	32768	$2.32e-08$
8	$3.38e-01$	65536	$5.79e-09$
16	$1.00e-01$	131072	$1.45e-09$
32	$2.54e-02$	262144	$3.63e-10$
64	$6.26e-03$	524288	$9.08e-11$
128	$1.55e-03$	1048576	$2.27e-11$
256	$3.84e-04$	2097152	$5.67e-12$
512	$9.55e-05$	4194304	$1.42e-12$
1024	$2.38e-05$	8388608	$3.54e-13$
2048	$5.95e-06$	16777216	$8.78e-14$
4096	$1.49e-06$	33554432	$2.23e-14$
8192	$3.71e-07$	67108864	$5.66e-15$

**Tabella:** Grado  $n$  ed errore  $E_n = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)|$  con  $p_{1,n}^*$  interpolante  $f$  di tipo lineare a tratti, in  $n + 1$  nodi equispaziati. Si osservi come numericamente  $E_n \rightarrow 0$ .

# Interpolazione spline

Una risposta al citato problema di convergenza dell'interpolazione polinomiale è stata data nel 1946 da Schoenberg, lo scopritore delle splines (cf. [8] [5], [6], [7]).

## Definizione

Una spline  $s_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  di grado  $m$  è una funzione *polinomiale a tratti di grado  $m$* , tale che

$$s_m \in C^{m-1}([a, b])$$

ovvero è una funzione la cui derivata  $m - 1$ -sima è derivabile.

In particolare fornite le coppie  $(x_k, y_k)$ , con  $x_k < x_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, n$ , la spline si dice *interpolante* se

$$s_m(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

# Interpolazione spline

## Esempio.

Il primo caso è quello delle splines di grado 1, cioè funzioni che in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  (per  $i = 0, \dots, n - 1$ ) sono polinomi di grado  $m = 1$  e globalmente funzioni di classe  $C^{m-1}([a, b]) = C^0([a, b])$ , cioè continue. Evidentemente coincidono con funzioni interpolanti polinomiali a tratti nei punti  $\{x_i\}$ .

## Esempio.

Per  $m = 3$  otteniamo le cosiddette splines cubiche  $s_3$ , cioè funzioni che in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  (per  $i = 0, \dots, n - 1$ ) siano polinomi di grado  $m = 3$  e globalmente funzioni di classe  $C^{m-1}([a, b]) = C^2([a, b])$ . Come vedremo dopo, per garantirne l'unicità si chiedono condizioni aggiuntive.

# Interpolazione spline

## Commento (Funzioni polinomiali a tratti e splines: differenze)

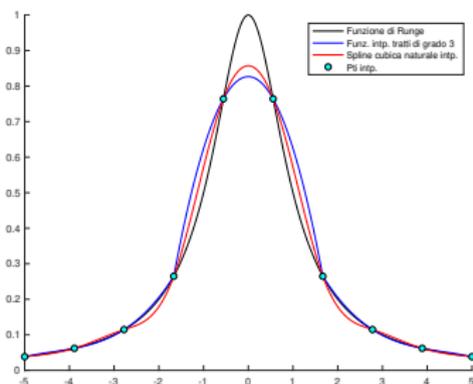
Esistono molte *differenze tra interpolanti spline e interpolanti polinomiali a tratti*. Ne citiamo alcune.

- Possono avere *diversa regolarità*. Osserviamo che non sempre le funzioni polinomiali a tratti di grado  $m$  sono di classe  $C^{m-1}$  come invece lo sono le splines.
- Mentre le funzioni a tratti di grado  $m$  richiedono che il *numero di punti da interpolare* sia

$$sm + 1$$

per qualche numero naturale  $s$ , le splines di grado  $m$  sono *definite su un insieme di punti arbitrari*, indipendentemente dal grado.

# Interpolazione spline



**Figura:** La funzione di Runge, la interpolante polinomiale  $p_3^*$  a tratti di grado 3 e la interpolante spline cubica  $s_3$  (con condizioni naturali), nei punti  $x_k = -5 + k * 10/9$ ,  $k = 0, \dots, 9$ . Si osservi che i punti  $x_3, x_6$  sono angolosi per  $f$ . Le derivate infatti valgono  $\lim_{x \rightarrow x_3^-} f'(x) \approx 0.1990$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_3^+} f'(x) \approx 0.6743$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_6^-} f'(x) \approx -0.6736$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_6^+} f'(x) \approx -0.1992$ .

# Interpolazione spline: cubiche

Nel caso delle splines cubiche  $s_3$ , l'**unicità dell'interpolante** è legata (ma non solo!) all'aggiungere alcune proprietà di  $s_3$  agli estremi  $x_0, x_n$ .

Osserviamo infatti che in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  le splines si possano rappresentare come

$$s_3(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x - x_i) + c_{3,i}(x - x_i)^2 + c_{4,i}(x - x_i)^3, \quad i = 0, \dots, n - 1$$

e quindi per determinare  $s_3$  in  $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$  servono  $4n$  valori  $c_{i,j}$ , ovvero 4 valori per ogni indice  $i$ .

# Interpolazione spline: cubiche

Da ragionamenti sulle proprietà della **regolarità** della spline interpolante si vede che sono disponibili solo  **$4n - 2$  condizioni** (di cui  $n + 1$  dal fatto che  $s_3(x_j) = f_j$ ).

Si procede richiedendo quindi una delle seguenti proprietà aggiuntive a  $s_3$ :

- **Spline naturale**:  $s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b) = 0$ .
- **Spline periodica**:  $s_3^{(1)}(a) = s_3^{(1)}(b)$ ,  $s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b)$ .
- **Spline vincolata**:  $s_3^{(1)}(a) = f^{(1)}(a)$ ,  $s_3^{(1)}(b) = f^{(1)}(b)$ .

# Interpolazione spline: cubiche

La spline con vincolo **not-a-knot** forza  $s_3^{(3)}$  ad essere continua nel secondo e nel penultimo nodo (e di conseguenza si può mostrare che ciò impone che i polinomi nei primi e negli ultimi due intervalli siano uguali).

In altre parole,

- la suddivisione è data dai subintervalli  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$ ,
- si interpolano i dati  $y_0, \dots, y_n$  nei nodi  $x_0, \dots, x_n$ .

Si osservi che, nel caso della condizione *knot-a-knot* se i punti da interpolare sono  $x_0, \dots, x_n$  e gli  $n - 2$  intervalli della suddivisione sono  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  allora necessitano  $4(n - 2)$  condizioni per determinare la spline cubica.

Le condizioni dovute

- all'interpolazione sono  $n + 1$ ,
- alla regolarità sono  $3(n - 3)$ , poichè gli  $n - 3$  punti che sono estremi di subintervalli *interni* sono  $x_2, \dots, x_{n-2}$ .

# Errore dell'interpolante spline cubica

Analizziamo l'errore effettuato da una spline cubica  $s_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  che interpola le coppie  $(x_i, f(x_i))$  dove

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

E' utile ricordare che

- se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora porremo

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

- $\{\Omega_k\}_{k=1, \dots, M}$  è una suddivisione del dominio  $\Omega$  se

**1**  $\Omega = \cup_{k=1}^M \Omega_k,$

**2**  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  se  $i \neq j.$

# Errore dell'interpolante spline cubica

Per quanto riguarda l'errore, si può provare (non facile!) quanto segue (cf. [2], p. 163, [1], p. 163)

## Teorema

Supponiamo  $f \in C^4([a, b])$ . Posto  $h = \max_i (h_i)$ , si consideri una successione di suddivisioni  $\Delta_n$  tale che esista una costante  $K$  tale che

$$\frac{h}{h_j} \leq K, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Allora esiste una costante  $c_k$  indipendente da  $h$  tale che

$$\|f^{(k)} - s_{3, \Delta_n}^{(k)}\|_\infty \leq c_k K h^{(4-k)} \|f^{(4)}\|_\infty, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (9)$$

dove  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ,  $\Delta_n = \{x_i\}_{i=0, \dots, n}$ .

# Errore dell'interpolante spline cubica

## Corollario

Supponiamo  $f \in C^4([a, b])$ . Fissata un'ampiezza  $h = (b - a)/n$ , si consideri la suddivisione di  $[a, b]$  data da  $\cup_{i=0}^{n-1} [a + ih, a + (i + 1)h]$ . Allora esistono delle costanti  $c_0, c_1, c_2, c_3$  indipendenti da  $h$  tali che

$$\|f - s_{3,\Delta_n}\|_\infty \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_\infty, \quad (10)$$

$$\|f^{(1)} - s_{3,\Delta_n}^{(1)}\|_\infty \leq c_1 h^3 \|f^{(4)}\|_\infty, \quad (11)$$

$$\|f^{(2)} - s_{3,\Delta_n}^{(2)}\|_\infty \leq c_2 h^2 \|f^{(4)}\|_\infty, \quad (12)$$

$$\|f^{(3)} - s_{3,\Delta_n}^{(3)}\|_\infty \leq c_3 h^1 \|f^{(4)}\|_\infty, \quad (13)$$

dove  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ ,  $\Delta_n = \{x_i\}_{i=0,\dots,n}$ .

Nel caso di spline interpolanti e vincolate si ha  $c_0 = 5/384$ ,  $c_1 = 1/24$ ,  $c_2 = 3/8$ . Nel caso di splines di tipo *Hermite* si ha  $c_0 = 1/384$  (cf. [4], p. 301).

# Errore dell'interpolante spline cubica

## Nota.

- 1 *La condizione su  $h$  nel primo teorema è chiaramente verificata per **suddivisioni uniformi**, ed in particolare esclude che alcuni intervalli possano degenerare ad un punto.*
- 2 *Si noti come nel corollario si afferma come non solo come la spline approssima la funzione, ma come pure le sue **derivate convergono uniformemente** alle rispettive derivate della funzione  $f$ , qualora  $n$  tenda ad infinito.*

# Il controesempio di Runge e splines cubiche

In questa sezione analizziamo numericamente la convergenza delle splines cubiche  $s_{3,\Delta_n}$  interpolanti in  $n$  punti equispaziati

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

In questo caso la suddivisione  $\Delta_n$  dell'intervallo è determinata naturalmente dai punti  $\{x_k\}$  essendo

- 1  $[-5, 5] = \cup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}]$ ,
- 2  $(x_i, x_{i+1}) \cap (x_j, x_{j+1}) = \emptyset$ , se  $i \neq j$ .

# Il controesempio di Runge e splines cubiche

Dopo qualche calcolo si vede che

$$f^{(4)}(x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^5}$$

che in  $[-5, 5]$  assume massimo in  $x = 0$ , con valore 24.

Visto che

- $h = h_0 = \dots = h_{n-1} = (b - a)/n$ ,  $K = \max_{i=0, \dots, n-1} h/h_i = 1$ ,
- $\|f^{(4)}\|_\infty = \max_{x \in [-5, 5]} |f^{(4)}(x)| = 24$ ,

abbiamo per un qualche  $c_0$  indipendente da  $n$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f - s_{3, \Delta_n}\|_\infty &:= \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - s_{3, \Delta_n}(x)|_\infty \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_\infty \\ &= c_0 \frac{(b - a)^4}{n^4} \cdot 24. \end{aligned} \tag{14}$$

# Il controesempio di Runge e splines cubiche

Quindi, per il teorema del confronto

$$\lim_n \|f - s_{3,\Delta_n}\|_\infty = 0$$

ovvero le splines cubiche  $s_{3,\Delta_n}$  che interpolano nei nodi

$$x_k = -5 + k \frac{10}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

la funzione di Runge  $f$ , sono tali che la successione  $\{s_{3,\Delta_n}\}$  converge uniformemente a  $f$ .

## Il controesempio di Runge e splines cubiche

$n$	$E_n$	$n$	$E_n$
2	$9.62e - 01$	512	$1.58e - 07$
4	$7.01e - 01$	1024	$3.93e - 08$
8	$2.46e - 01$	2048	$9.82e - 09$
16	$3.09e - 02$	4096	$2.45e - 09$
32	$1.31e - 03$	8192	$2.15e - 10$
64	$4.81e - 05$	16384	$2.98e - 11$
128	$2.56e - 06$	32768	$6.95e - 13$
256	$6.36e - 07$	65536	$3.08e - 15$

**Tabella:** Grado  $n$  ed errore  $E_n = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - s_{3,\Delta_n}^*(x)|$  con  $p_{1,n}^*$  interpolante  $f$  di tipo cubiche naturali, in  $n + 1$  nodi equispaziati. Si osservi come numericamente  $E_n \rightarrow 0$  e di come la convergenza sia molto più rapida che nel caso delle splines interpolanti di grado 1.

# Bibliografia I

-  K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
-  V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
-  Carl DeBoor, *personal homepage*,  
<http://pages.cs.wisc.edu/~deboor/draftspline.html>.
-  A. Suli e D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2003.
-  Wikipedia, *Funzione Spline*,  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_spline](http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_spline).
-  Wikipedia, *Spline Device*,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Spline\\_%28device%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_%28device%29).
-  Wikipedia, *Spline Mathematics*,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Spline\\_%28mathematics%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_%28mathematics%29).

# Bibliografia II



Wikipedia, Interpolazione Spline,  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione\\_spline](http://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione_spline).