

# Equazioni nonlineari <sup>1</sup>

A. Sommariva <sup>2</sup>

---

**Keywords:** Metodo di bisezione, stima dell'errore col residuo pesato; metodo di Newton, convergenza globale, velocità (ordine) di convergenza, cenno alla convergenza locale, stima dell'errore, altri metodi di linearizzazione (secanti); iterazioni di punto fisso, convergenza e ordine di convergenza.

---

**Revisione:** 10 novembre 2018

---

## 1. Soluzione numerica di equazioni nonlineari

Data una funzione continua  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (dove al solito  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ ), si desidera calcolare  $x^*$  tale che  $f(x^*) = 0$ . Questo problema è assai diffuso nel calcolo numerico e richiede in generale l'utilizzo di un *metodo iterativo* per approssimare tali *soluzioni*  $x^*$ . In altri termini, partendo da un valore iniziale  $x_0$  si genera una sequenza di valori  $x_1, x_2, x_3, \dots$  che si desidera convergano, magari velocemente, ad una opportuna soluzione  $x^*$ , o perfino la determinino in un numero finito di passi.

**Esempio.** Sia  $f = p_n$  un polinomio di grado  $n$ . Per un teorema di Galois, per  $n \geq 5$ , non esistono formule risolutive per il calcolo degli zeri dell'equazione  $p_n(x) = 0$  che richiedano un numero finito di operazioni. Ciò non vieta di approssimare tali radici con un metodo numerico compiendo un errore assoluto e/o relativo inferiore a un valore prestabilito detto *tolleranza*.

Equazioni di questo tipo possono

- non avere soluzioni reali, si pensi ad esempio  $x^2 + 2 = 0$  in cui il discriminante è negativo;
- avere più di una soluzione come nel caso di  $x^2 - 5x + 6 = 0$  che ha per soluzioni  $x = 2, x = 3$ ;
- avere  $x^*$  semplici ovvero tali  $f'(x^*) \neq 0$ , come nel caso di  $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$  che ha per soluzioni  $x = 1, x = 2$ , in cui non si annulla  $f'(x) = 2x - 3$  (vale rispettivamente  $-1$  e  $1$ );
- averne  $x^*$  multiple ovvero tali  $f'(x^*) = 0$ , come nel caso di  $(x^2 - 1)^2 = 0$  in cui  $1$  è soluzione multipla in quanto  $f'(x) = 2(x^2 - 1)$  ha zero in  $1$  tanto per  $f$  che per  $f'$ .

Queste differenti situazioni hanno causato varie difficoltà nella soluzione delle equazioni polinomiali, per cui usualmente si applicano metodi ad hoc.

**Esempio.** Si consideri il problema di calcolare gli zeri della funzione continua  $f(x) = \sin x - x$ , cioè quei valori  $x^*$  per cui  $\sin x^* - x^* = 0$ . Visto che

$$\sin x^* - x^* = 0 \Leftrightarrow \sin x^* = x^*$$

e

$$|\sin x| \leq 1$$

risulta evidente che se esiste un tale zero, necessariamente

$$x^* \in [-1, 1].$$

Inoltre da

$$f(1) = \sin(1) - 1 \approx -0.1585$$

$$f(-1) = \sin(-1) - (-1) \approx 0.1585$$

per il teorema degli zeri di una funzione continua, possiamo asserire che un tale zero esiste. In effetti la funzione è decrescente in  $[-1, 1]$  in quanto  $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$  per ogni  $x \in [-1, 1]$  e quindi tale zero è unico (e si vede subito essere  $x^* = 0$ ).

La prima tentazione che sorge per studiare gli zeri di una funzione continua  $f$  è di farne il grafico. Purtroppo questa strategia non è sempre efficace, e usualmente richiede troppi calcoli dovuti alla valutazione della funzione in molti punti.

Tipicamente

- si valuta  $f$  in molti punti campione  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_N$  (con  $x_k < x_{k+1}$ ),
- si disegnano le coppie  $(x_k, f(x_k))$  nel piano cartesiano,
- si approssima il grafico, unendo con segmenti tutte le coppie  $P_j = (x_j, f(x_j))$   
 $P_{j+1} = (x_{j+1}, f(x_{j+1}))$ ,  $j = 1, \dots, N - 1$ .

Se il numero  $N$  di campioni è piccolo, allora tra certi  $x_k$  e  $x_{k+1}$ , il grafico di  $f$  potrebbe essere molto diverso da quello della versione numerica, e alcuni zeri potrebbero non essere individuati.

Si pensi ad esempio di studiare  $f(x) = 10^6(x - 1/1000)(x + 1/1000)$  che ovviamente ha zeri  $-1/1000, 1/1000$ . Se campioniamo la funzione nei punti equispaziati  $x_k = -1 + k/100$ , con  $k = 0, \dots, 100$  gli zeri non vengono individuati anche dopo zoom successivi, per mancanza di dati.

Si potrebbe ovviare aumentando il numero di punti equispaziati, ma da una parte non si avrebbe ancora la garanzia di fedeltà del grafico, e dall'altra il numero di valutazioni diventerebbe eccessivo.

A dispetto di questa analisi pessimistica, avere un'idea del grafico della funzione, ottenuto anche per mezzi analitici tramite il classico *studio di funzione*, nella maggior parte dei casi può permettere la localizzazione di alcuni zeri, problema potenzialmente non banale dal punto di vista algoritmico.

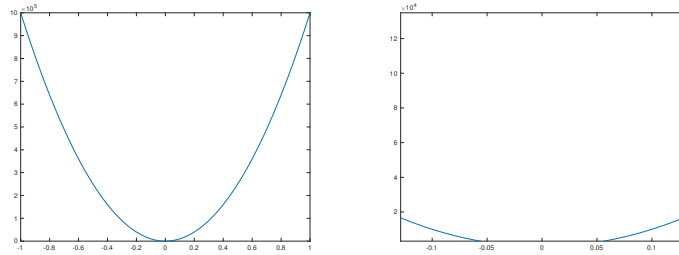


Figura 1: Problemi con grafici e zoom per lo studio di  $f(x) = 0$  per  $f(x) = 10^6 \cdot (x - 1/1000)(x + 1/1000)$ , qualora eseguito via campionamento nei punti  $x_k = -1 + k/100$ , con  $k = 0, \dots, 100$ . Se non si esegue lo zoom, si direbbe che esiste un unico zero, verosimilmente uguale a 0.

## 2. Metodi iterativi e convergenza

Introduciamo di seguito dei metodi iterativi che permettano l'approssimazione di zeri di funzioni continue.

Un metodo iterativo è un tipo di metodo numerico nel quale l'approssimazione  $x_n$  della soluzione al problema matematico esaminato è ottenuta partendo dalle precedenti  $x_0, \dots, x_{n-1}$ .

Usualmente si fornisce un punto di partenza  $x_0$  per tale processo, dopo una qualche analisi teorica, altrimenti lo si sceglie casualmente.

Nel caso della soluzione di equazioni non lineari, ci sono due aspetti specifici di cui è opportuno tenere conto

1. Garanzia della convergenza alla soluzione: se  $\{x_n\}$  è la soluzione generata dal metodo e  $x^*$  è uno zero per  $f$ , si cercano delle condizioni per cui  $x_n \rightarrow x^*$ .
2. Se  $x_n \rightarrow x^*$  si cerca la velocità con cui ciò accade. In tal senso, è importante calcolare il cosiddetto *ordine di convergenza*.

**Definizione.** Supponiamo un metodo per la soluzione di equazioni non lineari, generi una successione  $\{x_k\}$  convergente allo zero  $x^*$  del problema  $f(x^*) = 0$ . Si ponga  $e_k = |x_k - x^*|$ . Il metodo ha *ordine di convergenza* almeno  $p \geq 1$  se esiste  $C > 0$  tale che

$$e_{n+1} \leq e_n^p$$

e ordine esattamente  $p$  se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = L \neq 0$$

In particolare,  $L$  è la *costante asintotica di errore*.

**Nota. 2.1.** Si noti che per  $p = 1$ , necessariamente  $L \leq 1$  e che  $L < 1$  oppure  $C < 1$  sono condizioni sufficienti per la convergenza.

Se

- $p = 1$  la convergenza è detta *lineare*;
- $p > 1$  la convergenza è detta *superlineare*; in particolare per  $p = 2$  si dice *quadratica*, per  $p = 3$  si dice *cubica*.

**Esempio.** Vediamo con un semplice esempio il caso in cui sia per  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{10}, \quad |e_0| = 1$$

cioè

$$|e_{k+1}| = \frac{1}{10} |e_k|^p, \quad |e_0| = 1.$$

Evidentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{10},$$

e il metodo ha ordine di convergenza  $p$ . Se abbiamo  $p = 1$  la successione prodotta sarà :

$$e_0 = 1, e_1 = 1/10, e_2 = 1/100, e_3 = 1/1000, \dots$$

mentre per  $p = 2$  abbiamo facilmente

$$e_0 = 1, e_1 = 1/10, e_2 = 1/1000, e_3 = 1/10^6, \dots,$$

per cui si vede che a parità di  $C$ , maggiore è  $p$  allora minore è l'errore  $e_k$  compiuto a parità di  $k$ .

Si ottiene in scala semilogaritmica, il grafico 1 che evidenzia come *asintoticamente*, ovvero per  $n$  sufficientemente grande, sia da preferire un metodo con  $p$  maggiore possibile.

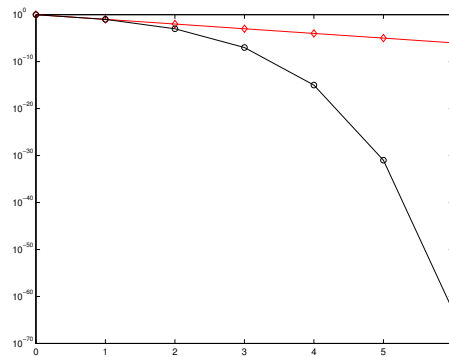


Figura 2: Grafico che illustra l'errore di un metodo con convergenza  $p = 1$  (in rosso a rombi) e  $p = 2$  (in nero a cerchietti), per  $C = 1/10$  ed  $e_0 = 1$ .

L'utilizzo di tale scala offre alcuni suggerimenti. Se appare asintoticamente come

- una retta decrescente vuol dire che la (possibile) convergenza *verosimilmente* ha ordine 1;
- una parabola decrescente, al di sotto di una qualsiasi retta, vuol dire che la (possibile) convergenza *verosimilmente* ha ordine  $> 1$ .

### 3. Metodo di bisezione (o dicotomico)

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e supponiamo  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , ovvero la funzione  $f$  non si annulla agli estremi e assume in  $a$  e  $b$  valori di segno opposto.

Di conseguenza, per il *teorema degli zeri di una funzione continua*, l'intervallo  $(a, b)$  contiene *almeno* uno zero  $x^*$  di  $f$ .

Il metodo di bisezione può essere definito in forma algoritmica come segue (cf. [2, p.408], [12]):

1. si fissa un intervallo  $(a_k, b_k)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots\}$  in cui il segno di  $f(a_k)$  è diverso da quello di  $f(b_k)$ , ovvero

$$f(a_k) \cdot f(b_k) < 0;$$

dal teorema degli zeri di una funzione continua, si sa che esiste almeno un certo  $x^* \in (a_k, b_k)$  che è zero di  $f$ ;

2. si calcola il punto medio  $x_k$  dell'intervallo  $(a_k, b_k)$  ovvero

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2};$$

3. se  $f(x_k) = 0$  si conclude il processo in quanto  $x_k$  è lo zero cercato;
4. se più in generale un certo criterio di arresto è applicabile ed è verificato allora si conclude il processo perchè si reputa che  $x_k$  sia un'approssimazione di uno zero;
5. altrimenti,
  - se  $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$  si pone  $a_{k+1} = a_k$ ,  $b_{k+1} = x_k$ ;
  - se  $f(x_k) \cdot f(b_k) < 0$  si pone  $a_{k+1} = x_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ ;
 e si continua il processo relativamente al nuovo intervallo  $(a_{k+1}, b_{k+1})$ , ripartendo dal punto 1.

**Nota. 3.1.** Si osservi che alla  $k$ -sima iterazione, il metodo di bisezione utilizza esclusivamente il segno di  $f(x_k)$  e non il suo valore effettivo.

#### 3.1. Convergenza del metodo di bisezione

Prima di citare un teorema di convergenza del metodo di bisezione, introduciamo la funzione  $\lceil x \rceil$  che arrotonda il numero reale  $x$  al minore intero non minore di  $x$ .

Ad esempio,

$$\lceil 3.14 \rceil = 4, \quad \lceil -2.13 \rceil = -2, \quad \lceil 8 \rceil = 8, \quad \lceil -4 \rceil = -4.$$

Sussiste il seguente teorema.

**Teorema 3.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Allora se  $x_k$  è la  $k$ -sima iterazione del metodo di bisezione, esiste uno zero  $x^*$  di  $f$  tale che

$$|x_k - x^*| \leq 2^{-(k-1)}(b - a).$$

Inoltre affinché per un certo  $\epsilon > 0$  si abbia  $|x^* - x_k| \leq \epsilon$ , necessitano al più

$$k^*(\epsilon) = \lceil \log_2((b - a)/\epsilon) \rceil - 1$$

iterazioni.

**Dimostrazione.** Osserviamo che ad ogni iterazione il metodo di bisezione dimezza l'ampiezza dell'intervallo  $[a_k, b_k]$  e quindi essendo  $a_0 = a, b_0 = b$

$$\begin{aligned} b_k - a_k &= (1/2)(b_{k-1} - a_{k-1}) = (1/2)^2(b_{k-2} - a_{k-2}) = \\ &\dots = (1/2)^k(b_0 - a_0) = 2^{-k}(b - a). \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $x^* \in (a_k, b_k)$  per ogni  $k = 0, 1, \dots$  per cui essendo  $x_k$  il punto medio di  $(a_k, b_k)$ , e  $x^*$  sta in  $[a_k, x_k]$  o  $[x_k, b_k]$ , abbiamo

$$|x_k - x^*| \leq (b_k - a_k)/2.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &\leq (b_k - a_k)/2 = (1/2)^k(b - a) \cdot (1/2) \\ &= (1/2)^{k+1}(b - a) = 2^{-(k+1)}(b - a). \end{aligned}$$

Affinchè  $2^{-(k+1)}(b - a) \leq \epsilon$  necessariamente

$$|x_k - x^*| \leq 2^{-(k+1)}(b - a) \leq \epsilon.$$

Vediamo qual'è il primo indice  $k^*(\epsilon)$  per cui ciò si verifica.

Essendo il logaritmo in base 2 una funzione continua e crescente in  $(0, +\infty)$ , applicandolo ad ambo i membri della prima disuguaglianza

$$2^{-(k+1)} \leq \frac{\epsilon}{b - a}$$

ricaviamo

$$-(k + 1) = \log_2(2^{-(k+1)}) \leq \log_2\left(\frac{\epsilon}{b - a}\right)$$

ovvero  $k + 1 \geq -\log_2(\frac{\epsilon}{b-a})$  e il primo intero per cui ciò accade è

$$k^*(\epsilon) = \lceil -\log_2(\frac{\epsilon}{b-a}) \rceil - 1 = \lceil \log_2((b-a)/\epsilon) \rceil - 1.$$

Si osservi che tipicamente  $\frac{\epsilon}{b-a} \ll 1$  e quindi  $\log_2(\frac{\epsilon}{b-a}) < 0$ , per cui il numero di iterazioni  $k(\epsilon)$  è effettivamente un numero naturale.

**Nota. 3.3.** Il teorema precedente implica che, se  $f(a) \cdot f(b) < 0$  allora il metodo di bisezione converge a una soluzione  $x^* \in (a, b)$  perchè per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $k^*(\epsilon)$  tale che se  $k \geq k^*(\epsilon)$  allora  $|x_k - x^*| \leq \epsilon$ .

*D'altra parte non ha un ordine di convergenza vero e proprio, ma in media converge linearmente.*

### 3.2. Bisezione: alcuni esempi

**Esempio.** Come primo esempio, calcoliamo la soluzione dell'equazione

$$f(x) = \sin(x) - x = 0.$$

Per quanto detto in precedenza è unica e vale  $x^* = 0$ .

Visto che  $f(-2) = 1.090\dots$ ,  $f(3) = -2.858\dots$ , utilizziamo l'algoritmo di bisezione con  $a_0 = -2$  e  $b_0 = 3$ . Interrompiamo il processo alla iterazione  $n$ -sima se  $f(x_n) = 0$  oppure  $(b_n - a_n)/2 \leq \epsilon$ , con  $\epsilon = 10^{-5}$ . Come detto, il fatto che  $(b_k - a_k)/2 \leq \epsilon$  implica

$$|x_k - x^*| \leq (b_k - a_k)/2 \leq \epsilon.$$

Osserviamo che

$$k^*(\epsilon) = \lceil -\log_2\left(\frac{\epsilon}{b_0 - a_0}\right) \rceil - 1 = \lceil -\log_2(10^{-5}/5) \rceil - 1 = \lceil 18.9316\dots \rceil - 1 = 18.$$

Dal grafico dell'errore assoluto in scala semilogaritmica, si vede che non si può affermare che la convergenza sia lineare (non è approssimativamente una retta).

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$(b_k - a_k)/2$	$\text{sgn}_k$
0	-2.00000000e+00	3.00000000e+00	5.00000000e-01	2.5e+00	-
1	-2.00000000e+00	5.00000000e-01	-7.50000000e-01	1.2e+00	+
2	-7.50000000e-01	5.00000000e-01	-1.25000000e-01	6.2e-01	+
3	-1.25000000e-01	5.00000000e-01	1.87500000e-01	3.1e-01	-
4	-1.25000000e-01	1.87500000e-01	3.12500000e-02	1.6e-01	-
5	-1.25000000e-01	3.12500000e-02	-4.68750000e-02	7.8e-02	+
6	-4.68750000e-02	3.12500000e-02	-7.81250000e-03	3.9e-02	+
7	-7.81250000e-03	3.12500000e-02	1.17187500e-02	2.0e-02	-
8	-7.81250000e-03	1.17187500e-02	1.95312500e-03	9.8e-03	-
9	-7.81250000e-03	1.95312500e-03	-2.92968750e-03	4.9e-03	+
10	-2.92968750e-03	1.95312500e-03	-4.88281250e-04	2.4e-03	+
11	-4.88281250e-04	1.95312500e-03	7.32421875e-04	1.2e-03	-
12	-4.88281250e-04	7.32421875e-04	1.22070312e-04	6.1e-04	-
13	-4.88281250e-04	1.22070312e-04	-1.83105469e-04	3.1e-04	+
14	-1.83105469e-04	1.22070312e-04	-3.05175781e-05	1.5e-04	+
15	-3.05175781e-05	1.22070312e-04	4.57763672e-05	7.6e-05	-
16	-3.05175781e-05	4.57763672e-05	7.62939453e-06	3.8e-05	-
17	-3.05175781e-05	7.62939453e-06	-1.14440918e-05	1.9e-05	+
18	-1.14440918e-05	7.62939453e-06	-1.90734863e-06	9.5e-06	+

Tabella 1: Studio dell'equazione  $\sin(x) - x = 0$ , in  $(0, 1)$  con  $\text{toll} = 10^{-5}$ . Si osservi che  $f(a_k) > 0$ ,  $f(b_k) < 0$  per ogni  $k$ . E' interessante guardare come si passi da  $(a_k, b_k)$  a  $(a_{k+1}, b_{k+1})$ , al variare di  $\text{sgn}_k = \text{sgn}(f(x_k))$

Una particolarità di quest'esempio è che posto  $e_k = |x_k - x^*|$ , il rapporto  $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}$  assume alternativamente valori 0.6 e  $0.\overline{6} = 0.666\dots$  e quindi non esiste il limite  $\lim_k \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}$ . Conseguentemente, il metodo di bisezione non ha convergenza lineare.

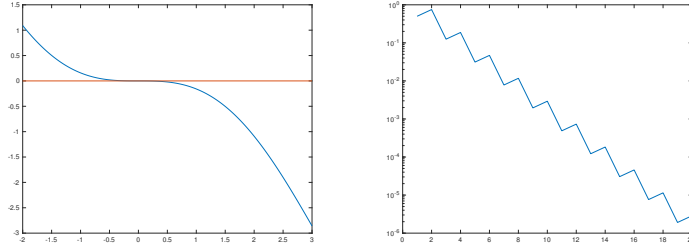


Figura 3: A sinistra, grafico della funzione  $\sin(x) - x = 0$ , in  $[-2, 3]$ . A destra errore assoluto  $|x_k - x^*|$  in scala semilogaritmica.

**Esempio.** Quale esempio, vogliamo calcolare la soluzione dell'equazione  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ . Osserviamo che  $f$  è una funzione continua e crescente, che  $f(0) = -2$ ,  $f(1) = \exp(1) - 2 + 1 = 1.7182\dots$ , e di conseguenza ha un unico zero e questo sta in  $(0, 1)$ .

Quindi utilizziamo l'algoritmo di bisezione con  $a_0 = 0$  e  $b_0 = 1$ . Interrompiamo il processo alla iterazione  $n$ -sima se  $f(x_n) = 0$  oppure  $(b_n - a_n)/2 \leq \epsilon$ , con  $\epsilon = 10^{-5}$ .

La soluzione è  $x^* \approx 0.4428544010023885$ . Osserviamo che

$$k^*(\epsilon) = \lceil -\log_2\left(\frac{\epsilon}{b_0 - a_0}\right) \rceil - 1 = \lceil -\log_2(10^{-5}) \rceil - 1 = \lceil 16.6096 \rceil - 1 = 16.$$

Dal grafico dell'errore assoluto in scala semilogaritmica, si vede che non si può affermare che la convergenza sia lineare (non è approssimativamente una retta).

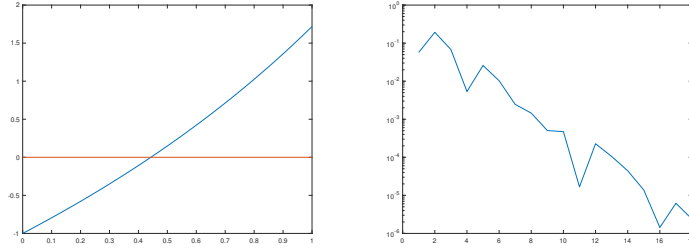


Figura 4: A sinistra, grafico della funzione  $\exp(x) - 2 + x = 0$ , in  $[0, 1]$ . A destra errore assoluto  $|x_k - x^*|$  in scala semilogaritmica.

### 3.3. Alcuni criteri di arresto per il metodo di bisezione

Esistono vari criteri di arresto per il metodo di bisezione. Fissata una tolleranza  $\text{toll}$  dall'utente, ad esempio  $\text{toll} = 10^{-6}$ , si può terminare il processo qualora

- $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$  (criterio dello step);
- $|f(x_k)| \leq \epsilon$  (criterio del residuo);



$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$(b_k - a_k)/2$	$\text{sgn}_k$
0	0.00000000e + 00	1.00000000e + 00	5.00000000e - 01	5.0e - 01	+
1	0.00000000e + 00	5.00000000e - 01	2.50000000e - 01	2.5e - 01	-
2	2.50000000e - 01	5.00000000e - 01	3.75000000e - 01	1.2e - 01	-
3	3.75000000e - 01	5.00000000e - 01	4.37500000e - 01	6.2e - 02	-
4	4.37500000e - 01	5.00000000e - 01	4.68750000e - 01	3.1e - 02	+
5	4.37500000e - 01	4.68750000e - 01	4.53125000e - 01	1.6e - 02	+
6	4.37500000e - 01	4.53125000e - 01	4.45312500e - 01	7.8e - 03	+
7	4.37500000e - 01	4.45312500e - 01	4.41406250e - 01	3.9e - 03	-
8	4.41406250e - 01	4.45312500e - 01	4.43359375e - 01	2.0e - 03	+
9	4.41406250e - 01	4.43359375e - 01	4.42382812e - 01	9.8e - 04	-
10	4.42382812e - 01	4.43359375e - 01	4.42871094e - 01	4.9e - 04	+
11	4.42382812e - 01	4.42871094e - 01	4.42626953e - 01	2.4e - 04	-
12	4.42626953e - 01	4.42871094e - 01	4.42749023e - 01	1.2e - 04	-
13	4.42749023e - 01	4.42871094e - 01	4.42810059e - 01	6.1e - 05	-
14	4.42810059e - 01	4.42871094e - 01	4.42840576e - 01	3.1e - 05	-
15	4.42840576e - 01	4.42871094e - 01	4.42855835e - 01	1.5e - 05	+
16	4.42840576e - 01	4.42855835e - 01	4.42848206e - 01	7.6e - 06	-

Tabella 2: Studio dell'equazione  $\exp(x) - 2 + x = 0$ , in  $(0, 1)$  con  $\epsilon = 10^{-5}$ . Si osservi che  $f(a_k) < 0$ ,  $f(b_k) > 0$ , e si guardi al variare di  $\text{sgn}_k = \text{sgn}(f(x_k))$  come si passi da  $(a_k, b_k)$  a  $(a_{k+1}, b_{k+1})$

- $\frac{|f(x_k)|}{w_k} \leq \epsilon$  ove  $w_k = \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{b_k - a_k} \approx |f'(x^*)|$ , (criterio del residuo pesato); vedremo poi un esempio.

**Nota. 3.4.** Supponiamo sia  $(a_0, b_0)$  l'intervallo iniziale. Dopo la prima iterazione è noto esclusivamente  $x_0$  e quindi

- non è applicabile il criterio dello step in quanto necessita pure di  $x_1$ , che è quindi utilizzabile a partire solo dalla seconda iterazione;
- i criteri del residuo e del residuo pesato sono applicabili in quanto richiedono esclusivamente il calcolo di  $f(x_0)$  e possibilmente di  $w_0$  che dipende esclusivamente da  $f(a_0)$ ,  $f(b_0)$ .

**Esempio.** Come esempio, consideriamo tre funzioni:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= x^2 - 2 \\
 f_2(x) &= 10^{-8} \cdot (x^2 - 2) \\
 f_2(x) &= 10^8 \cdot (x^2 - 2)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Non è difficile vedere che hanno tutte quali zeri  $\pm\sqrt{2}$ , ma che in termini di grafico,

1. la prima non ha un grafico molto ripido vicino alla soluzione (in effetti la derivata in  $\sqrt{2}$  vale  $2\sqrt{2}$ ),
2. la seconda è molto piatta vicino alla soluzione (la derivata in  $\sqrt{2}$  vale  $2\sqrt{2} \cdot 10^{-8}$ ),

3. la terza è molto piatta vicino alla soluzione (la derivata in  $\sqrt{2}$  vale  $2\sqrt{2} \cdot 10^{+8}$ ).

Il metodo di bisezione, implementato con ognuno dei test di arresto porge i seguenti risultati, in cui

- `res` indica il test del residuo,
- `wres` indica il test del residuo pesato,
- `step` indica il criterio dello step.

Abbiamo interrotto il processo se il metodo aveva fatto 10000 iterazioni, o si fosse verificato il criterio di arresto con tolleranza `tol=10-10`.

test	$x_n$	$ x_n $	$ f(x_n) $	$n$
res	1.414213562384248e + 00	1.115e - 11	3.154e - 11	29
wres	1.414213562384248e + 00	1.115e - 11	3.154e - 11	29
step	1.414213562326040e + 00	4.706e - 11	1.331e - 10	34

Tabella 3: La funzione  $f_1$  non è piatta o ripida nei pressi dello zero  $x^*$  e i test di arresto sono circa equivalenti.

test	$x_n$	$ x_n $	$ f(x_n) $	$n$
res	1.414062500000000e + 00	1.511e - 04	4.272e - 12	7
wres	1.414213562384248e + 00	1.115e - 11	3.154e - 19	29
step	1.414213562326040e + 00	4.706e - 11	1.331e - 18	34

Tabella 4: La funzione  $f_2$  è molto piatta nei pressi dello zero  $x^*$  e il test del residuo risulta molto impreciso, effettuando poche iterazioni, offrendo però una scarsa approssimazione di  $x^*$ . Gli altri due test d'arresto risultano appropriati.

test	$x_n$	$ x_n $	$ f(x_n) $	$n$
res	1.414213562373095e + 00	2.220e - 16	4.441e - 08	10000
wres	1.414213562384248e + 00	1.115e - 11	3.154e - 03	29
step	1.414213562326040e + 00	4.706e - 11	1.331e - 02	34

Tabella 5: La funzione  $f_3$  è molto ripida nei pressi dello zero  $x^*$  e il test del residuo risulta molto conservativo, superando il numero massimo di iterazioni concesse, nonostante abbia calcolato una ottima approssimazione di  $x^*$ . Gli altri due test d'arresto risultano appropriati.

I risultati mostrano

1. la superiorità del test basato sul residuo pesato, rispetto al test del residuo, qualora la funzione abbia derivate molto grandi o molto piccole in prossimità della soluzione;
2. l'invarianza rispetto alla pendenza del metodo dello step, che in effetti non ha a che fare con valutazioni delle funzioni  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  (rifletterci su).

#### 4. Metodo di Newton per la risoluzione di equazioni nonlineari

Supponiamo che  $f$  sia derivabile con continuità su un intervallo  $(a, b)$  di  $\mathbb{R}$  e sia  $f'(x)$  la derivata prima di  $f$  valutata nel generico punto  $x \in (a, b)$ .

Osserviamo che se  $x^*$  è uno zero di  $f$  in  $[a, b]$  e se  $f$  è sufficientemente regolare in  $[a, b]$ , ovvero possiede un adeguato numero di derivate successive, allora dalla formula di Taylor centrata in  $x_k \in [a, b]$ , per un certo  $\xi_k$  che sta nel più piccolo intervallo aperto contenente  $x_k, x^*$ , abbiamo

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2$$

Di conseguenza, tralasciando i termini di ordine superiore

$$0 \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k)$$

e quindi se  $f'(x_k) \neq 0$ , dopo facili conti

$$x^* \approx x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Il metodo di Newton genera la successione

$$x_{k+1} = x_k + h_k, \quad h_k = -f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

supposto che sia  $f'(x_k) \neq 0$  per  $k = 0, 1, \dots$  (cf. [1, p.58], [13]).

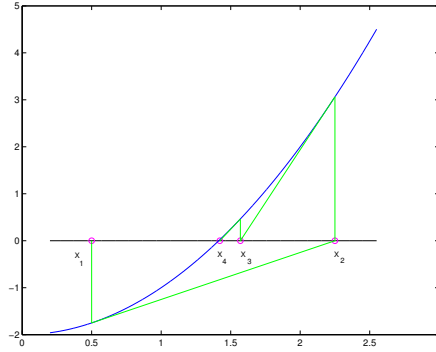


Figura 5: Interpretazione geometrica del metodo di Newton, alla iterazione  $n$ -sima.

**Nota. 4.1.** Il metodo ha una interpretazione geometrica. Alla  $k$ -sima iterazione:

1. si calcola  $f(x_{k-1})$ ;
2. si disegna la retta tangente  $\gamma_k$  alla curva definita dalle coppie  $(x, f(x))$ , nel punto  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ;
3. si pone  $x_k$  l'intersezione di  $\gamma_k$  con l'asse delle ascisse.

#### 4.1. Metodo di Newton: criteri di arresto

Le iterazioni del metodo di Newton terminano tipicamente secondo due criteri di arresto, quello dello step ovvero in cui, fissata una tolleranza  $\text{tol}$  si ferma il processo qualora

$$|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$$

e quello del residuo, in cui ciò accade qualora

$$|f(x_k)| < \text{tol}.$$

E' importante notare che per il metodo di Newton si ha che il criterio dello step è molto simile a un residuo pesato, in quanto per  $w_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \approx f'(x_k)$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \approx -\frac{f(x_k)}{w_k}.$$

#### 4.2. Metodo di Newton: un teorema di convergenza locale

Per quanto riguarda la velocità di convergenza si dimostra il seguente teorema di *convergenza locale* (cf. [1], p. 60).

Un tale asserto mostra come sia possibile risolvere numericamente l'equazione  $f(x) = 0$ , partendo da un punto  $x_0$  appartenente a un certo intervallo  $I$  contenente la radice  $x^*$ . In questi teoremi, a differenza di quelli detti di *convergenza globale*, si sa solo che tale  $I$  esiste, ma in generale non è noto esplicitamente.

**Teorema 4.2.** *Si supponga*

1.  $f \in C^2([a, b])$ ;
2.  $x^* \in (a, b)$  sia uno zero semplice di  $f$ , ovvero  $f(x^*) = 0$ ,  $f'(x^*) \neq 0$ .

*Allora per  $x_0 \in [a, b]$  sufficientemente vicino a  $x^*$  le iterazioni del metodo di Newton*

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

*sono ben definite e convergono almeno quadraticamente a  $x^*$ . Se  $f''(x^*) \neq 0$ , allora la convergenza è esattamente quadratica.*

**Dimostrazione.** La dimostrazione consiste nel

1. trovare un intervallo  $\mathcal{I}_1$  contenente lo zero in cui la derivata non si annulla;
2. determinare un sottointervallo  $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}_1$  per cui se  $x_n \in \mathcal{I}_2$  allora l'iterazione  $x_{n+1}$  del metodo di Newton fa ancora parte di  $\mathcal{I}_2$ ;
3. dedurre la convergenza quadratica da stime dell'errore in quest'intervallo.

Vediamo i dettagli della dimostrazione.

Essendo lo zero semplice, per definizione  $f'(x^*) \neq 0$ . Di conseguenza, per il teorema di permanenza del segno, esiste un intorno simmetrico chiuso di  $x^*$

$$\mathcal{I}_1 = [x^* - \delta, x^* + \delta]$$

con la proprietà che  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathcal{I}_1$ .

Osserviamo che dalla formula di Taylor centrata in  $x_n$  e dalla definizione della successione del metodo di Newton, se  $x_n \in \mathcal{I}_1$ , allora per un certo  $\xi_n \in \mathcal{I}_1$  (che in effetti sta nel più piccolo intervallo aperto contenente  $x^*$  e  $x_n$  e di conseguenza pure in  $\mathcal{I}_1$ )

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2/2$$

e quindi dividendo ambo i membri per  $f'(x_n) \neq 0$  (poichè se  $x_n \in \mathcal{I}_1$  allora  $f'(x) \neq 0$ ), ricordando la definizione del metodo di Newton

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(x^* - x_n)^2 \\ &= x^* - x_{n+1} + \frac{f''(\xi_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(x^* - x_n)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Di conseguenza, posto  $e_n = x_n - x^*$ , da (3) abbiamo

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = \frac{f''(\xi_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(x^* - x_n)^2 = \frac{f''(\xi_n)}{2 \cdot f'(x_n)}e_n^2$$

e quindi

$$|e_{n+1}| = \left| \frac{f''(\xi_n)}{2 \cdot f'(x_n)} \right| |e_n|^2.$$

Per il teorema di Weierstrass, essendo  $f'$  e  $f''$  funzioni continue, esistono finiti

$$\max_{x \in \mathcal{I}_1} |f''(x)|$$

$$\min_{y \in \mathcal{I}_1} |f'(y)|$$

per cui è pure finito

$$C := \frac{\max_{x \in \mathcal{I}_1} |f''(x)|}{\min_{y \in \mathcal{I}_1} |f'(y)|}$$

e ovviamente, visto che  $\xi_n, x_n \in \mathcal{I}_1$

$$C \geq \frac{f''(\xi_n)}{2 \cdot f'(x_n)}.$$

Possiamo quindi affermare che se  $x_n \in \mathcal{I}_1$  allora

$$|e_{n+1}| \leq C|e_n|^2.$$

Di conseguenza, per definizione, l'ordine di convergenza è almeno  $p = 2$ , ovvero almeno quadratica.

Se  $f''(x^*) \neq 0$ , allora  $C := \frac{\max_{x \in \mathcal{I}_1} |f''(x)|}{\min_{y \in \mathcal{I}_1} |f'(y)|} > 0$ .

Ricordiamo ora che nell'intorno  $\mathcal{I}_1 = [x^* - \delta, x^* + \delta]$  di  $x^*$  si ha  $f' \neq 0$  (cioè  $f'$  ha segno costante).

Poniamo per un qualsiasi  $\epsilon \in (0, 1)$

$$\gamma = \min(\delta, (1 - \epsilon)/C) > 0.$$

Se  $x_0 \in \mathcal{I}_2 \equiv [x^* - \gamma, x^* + \gamma] \subseteq \mathcal{I}_1$  (si osservi che  $\gamma < \delta$ ) allora essendo

$$0 \leq C\gamma = C \cdot \min(\delta, (1 - \epsilon)/C) = \min(C\delta, 1 - \epsilon) < 1$$

e dal fatto che se  $x_0 \in [x^* - \gamma, x^* + \gamma] \subseteq \mathcal{I}_1$  necessariamente

$$|e_0| = |x_0 - x^*| \leq \gamma$$

ricaviamo

$$|e_1| \leq C|e_0|^2 = (C|e_0|) \cdot |e_0| \leq \underbrace{(C\gamma)}_{<1} \gamma < \gamma$$

per cui tutte le iterazioni  $x_n$  del metodo di Newton stanno nell'intervallo  $\mathcal{I}_2 = [x^* - \gamma, x^* + \gamma]$  ed essendo  $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}_1$  la successione descritta dal metodo di Newton è ben definita (in quanto ciò implica che per ogni  $n$ ,  $f'(x_n) \neq 0$ ).

Anzi, da  $x_0 \in \mathcal{I}_2$  ricaviamo  $|e_0| \leq \gamma < 1$ , ed essendo

$$0 \leq C|e_{n+1}| \leq (C^2|e_n|^2) = (C|e_n|)^2 \leq \dots \leq (C|e_0|)^{2^{n+1}}$$

visto che  $C|e_0| \leq C\gamma \leq 1 - \epsilon < 1$ , implica

$$(C|e_0|)^{2^{n+1}} \rightarrow 0$$

per il teorema del confronto tra limiti,  $|e_{n+1}| \rightarrow 0$  cioè  $x_{n+1} \rightarrow x^*$ . Inoltre si ha che per un certo  $n^*$ , se  $n \geq n^*$ , è  $x_n = x^*$  oppure dalla continuità di  $f'$  e  $f''$  nell'intervallo  $\mathcal{I}_2 = [x^* - \gamma, x^* + \gamma]$

$$\lim_n \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim_n \left| \frac{f''(\xi_n)}{2 \cdot f'(x_n)} \right| = \frac{|f''(x^*)|}{2 \cdot |f'(x^*)|} \neq 0$$

cioè la convergenza è esattamente quadratica.

#### 4.3. Metodo di Newton: un teorema di convergenza globale

Dimostriamo un teorema di convergenza globale, che permette di risolvere numericamente l'equazione  $f(x) = 0$ , partendo da un punto  $x_0$  appartenente a un ben determinato intervallo  $I$  contenente la radice  $x^*$ . In questi teoremi, a differenza di quelli detti di *convergenza locale*,  $I$  è noto esplicitamente.

**Teorema 4.3.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che gode delle seguente proprietà

1.  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ ;
2.  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Allora

1. esiste uno ed un solo  $x^* \in (a, b)$  tale che  $f(x^*) = 0$ . Tale zero è semplice.
2. per  $x_0 \in [x^*, b]$  il metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

è ben definito.

3. La successione  $\{x_n\}$  è decrescente e converge a  $x^*$ .

**Dimostrazione.**

1. Essendo  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ , allora la funzione  $f'$  è continua e monotona crescente in  $[a, b]$ . Di conseguenza,

- se  $f' > 0$  in  $[a, b]$  si ha che pure  $f$  è monotona crescente e quindi in  $(a, b)$  c'è un unico zero  $x^*$  poichè  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ ;
- se  $f'$  non ha segno costante in  $[a, b]$  essendo monotona crescente ha un unico zero. Di conseguenza, per la sua convessità,  $f$  ha un unico minimo  $x_{\min} \in [a, b]$ . Quindi dalla monotonia crescente di  $f'$  in  $[x_{\min}, b]$  e dal fatto che  $f(x_{\min}) \leq f(a)$  e  $f(x_{\min}) \leq 0 < f(b)$  abbiamo che vi è un unico zero in  $x^* \in [a, b]$ .

Osserviamo che per quanto appena visto,  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in [x^*, b]$  e quindi in particolare che lo zero  $x^*$  è semplice.

2. Questo risultato segue dal fatto che la funzione  $f'$  è strettamente positiva in  $[x^*, b]$ .
3. Sia  $n \geq 0$  e  $x_n \geq x^*$ . Dalla formula di Taylor, essendo  $f''(x) > 0$ , per ogni  $x \in [a, b]$ , deduciamo che per  $\xi_n$  nel più piccolo intervallo aperto contenente  $x_n$  e  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  si ha

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) + f''(\xi_n) \cdot \frac{(\xi_n - x_n)^2}{2} \\ &> f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) = 0 = f(x^*). \end{aligned} \quad (4)$$

Poichè per  $x < x^*$  la funzione  $f$  è negativa, necessariamente ciò implica che  $x_{n+1} > x^*$ . Inoltre la successione  $\{x_n\}$  è strettamente decrescente perchè da  $f(x_n) > 0$  e  $f'(x_n) > 0$  abbiamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n.$$

Poichè la successione  $\{x_n\}$  è decrescente e limitata inferiormente da  $x^*$ , essa ammette limite  $\xi^*$ . Ma allora per la continuità di  $f$  e  $f'$

$$\xi^* = \lim_n x_{n+1} = \lim_n x_n - \lim_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \xi^* - \frac{f(\xi^*)}{f'(\xi^*)}$$

ed essendo  $f'(\xi^*) \neq 0$  poichè tale zero è semplice abbiamo  $f(\xi^*) = 0$ . Ma  $x^*$  è l'unico zero di  $f$  e quindi  $\xi^* = x^*$  cioè il metodo di Newton converge decrescentemente a  $x^*$ .

**Teorema 4.4.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che gode delle seguente proprietà

1.  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$ ;
2.  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Allora

1. esiste uno ed un solo  $x^* \in (a, b)$  tale che  $f(x^*) = 0$ . Tale zero è semplice.
2. per  $x_0 \in [x^*, b]$  il metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

è ben definito.

3. La successione  $\{x_n\}$  è crescente e converge a  $x^*$ .

**Dimostrazione.** Si consideri

$$g(y) = f(-y), \quad y \in [-b, -a].$$

Poniamo quindi  $\tilde{a} = -b, \tilde{b} = -a$  e osserviamo che

- $g(\tilde{a}) = g(-b) = f(-(-b)) = f(b) < 0$ ;
- $g(\tilde{b}) = g(-a) = f(-(-a)) = f(a) > 0$ ;
- se  $y \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$  allora derivando due volte  $g(y) = f(-y)$  abbiamo

$$g''(y) = f''(-y)$$

e siccome  $y \in [\tilde{a}, \tilde{b}] \equiv [-b, -a]$ , necessariamente  $-y \in [a, b]$ , per cui

$$g''(y) > 0, \quad y \in [\tilde{a}, \tilde{b}].$$

Per il teorema precedente, l'equazione  $g(y) = 0$  ha un'unica soluzione  $y^* \in [\tilde{a}, \tilde{b}] = [-b, -a]$ . Ma allora, se poniamo  $x^* = -y^*$  ricaviamo

$$f(x^*) = f(-(-x^*)) = f(-y^*) = g(y^*) = 0$$

cioè  $x^*$  è uno zero di  $f$ .



Ed è pure l'unico zero, perchè se ce ne fosse un'altro diverso da  $x^*$ , diciamo  $\bar{x} \in [a, b]$ , allora  $-\bar{x} \in [-b, -a] \equiv [\tilde{a}, \tilde{b}]$  sarebbe un altro zero di  $g$  in  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$  distinto da  $y^* = -x^*$  mentre sappiamo che  $y^*$  è l'unico.

Il teorema precedente dice che, partendo da  $y_0 \in [y^*, \tilde{b}]$ , la successione determinata dal metodo di Newton

$$y_{k+1} = y_k - \frac{g(y_k)}{g'(y_k)} = y_k - \frac{f(-y_k)}{f'(-y_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

è decrescente e converge all'unico zero  $y^*$  di  $g$ .

Poniamo  $x_k = -y_k$  e ricaviamo da  $f'(x) = -g'(-x)$

$$-x_{k+1} = -x_k - \frac{f(-(-x_k))}{-f'(-(-x_k))}, \quad k = 0, 1, \dots$$

ovvero

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

cioè la successione del metodo di Newton applicata a  $f$ . Poichè  $x_k = -y_k$  e  $y_k$  è decrescente, si ha che  $x_k$  è crescente e converge a  $x^* = -y^*$ , visto che

$$\lim_k x_k = \lim_k -y_k = -\lim_k y_k = -y^*.$$

**Teorema 4.5.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che gode delle seguente proprietà

1.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ;
2.  $f''(x) < 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Allora

1. esiste uno ed un solo  $x^* \in (a, b)$  tale che  $f(x^*) = 0$ . Tale zero è semplice.
2. se  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ , per  $x_0 \in [a, x^*]$ , la successione  $\{x_k\}$  generata dal metodo di Newton è ben definita, crescente e converge a  $x^*$ ,
3. se  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ , per  $x_0 \in [x^*, b]$ , la successione  $\{x_k\}$  generata dal metodo di Newton è ben definita, decrescente e converge a  $x^*$ .

**Traccia.** Basta applicare la tecnica utilizzata nella dimostrazione precedente, per  $g(x) = -f(x)$ . Infatti,  $g''(x) = -f''(x)$ , e se  $g(a) > 0$ ,  $g(b) < 0$  si applica il Teorema 4.3, altrimenti il Teorema 4.4. In particolare si prova che  $f$  ha un unico zero  $x^* \in [a, b]$  e che qualora

- si abbia  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ , si vede che per  $x_0 \in [a, x^*]$ , la successione  $\{x_k\}$  generata dal metodo di Newton è crescente e converge a  $x^*$ ,
- si abbia  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ , si vede che per  $x_0 \in [x^*, b]$ , la successione  $\{x_k\}$  generata dal metodo di Newton è decrescente e converge a  $x^*$ .

**Nota. 4.6.** I teoremi precedenti si possono mostrare geometricamente, caso per caso, osservando che le tangenti alla curva  $y = f(x)$  stanno sempre sopra o sotto il grafico, e che la successione  $\{x_k\}$  è monotona e limitata e quindi ha limite finito che si vede facilmente coincidere proprio con lo zero  $x^*$  di  $f$ .

**Nota. 4.7.** Esistono molti teoremi di convergenza globale per il metodo di Newton, oltre a quelli citati (cf. [3], [4], [16]). Ad esempio, in [2, p. 419], si mostra che

**Teorema 4.8.** Sia  $f \in C^2([a, b])$ , con  $[a, b]$  intervallo chiuso e limitato. Se

1.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ;
2.  $f'(x) \neq 0$ , per ogni  $x \in [a, b]$ ;
3.  $f''(x) \geq 0$  o  $f''(x) \leq 0$ , per ogni  $x \in [a, b]$ ;
4.  $|f(a)/f'(a)| < b - a$  e  $|f(b)/f'(b)| < b - a$ ,

allora il metodo di Newton converge all'unica soluzione  $x^*$  in  $[a, b]$ , per ogni  $x_0 \in [a, b]$ .

**Nota. 4.9.** Osserviamo che il metodo di Newton non ha sempre convergenza quadratica, come nel caso del problema  $f(x) = 0$  in cui  $x^*$  sia uno zero avente molteplicità  $p > 1$  cioè tale che

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(p-1)}(x^*) = 0;$$

quale esempio si ponga  $f(x) = \log(x-1)(x-2)$ ; si verifica facilmente che  $f'' = f''' = 0$  e che la convergenza non è quadratica; per convincersene si applichi il metodo di Newton a tale esempio e si esegua il grafico dell'errore compiuto in scala semilogaritmica;

**Nota storica. 4.10.** Il metodo di Newton è anche noto come metodo di Newton-Raphson, in quanto sviluppato da Newton nell'opera *Analysis Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1666, scritto nel 1671 e quindi pubblicato nel 1711 da William Jones) per calcolare la radice  $2.09455148154233\dots$  di  $x^3 - 2x - 5$ . Il metodo forse derivava da alcune idee di Francois Viète che a sua volta si rifaceva al lavoro del matematico persiano Sharaf al-Din al-Tusi.

Erone di Alexandria utilizzava idee in qualche modo simili.

La questione venne ripresa nel *De methodis fluxionum et serierum infinitarum* (scritto nel 1671, tradotto e pubblicato come *Method of Fluxions* nel 1736 da John Colson). Il metodo descritto era molto differente da quello attuale, e veniva sostanzialmente applicato a polinomi [2, p. 413], [15].

Il metodo di Newton venne pure pubblicato nel *A Treatise of Algebra both Historical and Practical* (1685) di John Wallis.

Nel 1690, Joseph Raphson pubblicò nel *Analysis aequationum universalis* una versione maggiormente algoritmica, iterativa e meno complicata di quella di Newton.

Quindi Simpson, nel 1740, generalizzò queste idee per equazioni nonlineari e sistemi nonlineari di piccole dimensioni (cf. [10]).

Nel 1768, Jean-Raymond Mourgaille nel *Traité de la résolution des équations numériques* cominciò a discutere la convergenza del metodo di Newton, sottolineando il legame con l'aspetto geometrico delle tangenti.

Pure Fourier diede impulso a questi studi nel *Question d'analyse algébrique* (1818).

#### 4.4. Metodo di Newton: alcuni esempi

**Esempio.** Consideriamo il problema  $f(x) = \sin(x) - x = 0$  che abbiamo visto avere quale unica soluzione  $x^* = 0$ . Visto che  $f'(x) = \cos(x) - 1$ , le iterate del metodo di Newton saranno

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin(x_k) - x_k}{\cos(x_k) - 1}$$

Osserviamo che il processo non è ben definito se  $\cos(x_k) - 1 = 0$ , ovvero  $x_k = m\pi$  con  $m \in \mathbb{Z}$ . Interrompiamo il metodo quando  $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-6}$  e quale punto iniziale poniamo  $x_0 = 3$ .

Si noti che  $x^* = 0$  è uno zero multiplo in quanto  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Questo, per un teorema che vedremo successivamente causerà una povera performance da parte del metodo.

Sperimentalmente  $|e_{k+1}|/|e_k| \approx 0.667$  per  $k > 1$  e quindi almeno empiricamente possiamo affermare che il metodo di Newton, relativamente a questo esempio, ha convergenza lineare.

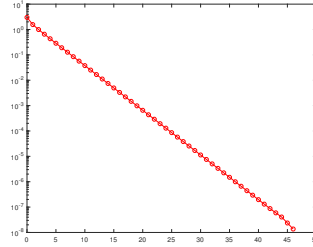


Figura 6: Errore assoluto  $|x_k - x^*|$  dove  $x_k$  è la  $k$ -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di  $f(x) = \sin(x) - x = 0$ , in scala semilogaritmica.

**Esempio.** Consideriamo il problema  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$  che sappiamo avere un'unica soluzione  $x^* \approx 0.4428544010023885$ . Da  $f'(x) = \exp(x) - 1$ , il metodo di Newton definisce la successione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\exp(x_k) - 2 + x_k}{\exp(x_k) - 1}$$

Osserviamo che il processo non è ben definito se  $\exp(x_k) - 1 = 0$ , ovvero  $x_k = 0$ . Essendo  $f'(x) = \exp(x^*) - 1 = 0.557145598997611 \dots$  lo zero è semplice.

Relazioniamo il test in tabella a quanto noto per la convergenza.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	3.0000000000000000e + 00	3.00e + 00	—	-2.86e + 00
1	1.563371471588948e + 00	1.56e + 00	1.44e + 00	-5.63e - 01
2	9.957580269725619e - 01	9.96e - 01	5.68e - 01	-1.57e - 01
3	6.524666397563195e - 01	6.52e - 01	3.43e - 01	-4.53e - 02
4	4.318439019482230e - 01	4.32e - 01	2.21e - 01	-1.33e - 02
5	2.869951130449173e - 01	2.87e - 01	1.45e - 01	-3.92e - 03
6	1.910666484344176e - 01	1.91e - 01	9.59e - 02	-1.16e - 03
7	1.273001625888427e - 01	1.27e - 01	6.38e - 02	-3.44e - 04
8	8.484384021569123e - 02	8.48e - 02	4.25e - 02	-1.02e - 04
9	5.655577232707287e - 02	5.66e - 02	2.83e - 02	-3.01e - 05
10	3.770183802430618e - 02	3.77e - 02	1.89e - 02	-8.93e - 06
11	2.513396320297106e - 02	2.51e - 02	1.26e - 02	-2.65e - 06
12	1.675579904767051e - 02	1.68e - 02	8.38e - 03	-7.84e - 07
13	1.117048042787600e - 02	1.12e - 02	5.59e - 03	-2.32e - 07
14	7.446971464636467e - 03	7.45e - 03	3.72e - 03	-6.88e - 08
15	4.964643054317002e - 03	4.96e - 03	2.48e - 03	-2.04e - 08
...	...	...	...	...
33	3.359297519803817e - 06	3.36e - 06	1.68e - 06	-6.32e - 18
34	2.239575075072224e - 06	2.24e - 06	1.12e - 06	-1.87e - 18

Tabella 6: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione  $x^* = 0$  di  $f(x) = \sin(x) - x = 0$  è molto lenta, ed è causata dal fatto che la soluzione è multipla ovvero  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Il test del residuo non assicura che  $|x_n - x^*|$  sia piccolo, e questo è dovuto al fatto che la funzione, nei pressi della soluzione è molto piatta (la derivata è nulla!).

1.  $x^* = 0.4428544010023885 \dots$  è uno zero semplice;
2.  $f'(x) = \exp(x) + 1 > 0$ .
3.  $f''(x) = \exp(x) > 0$ .

La funzione è quindi convessa, strettamente crescente e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  mentre  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Di conseguenza, di sicuro esistono  $a$  e  $b$  nel dominio per cui  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Ad esempio, possiamo porre come nel caso di bisezione  $a = 0$ ,  $b = 1$  in quanto  $f(0) = -2$ ,  $f(1) = \exp(1) - 2 + 1 = 1.7182 \dots$

Il teorema di convergenza globale 4.3 dice che partendo da  $x_0 = b = 1$  otterremo una successione decrescente, convergente a  $x^*$  che per il teorema di convergenza locale avrà convergenza quadratica, come si può verificare dal relativo grafico e dalla sua tabella.

**Esempio.** Quale terzo esempio calcoliamo la radice quadrata di 2, ovvero la soluzione positiva di  $f(x) = x^2 - 2$ , che risulta essere  $x^* = 1.414213562373095 \dots$ . Visto che  $f'(x) = 2x$ , le iterazioni del metodo di Newton saranno

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

che saranno indefinite qualora per qualche  $k$  si abbia  $x_k = 0$ . Ovviamente  $f'(x^*) = 2\sqrt{2} \neq 0$  e quindi lo zero è semplice.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	1.0000000000000000e + 00	5.57e - 01	—	1.72e + 00
1	5.378828427399902e - 01	9.50e - 02	4.62e - 01	2.50e - 01
2	4.456167485265452e - 01	2.76e - 03	9.23e - 02	7.07e - 03
3	4.428567246451099e - 01	2.32e - 06	2.76e - 03	5.94e - 06
4	4.428544010040325e - 01	1.64e - 12	2.32e - 06	4.20e - 12
5	4.428544010023886e - 01	1.11e - 16	1.64e - 12	1.11e - 16

Tabella 7: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione  $x^* = 0$  di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$  è molto rapida ovvero  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Il test del residuo è molto accurato, mentre quello dello step individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente. Ad esempio, alla quinta iterata dice correttamente che l'errore alla quarta era  $1.64e - 12$ . Si osservi che la successione  $\{x_n\}$  è in effetti decrescente per  $n = 0, 1, \dots, 5$ .

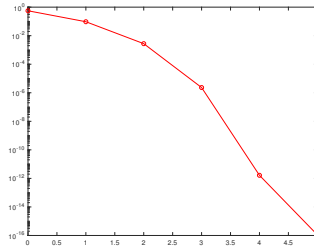


Figura 7: Errore assoluto  $|x_k - x^*|$  dove  $x_k$  è la  $k$ -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$ , in scala semilogaritmica.

Osserviamo che il metodo calcola la radice di 2 utilizzando esclusivamente il prodotto  $x_k^2 = x_k \cdot x_k$ , la sottrazione e la divisione, ed era un metodo comune per calcolare più in generale, con semplici modifiche, le radici quadrate di numeri non negativi.

Dal punto di vista della convergenza

1. la funzione  $f(x) = x^2 - 2$  assume valori negativi per  $x \in [0, \sqrt{2})$ , e positivi per  $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ ,
2. si ha che  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2 > 0$  per ogni  $x \in [0, +\infty)$ .

Nell'esperimento, sapendo che  $\sqrt{2} \in (1, 2)$ , siamo partiti da  $x_0 = 2 > x^* = \sqrt{2}$ , con tolleranza  $\epsilon = 10^{-15}$ . In questo test le iterazioni si interrompono perché  $x_5 = \sqrt{2}$  e non perchè un criterio di arresto è verificato (si veda la terza colonna della tabella).

Per il teorema 4.3 possiamo affermare che il metodo di Newton determina una successione  $\{x_k\}$  decrescente e convergente a  $x^*$ . Per il teorema di convergenza locale, la convergenza è quadratica.

Osserviamo che numericamente, per  $k = 1, 2, 3$ ,  $|e_{k+1}|/|e_k|^2 \approx 3.54e-01$ , suggerendo una convergenza quadratica del metodo di Newton, applicato a questo esempio. Come visto, la successione è decrescente.

**Nota. 4.11.** Si osservi che più in generale per calcolare la radice  $n$ -sima di  $\alpha$  basta risolvere

$$f(x) = x^n - \alpha = 0$$

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	2.0000000000000000e + 00	5.86e - 01	—	2.00e + 00
1	1.5000000000000000e + 00	8.58e - 02	5.00e - 01	2.50e - 01
2	1.4166666666666667e + 00	2.45e - 03	8.33e - 02	6.94e - 03
3	1.414215686274510e + 00	2.12e - 06	2.45e - 03	6.01e - 06
4	1.414213562374690e + 00	1.59e - 12	2.12e - 06	4.51e - 12
5	1.414213562373095e + 00	0.00e + 00	1.59e - 12	4.44e - 16

Tabella 8: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione  $x^* = \sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$  di  $f(x) = x^2 - 2 = 0$  è molto rapida ovvero  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Il test del residuo è molto accurato, mentre quello dello step individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente. Ad esempio, alla quinta iterata dice correttamente che l'errore alla quarta era  $1.59e - 12$ .

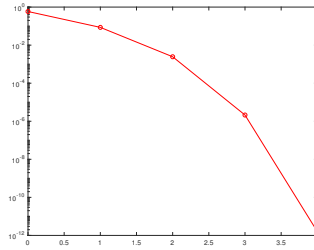


Figura 8: Errore assoluto  $|x_k - x^*|$  dove  $x_k$  è la  $k$ -sima iterata del metodo di Newton per la soluzione di  $f(x) = x^2 - 2 = 0$ , in scala semilogaritmica.

dove  $x^* \in I$ , con  $I$  dipendente da  $n$ . Ad esempio, se  $n$  è dispari si può supporre  $I = \mathbb{R}$ , mentre se  $n$  è pari  $I = [0, +\infty)$ .

In questo caso, visto che  $f'(x) = nx^{n-1}$  e quindi il metodo di Newton genera la successione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - \alpha}{nx_k^{n-1}} = \frac{n-1}{n}x_k + \frac{\alpha}{nx_k^{n-1}}.$$

In virtù del teorema di convergenza globale, per dedurre la convergenza basta scegliere  $x_0$  cosicchè  $x_0^n \geq \alpha$  e tale convergenza è quadratica per il teorema di convergenza locale.

**Facoltativo** Uno dei problemi sorti con i primi processori era quello di calcolare la divisione utilizzando esclusivamente somme, sottrazioni o moltiplicazioni.

Supponiamo di dover calcolare  $a/b = a \cdot \frac{1}{b}$  e quindi, visto che il processore era capace di calcolare moltiplicazioni, bastava calcolare  $1/b$  e moltiplicare il risultato ottenuto per  $a$ .

Dopo una complicata analisi sui numeri macchina normalizzati, si osserva che ci si può ricondurre al calcolare il reciproco di numeri in  $\alpha \in [1/2, 1)$  ovvero risolvere l'equazione

$$f(x) = \frac{1}{x} - \alpha = 0, \quad \alpha \in [1/2, 1).$$

Visto che  $f'(x) = -1/x^2$ , il metodo di Newton genera la successione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - \alpha}{-\frac{1}{x_k^2}} = x_k + x_k^2 \left( \frac{1}{x_k} - \alpha \right) = 2x_k^2 - \alpha x_k^2 = (2 - \alpha \cdot x_k) \cdot x_k$$

che può essere valutata solo con 1 sottrazione e due prodotto.

Di conseguenza, il metodo di Newton permette di calcolare la divisione di due numeri usando solo sottrazioni e moltiplicazioni.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	2.0000000000000000e + 00	8.24e - 01	—	-3.50e - 01
1	6.0000000000000001e - 01	5.76e - 01	1.40e + 00	8.17e - 01
2	8.9400000000000001e - 01	2.82e - 01	2.94e - 01	2.69e - 01
3	1.1086494000000000e + 00	6.78e - 02	2.15e - 01	5.20e - 02
4	1.172560831697694e + 00	3.91e - 03	6.39e - 02	2.83e - 03
5	1.176457594968538e + 00	1.30e - 05	3.90e - 03	9.39e - 06
6	1.176470588091793e + 00	1.44e - 10	1.30e - 05	1.04e - 10
7	1.176470588235294e + 00	0.00e + 00	1.44e - 10	0.00e + 00

Tabella 9: La convergenza del metodo di Newton alla soluzione  $x^* = 1/0.85 \approx 1.176470588235294$  di  $f(x) = \frac{1}{x} - 0.85$ , partendo da  $x_0 = 2$  è molto rapida. Il test del residuo è molto accurato, mentre quello dello step individua correttamente a posteriori l'errore dell'iterata precedente. Si osservi che il calcolo ha necessitato, viste le 7 iterazioni di 7 somme e 14 prodotti.

## 5. Metodo delle secanti

Uno dei metodi più comunemente utilizzati per la risoluzione di equazioni nonlineari è quello delle secanti, che nel caso di sistemi di equazioni nonlineari porta (non banalmente) al molto noto metodo di Broyden (1965).

Se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, il metodo delle secanti definisce la successione (cf. [1, p.65])

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (5)$$

ottenuta dal metodo di Newton sostituendo  $f'(x_n)$  col rapporto incrementale

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Si nota subito che a differenza del metodo di Newton, quello delle secanti richiede due punti iniziali  $x_0, x_1$  e non necessita ovviamente del calcolo della derivata  $f'$ .

Si dimostra che

**Teorema 5.1 (Jeeves, 1958).** *Se  $f \in C^2([a, b])$  con la radice  $\alpha \in [a, b]$  e  $f'(\alpha) \neq 0$  allora se  $x_0, x_1$  sono sufficientemente vicine ad  $\alpha$  le iterate del metodo delle secanti convergono ad  $\alpha$ , con ordine di convergenza pari alla sezione aurea, ovvero*

$$p = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \approx 1.62.$$

**Esempio.** L'intento di questa sezione è di vedere la performance del metodo delle secanti, per valutare gli zeri di

1.  $f(x) = \exp(x) - 1 + x = 0$ , con  $x_1 = 0, x_2 = 1$ ;
2.  $f(x) = \sin(x) - x = 0$ , con  $x_1 = -2, x_2 = 3$ ;
3.  $f(x) = x^2 - 2 = 0$ , con  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

**Nota storica. 5.2.** Un primitivo utilizzo del metodo delle secanti si trova in una tavoletta babilonese del 1800 A.C.. Noto anche come *Regola della doppia falsa posizione*, fu perfezionato da Cardano nel 1545, che lo utilizzò come metodo iterativo. Pare che il nome metodo delle secanti, sia stato proposto da Jeeves nel 1958, che per primo provò l'ordine di convergenza di tale metodo. Per ulteriori ragguagli storici si veda [8].

Si vede che in linea di massima sono paragonabili a quelle del metodo di Newton, richiedendo però due dati iniziali, ma non la derivata di  $f$  che viene stimata tramite un rapporto incrementale.

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	0.0000000000000000e + 00	4.43e - 01	—	-1.00e + 00
1	1.0000000000000000e + 00	5.57e - 01	1.00e + 00	1.72e + 00
2	3.678794411714423e - 01	7.50e - 02	6.32e - 01	-1.87e - 01
3	4.300563616528947e - 01	1.28e - 02	6.22e - 02	-3.26e - 02
4	4.431457539835317e - 01	2.91e - 04	1.31e - 02	7.45e - 04
5	4.428532661274237e - 01	1.13e - 06	2.92e - 04	-2.90e - 06
6	4.428544009017152e - 01	1.01e - 10	1.13e - 06	-2.57e - 10
7	4.428544010023887e - 01	1.67e - 16	1.01e - 10	1.67e - 16

Tabella 10: La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione  $x^* = 0.4428544010023887 \dots$  di  $f(x) = \exp(x) - 1 + x = 0$  è molto rapida, paragonabile in termini di iterazioni a quella del metodo di Newton. Quali dati iniziali abbiamo scelto  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ . Lo step fornisce buone stime a posteriori dell'errore compiuto all'iterazione precedente.

## 6. Metodo di punto fisso (o di Picard)

Consideriamo i problemi di *punto fisso*

$$x = \phi(x)$$

in cui supponiamo che  $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$  sia una funzione continua. Notiamo subito che ogni problema di tipo  $f(x) = 0$  si può ovviamente riscrivere in questa forma, posto  $\phi(x) = f(x) + x$ .

Dal punto di vista geometrico, coincide col calcolare l'intersezione tra la bisettrice  $y = x$  con il grafico della curva  $y = \phi(x)$ .

Nel metodo di punto fisso, si definisce la successione

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$



$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	$-2.000000000000000e + 00$	$2.00e + 00$	—	$1.09e + 00$
1	$3.000000000000000e + 00$	$3.00e + 00$	$5.00e + 00$	$-2.86e + 00$
2	$-6.192179107632967e - 01$	$6.19e - 01$	$3.62e + 00$	$3.88e - 02$
3	$-5.707325299195892e - 01$	$5.71e - 01$	$4.85e - 02$	$3.05e - 02$
4	$-3.934167222042483e - 01$	$3.93e - 01$	$1.77e - 01$	$1.01e - 02$
5	$-3.059435414661084e - 01$	$3.06e - 01$	$8.75e - 02$	$4.75e - 03$
6	$-2.278322477580405e - 01$	$2.28e - 01$	$7.81e - 02$	$1.97e - 03$
7	$-1.726853342973921e - 01$	$1.73e - 01$	$5.51e - 02$	$8.57e - 04$
8	$-1.300690036608595e - 01$	$1.30e - 01$	$4.26e - 02$	$3.66e - 04$
9	$-9.823363631520615e - 02$	$9.82e - 02$	$3.18e - 02$	$1.58e - 04$
10	$-7.412520006397208e - 02$	$7.41e - 02$	$2.41e - 02$	$6.79e - 05$
20	$-4.453415286714068e - 03$	$4.45e - 03$	$1.45e - 03$	$1.47e - 08$
30	$-2.675831159495087e - 04$	$2.68e - 04$	$8.69e - 05$	$3.19e - 12$
40	$-1.607772401198045e - 05$	$1.61e - 05$	$5.22e - 06$	$6.93e - 16$
50	$-9.661064115820756e - 07$	$9.66e - 07$	$3.14e - 07$	$1.50e - 19$
60	$-5.537352656281193e - 08$	$5.54e - 08$	$2.06e - 08$	$2.65e - 23$
65	$-1.420660201192862e - 08$	$1.42e - 08$	$0.00e + 00$	$0.00e + 00$

Tabella 11: La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione  $x^* = 0$  di  $f(x) = \sin(x) - x = 0$  è molto lenta, ed è causata dal fatto che la soluzione è multipla ovvero  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . Il test del residuo non assicura che  $|x_n - x^*|$  sia piccolo, e questo è dovuto al fatto che la funzione, nei pressi della soluzione è molto piatta (la derivata è nulla!).

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	$1.000000000000000e + 00$	$4.14e - 01$	—	$-1.00e + 00$
1	$2.000000000000000e + 00$	$5.86e - 01$	$1.00e + 00$	$2.00e + 00$
2	$1.333333333333333e + 00$	$8.09e - 02$	$6.67e - 01$	$-2.22e - 01$
3	$1.400000000000000e + 00$	$1.42e - 02$	$6.67e - 02$	$-4.00e - 02$
4	$1.414634146341463e + 00$	$4.21e - 04$	$1.46e - 02$	$1.19e - 03$
5	$1.414211438474870e + 00$	$2.12e - 06$	$4.23e - 04$	$-6.01e - 06$
6	$1.414213562057320e + 00$	$3.16e - 10$	$2.12e - 06$	$-8.93e - 10$
7	$1.414213562373095e + 00$	$2.22e - 16$	$3.16e - 10$	$8.88e - 16$

Tabella 12: La convergenza del metodo delle secanti alla soluzione  $x^* = \sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$  di  $f(x) = x^2 - 2 = 0$  è molto rapida, paragonabile in termini di iterazioni a quella del metodo di Newton. Quali dati iniziali abbiamo scelto  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$ . Lo step fornisce buone stime a posteriori dell'errore compiuto all'iterazione precedente.

che si desidera convergere ad  $\alpha$  tale che  $\phi(\alpha) = \alpha$ . La funzione  $\phi$  è talvolta detta di *iterazione* perchè a partire da  $x_k$  determina  $x_{k+1}$ .

Si dimostra che (cf. [1, p.80])

**Teorema 6.1.** *Si assuma che*

1.  $\phi$  sia derivabile con continuità in  $[a, b]$ ,
2.  $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$

3. se  $x \in [a, b]$  allora

$$|\phi'(x)| \leq \theta < 1$$

con  $\theta$  indipendente da  $x$ .

Allora

1.  $x = \phi(x)$  ha un'unica soluzione  $\alpha$  in  $[a, b]$ ;

2. per qualsiasi scelta di  $x_0 \in [a, b]$ , posto

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

la successione converge ad  $\alpha$ ;

3. posto  $e_n = |x_n - \alpha|$  si ha  $\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\alpha)|$  (convergenza almeno lineare);

4. si ha

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} |x_1 - x_0|;$$

5. vale la stima a priori

$$|x_n - \alpha| \leq \theta^n |x_0 - \alpha|;$$

6. vale la stima a posteriori

$$|x_n - \alpha| = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - \phi'(\xi_n)} \leq \frac{1}{1 - \theta} |x_{n+1} - x_n|,$$

con  $x_n$  nel più piccolo intervallo aperto contenente  $x_n$  e  $\alpha$ .

Si osservi che questo teorema

- stabilisce l'esistenza e unicità della soluzione del problema di punto fisso,
- offre un metodo iterativo  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  per poterla approssimare, con convergenza almeno lineare (potrebbe essere  $\phi'(\alpha) = 0$  ed avere effettivamente ordine  $p > 1$ ),
- offre una maggiorazione dell'errore  $|\alpha - x_n|$  dipendentemente dalla distanza delle prime due iterazioni,
- suggerisce stime dell'errore compiuto; in particolare il punto 6. fa capire che per  $\theta \approx 1$  lo step può non essere un buon criterio di arresto, perchè in tal caso  $1/(1 - \theta)$  può essere così grande, che nonostante  $|x_{n+1} - x_n|$  sia piccolo, può accadere che  $|x_n - \alpha|$  sia grande.

Per semplificare l'applicazione del precedente teorema (cf. [1, p.81])

**Teorema 6.2 (Convergenza locale).** Si assuma che

1.  $\alpha$  sia la soluzione di  $x = \phi(x)$
2.  $\phi$  sia derivabile con continuità in un intervallo centrato in  $\alpha$ ,
3.  $|\phi'(\alpha)| < 1$ .

Allora esiste un intorno  $I$  di  $\alpha$  per cui

1.  $x = \phi(x)$  ha un'unica soluzione  $\alpha$  in  $I$ ;
2. per qualsiasi scelta di  $x_0 \in I$ , posto

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

la successione converge ad  $\alpha$  almeno linearmente;

3. posto  $e_n = |x_n - \alpha|$  si ha  $\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\alpha)|$  (convergenza almeno lineare).

Notiamo come si possa utilizzare tale teorema per determinare la convergenza quadratica di un metodo di punto fisso.

Vale il seguente teorema, molto utile per determinare l'ordine di convergenza del metodo di punto fisso (cf. [1, p.82]).

**Teorema 6.3.** Si supponga che partendo da un certo  $x_0 \in [a, b]$ , la successione  $\{x_k\}$  sia tale che  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ . Inoltre che

1.  $\phi \in C^p([a, b])$ ,
2.  $\phi(\alpha) = \alpha$ ,
3.  $\phi^{(j)}(\alpha) = 0$ , per  $j = 0, \dots, p-1$  e  $\phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$ ,
4. se  $p = 1$  allora  $|\phi(\alpha)| < 1$ .

Se il punto iniziale  $x_0$  è sufficientemente vicino ad  $\alpha$ , allora  $x_k \rightarrow \alpha$  e l'ordine di convergenza del metodo è uguale a  $p$ , essendo

$$\lim \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|g^p(\alpha)|}{p!}.$$

**Dimostrazione.** Osserviamo che se

- $p = 1$  abbiamo per ipotesi  $|\phi(\alpha)| < 1$ ,
- $p > 1$  allora  $|\phi^{(1)}(\alpha)| = 0 < 1$ ,

e quindi  $x_k \rightarrow \alpha$  dal teorema 6.2.

Per

- $\xi_k \in \mathcal{I}(\alpha, x_k)$ , ovvero al più piccolo intervallo aperto contenente  $\alpha$  e  $x_k$ ,
- $e_k = |x_k - \alpha|$ ,

abbiamo dalla formula di Taylor

$$\begin{aligned} x_{k+1} = \phi(x_k) &= \phi(\alpha) + \sum_{j=1}^{p-1} \phi^{(j)}(\alpha) \frac{(x_k - \alpha)^j}{j!} + \phi^{(p)}(\xi_k) \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!} \\ &= \alpha + \phi^{(p)}(\xi_k) \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!} \end{aligned}$$

e quindi sottraendo  $\alpha$  ad ambo i membri,

$$e_{k+1} = |\phi^{(p)}(\xi_k)| \frac{e_k^p}{p!}$$

da cui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\phi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} = \frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq 0$$

cioè l'ordine di convergenza è uguale a  $p$ .

L'ultimo passaggio necessita una spiegazione. Sappiamo che  $\xi_k \in \mathcal{I}(x_k, \alpha)$ , ovvero al più piccolo intervallo aperto contenente  $x_k$  e  $\alpha$  e poichè  $x_k \rightarrow \alpha$ , per il teorema del confronto,  $\xi_k \rightarrow \alpha$ . Quindi, essendo  $\phi \in C^p([a, b])$ , ricaviamo  $\phi^{(p)}(\xi_k) \rightarrow \phi^{(p)}(\alpha)$  e quindi visto che il valore assoluto è una funzione continua, pure  $|\phi^{(p)}(\xi_k)| \rightarrow |\phi^{(p)}(\alpha)|$ .

**Esempio.** Quello di Newton è un particolare metodo di punto fisso. Infatti per

$$\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

abbiamo

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Supponiamo

1.  $x^*$  sia uno zero semplice di  $f(x) = 0$  tale che  $f''(x^*) \neq 0$ ,
2.  $x_n \rightarrow x^*$ ,
3.  $f : ([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  sia sufficientemente differenziabile con continuità.

Dopo qualche calcolo,

$$\phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

e

$$\phi''(x) = \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} + \frac{f(x)f^{(3)}(x)}{(f^{(1)}(x))^2} - \frac{2f(x)(f^{(2)}(x))^2}{(f^{(1)}(x))^3}.$$

Visto che  $f'(x^*) \neq 0$ , ma  $f(x^*) = 0$

$$\phi'(x^*) = \frac{f(x)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0$$

e se supponiamo  $f''(x^*) \neq 0$ , allora essendo  $f(x^*) = 0$ ,

$$\phi''(x^*) = \frac{f^{(2)}(x^*)}{f^{(1)}(x^*)} + \frac{f(x^*)f^{(3)}(x^*)}{(f^{(1)}(x^*))^2} - \frac{2f(x^*)(f^{(2)}(x^*))^2}{(f^{(1)}(x^*))^3} \neq 0$$

da cui deduciamo che il metodo di Newton ha convergenza locale quadratica in virtù del teorema 6.3.

**Nota. 6.4.** Si osservi che i teoremi 6.1 e 6.2 comportano che sotto opportune ipotesi, se la radice è multipla allora la convergenza è almeno lineare.

**Nota. 6.5.** Il metodo delle secanti, a differenza del metodo di Newton, non determina una successione del tipo  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  perchè ogni iterazione dipende da 2 iterate precedenti (e non una sola!).

**Esempio.** Desideriamo studiare  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$  mediante un metodo di punto fisso. Ricordiamo che esiste una sola soluzione in  $[0, 1]$ , visto che  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = \exp(1) - 2 + 1 > 0$  e si può applicare il teorema degli zeri di una funzione continua. Avevamo visto che la unica soluzione è  $x^* = 0.4428544010023887 \dots$

La prima idea è di studiare il problema

$$x = \phi(x) := 2 - \exp(x)$$

ma purtroppo, essendo  $\phi'(x) = -\exp(x)$  e  $x^* \in (0, 1)$ , abbiamo  $|\phi'(\alpha)| = |-\exp(\alpha)| > 1$  e i teoremi di punto fisso sopra indicati non possono essere utilizzati.

Osserviamo che  $\exp(x) - 2 + x = 0$  se e solo se  $\exp(x) = 2 - x$  ovvero applicando il logaritmo ad ambo i membri  $x = \ln(2 - x)$  che è un'equazione in forma di punto fisso.

La funzione  $\phi(x) = \ln(2 - x)$  ha derivata

$$\phi'(x) = \frac{1}{2 - x}$$

che è una funzione strettamente crescente, ed essendo  $\phi'(0) = 1/2$ ,  $\phi'(1) = 1$ , visto che il punto fisso  $\alpha = x^* \in (0, 1)$ , sicuramente è tale che

$$1/2 < \phi'(\alpha) = \frac{1}{2 - \alpha} < 1.$$

e quindi

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Di conseguenza il metodo di punto fisso converge alla soluzione almeno localmente.

Testiamo numericamente la convergenza se scegliamo  $x_0 = 0$  oppure  $x_0 = 1$ . In entrambi i casi il metodo converge linearmente, come si può evincere dai grafici dell'errore in scala semilogaritmica.

Confrontando con il numero di iterazioni del metodo di Newton o delle secanti per raggiungere la stessa precisione si capisce che nonostante il basso costo di ogni iterazione, il metodo di punto fisso utilizzato non sia in questo caso da suggerire.

## 7. Facoltativo: il metodo di Halley

Il metodo di Halley [14] approssima uno zero  $x^*$  dell'equazione  $f(x) = 0$  con la sequenza di iterazioni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $
0	0.0000000000000000e + 00	4.43e - 01	—
1	6.931471805599453e - 01	2.50e - 01	6.93e - 01
2	2.676218188444345e - 01	1.75e - 01	4.26e - 01
3	5.494951357024610e - 01	1.07e - 01	2.82e - 01
4	3.719116781052663e - 01	7.09e - 02	1.78e - 01
5	4.874065178868661e - 01	4.46e - 02	1.15e - 01
6	4.138257153687164e - 01	2.90e - 02	7.36e - 02
7	4.613250066022943e - 01	1.85e - 02	4.75e - 02
8	4.309216521766674e - 01	1.19e - 02	3.04e - 02
9	4.504884073820321e - 01	7.63e - 03	1.96e - 02
10	4.379397797394399e - 01	4.91e - 03	1.25e - 02
20	4.427958160235598e - 01	5.86e - 05	1.50e - 04
30	4.428537019831390e - 01	6.99e - 07	1.79e - 06
40	4.428543926617972e - 01	8.34e - 09	2.13e - 08
50	4.428544009028699e - 01	9.95e - 11	2.54e - 10
60	4.428544010012012e - 01	1.19e - 12	3.04e - 12
70	4.428544010023746e - 01	1.39e - 14	3.60e - 14
78	4.428544010023882e - 01	2.78e - 16	9.99e - 16

Tabella 13: La convergenza del metodo di punto fisso alla soluzione  $x^* \approx 0.4428544010023885$  di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$  non è molto rapida (risulta lineare). Abbiamo studiato il problema di punto fisso equivalente e quindi con soluzione  $\alpha = x^*$ , della forma  $x = \phi(x)$  ove  $\phi(x) = \ln(2 - x)$ . In questo caso  $x_0 = 0$ .

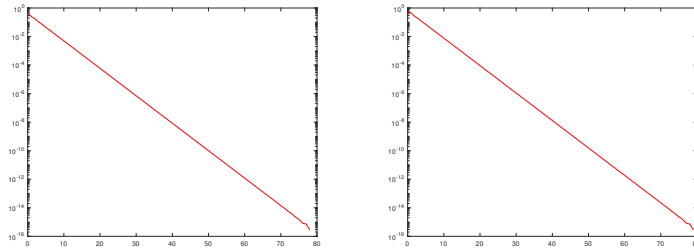


Figura 9: Convergenza lineare delle approssimazioni di punto fisso, partendo da  $x_0 = 0$  (a sinistra) e  $x_0 = 1$  (a destra).

a partire da un punto iniziale  $x_0$ . Ovviamente, si richiede l'esistenza della derivata seconda.

Se  $f$  è differenziabile tre volte con continuità e  $x^*$  non è uno zero delle sue derivate, allora si può dimostrare (non immediato!) che in un certo intorno di  $x^*$  le iterate  $x_n$  soddisfano

$$|x_{n+1} - x^*| \leq K \cdot |x_n - x^*|^3, \text{ per qualche } K > 0.$$

$n$	$x_n$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n-1} $
0	1.0000000000000000e + 00	5.57e - 01	—
1	0.0000000000000000e + 00	4.43e - 01	1.00e + 00
2	6.931471805599453e - 01	2.50e - 01	6.93e - 01
3	2.676218188444345e - 01	1.75e - 01	4.26e - 01
4	5.494951357024610e - 01	1.07e - 01	2.82e - 01
5	3.719116781052663e - 01	7.09e - 02	1.78e - 01
6	4.874065178868661e - 01	4.46e - 02	1.15e - 01
7	4.138257153687164e - 01	2.90e - 02	7.36e - 02
8	4.613250066022943e - 01	1.85e - 02	4.75e - 02
9	4.309216521766674e - 01	1.19e - 02	3.04e - 02
10	4.504884073820321e - 01	7.63e - 03	1.96e - 02
20	4.429456236721741e - 01	9.12e - 05	2.33e - 04
30	4.428554894767561e - 01	1.09e - 06	2.78e - 06
40	4.428544139899038e - 01	1.30e - 08	3.32e - 08
50	4.428544011573536e - 01	1.55e - 10	3.96e - 10
60	4.428544010042376e - 01	1.85e - 12	4.73e - 12
70	4.428544010024106e - 01	2.21e - 14	5.63e - 14
79	4.428544010023882e - 01	2.78e - 16	9.99e - 16

Tabella 14: La convergenza del metodo di punto fisso alla soluzione  $x^* \approx 0.4428544010023885$  di  $f(x) = \exp(x) - 2 + x = 0$  non è molto rapida (risulta lineare). Abbiamo studiato il problema di punto fisso equivalente e quindi con soluzione  $\alpha = x^*$ , della forma  $x = \phi(x)$  ove  $\phi(x) = \ln(2 - x)$ . In questo caso  $x_0 = 1$ .

cioè con convergenza almeno cubica.  
Quale esercizio si

1. approssimi col metodo di Halley lo zero di

$$f_2(x) := x - 6.28 - \sin(x),$$

partendo da  $x_0 = 4$ ;

2. approssimi col metodo di Halley la radice quadrata di 2 partendo da  $x_0 = 1$ ;
3. approssimi col metodo di Halley la radice cubica di 2 partendo da  $x_0 = 1$ .

interrompendo il processo quando lo step  $|x_{n+1} - x_n|$  è inferiore di  $10^{-14}$ . Si paragoni quindi il metodo di Halley con quello di Newton, sugli stessi problemi: quale dei due sembra convergere più velocemente?

### Bibliografia.

- [1] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
- [2] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, (1990).

- [3] J.E. Dennis, Jr. e R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, (1996).
- [4] C.T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM Frontiers in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, (1995).
- [5] A. Quarteroni, F. Saleri *Introduzione al Calcolo Scientifico*, Springer, (2002).
- [6] Mac Tutor (Newton),  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html>.
- [7] Mac Tutor (Raphson),  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Raphson.html>. Origin and Evolution of the Secant Method in One Dimension
- [8] J-M. Papakonstantinou, R- A. Tapia, *Origin and Evolution of the Secant Method in One Dimension*, The American Mathematical Monthly, Vol. 120, No. 6 (June/July 2013), pp. 500-518.
- [9] G. Rodriguez, *Algoritmi Numerici*, Pitagora Editrice, (2008).
- [10] L.N. Trefethen, *Numerical Analysis*, Branches of Mathematics.
- [11] Wikipedia (Calcolo dello zero di una funzione),  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Calcolo\\_dello\\_zero\\_di\\_una\\_funzione](http://it.wikipedia.org/wiki/Calcolo_dello_zero_di_una_funzione).
- [12] Wikipedia (Metodo della bisezione),  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_della\\_bisezione](http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_della_bisezione).
- [13] Wikipedia (Metodo delle tangenti),  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_delle\\_tangenti](http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_delle_tangenti).
- [14] Wikipedia (Halley's method),  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_method).
- [15] Wikipedia (Newton's method),  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method).
- [16] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications: Part 1: Fixed-Point Theorems*, Springer, (1998).