

Derivazione numerica ¹

A. Sommariva ²

Keywords: Derivazione numerica. Differenza in avanti. Rapporto incrementale simmetrico. Estrapolazione.

Revisione: 10 novembre 2018

1. Il problema della derivazione numerica

Si consideri il problema di determinare numericamente la derivata di una funzione f in un certo punto x_0 , ovvero (qualora esista)

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Una prima idea consiste nell'approssimare f con una successione di funzioni f_n facili da derivare e poi differenziare f_n , valutandola nel punto x_0 .

Purtroppo,

$$\text{dist}(f_n, f) \rightarrow 0 \not\Rightarrow \text{dist}(Df_n, Df) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

che si può pure leggere come *esistono f e f_n arbitrariamente "vicine", ma con derivate f' e f'_n arbitrariamente distanti*, fenomeno noto come *instabilità dell'operatore di derivazione (nel continuo)*.

Esempio. Quale esempio, consideriamo la successione

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx), \quad x \in [0, 1].$$

Osserviamo che essendo $\sin(x) \in [-1, 1]$ qualora $x \in [0, 1]$ abbiamo

$$\frac{-1}{n} \leq f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \leq \frac{1}{n}$$

e sicuramente, detta f la funzione costantemente nulla abbiamo $f_n \rightarrow f$ non solo puntualmente ma anche uniformemente visto che

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{1}{n} \sin(nx) - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Purtroppo, mentre la derivata di f è la funzione costantemente nulla, abbiamo che

$$f'(x) = \sin(nx)$$

non converge alla funzione nulla *uniformemente*, ovvero non si ha che

$$\max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

e neppure puntualmente.

In effetti, per $n \geq 2$

$$\max_{x \in [0,1]} |\sin(nx) - 0| = 1$$

e quindi

$$\lim_n \max_{x \in [0,1]} |\sin(nx) - 0| = 1 \neq 0.$$

La convergenza non è neppure puntuale. Per $n = 2 + 8k$, $k = 0, 1, \dots$ abbiamo

$$n \frac{\pi}{4} = (2 + 8k) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

e quindi

$$\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$$

per cui, utilizzando la definizione di limite di una successione, non può essere

$$\lim_n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0.$$

Commento. Questo non vuol dire che *se f e f_n arbitrariamente "vicine" allora le derivate f' e f'_n sono arbitrariamente distanti*, e quindi possiamo sperare che sotto certe ipotesi su f , se f_n sono scelte bene e sono vicine a f , allora pure f'_n e f' sono vicine.

Ad esempio, se (a, b) è un intervallo limitato e s_{3,Δ_n} è un interpolante spline cubica di $f \in C^4(a, b)$, nei nodi determinati dalla suddivisione $\Delta_n = \{x_k\}$ con $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0, \dots, n$, ovvero punti equispaziati con passo $h_n = (b-a)/n$, allora esiste una costante c_1 tale che

$$0 \leq \max_{x \in [a,b]} |f'(x) - s'_{3,\Delta_n}(x)| \leq c_1 h_n^3 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| = c_1 \frac{(b-a)^3}{n^3} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

e quindi per quanto visto precedentemente e per il teorema del confronto, non solo la successione di spline cubiche $\{s_{3,\Delta_n}\}_n$ converge a f uniformemente, ma pure $\{s'_{3,\Delta_n}\}_n$ converge a f' uniformemente.

2. Alcune formule di derivazione numerica

In questa sezione mostriamo alcune formule di derivazione numerica (cf. [3]), evidenziandone le problematiche.

2.1. Differenza in avanti

Consideriamo il rapporto incrementale $\delta_+(f, h)$, detto tecnicamente *differenza in avanti*, di una funzione f almeno derivabile, ovvero per un fissato $h > 0$, e supposto $x, x + h \in [a, b]$

$$\delta_+(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

(cf. [2]).

Se $f \in C^2([a, b])$ e $x \in [a, b]$ allora, dalla formula di Taylor,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(\xi_x), \quad \xi_x \in (x, x+h)$$

per cui riarrangiando i termini

$$\delta_+(f, x, h) = f'(x) + hf''(\xi_x), \quad \xi_x \in (x, x+h).$$

Per il teorema di Weierstrass, essendo $f'' \in C([a, b])$ e $|\cdot| \in C([a, b])$, esiste finito

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \geq 0$$

e quindi

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |\delta_+(f, x, h) - f'(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |hf''(\xi_x)| \leq M_2 h \quad (1)$$

per cui, per il teorema del confronto, se $h \rightarrow 0$ allora

$$\max_{x \in [a, b]} |\delta_+(f, x, h) - f'(x)| \rightarrow 0.$$

In altri termini, ci verrebbe da credere che utilizzando passi h sempre più piccoli abbiamo approssimazioni sempre migliori della derivata prima, in un punto arbitrario dell'intervallo $[a, b]$.

Numericamente, le cose vanno in modo diverso. La funzione f non viene sempre valutata esattamente, ed ogni volta calcoliamo

$$\tilde{\delta}_+(f, x, h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$$

invece di $\delta_+(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ovvero un *rapporto incrementale perturbato* e abbiamo

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &= |(f'(x) - \delta_+(f, x, h)) + (\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h))| \\ &\leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + |\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)|. \end{aligned} \quad (2)$$

Se ϵ è il massimo errore compiuto nel valutare la funzione

$$\begin{aligned}
|\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\
&= \left| \frac{f(x+h) - \tilde{f}(x+h)}{h} - \frac{f(x) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\
&\leq \left| \frac{f(x+h) - \tilde{f}(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{f(x) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\
&\leq \frac{2\epsilon}{h}
\end{aligned} \tag{3}$$

e quindi da (1), (2), ricaviamo per $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

$$\begin{aligned}
|f'(x) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| &\leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + |\delta_+(f, x, h) - \tilde{\delta}_+(f, x, h)| \\
&\leq |f'(x) - \delta_+(f, x, h)| + \frac{2\epsilon}{h} \leq M_2 h + \frac{2\epsilon}{h}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Questo dice che numericamente, se $h \rightarrow 0$ può accadere che fino ad un certo h_0 otteniamo risultati sempre migliori, ma poi diventando per h piccolo rilevante la quantità $\frac{2\epsilon}{h}$, i risultati cominciano a peggiorare.

Siccome l'analisi viene fatta per $h \rightarrow 0$, e l'unica richiesta è che sia $x+h, x \in [a, b]$, generalmente $[a, b]$ è un intervallo con una piccola ampiezza, contenente x e possiamo pensare quindi che se la derivata seconda non varia troppo vicino a x , sia $M_2 \approx f''(x)$.

Inoltre, visto che la funzione $g(h) := M_2 h + \frac{2\epsilon}{h}$ ha minimo in $h^* = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{M_2}}$, si suggerisce di non scegliere numericamente valori di h più piccoli di h^* .

Esempio. Quale esempio consideriamo la funzione $f(x) = \exp(x)$ la cui derivata è $f'(x) = \exp(x)$. La valutiamo in $x_0 = 0$, calcolando

$$\delta_+(f, x, h) = \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}.$$

Il valore desiderato è $f'(0) = \exp(0) = 1$.

Otteniamo i risultati della tabella e della figura, dove valutiamo

$$E_h(f, 0) = |\delta_+(f, x, h) - 1|$$

per $h = 10^{-1}, \dots, 10^{-26}$.

Nel nostro caso, dalla definizione di numero macchina, e dal fatto che $\exp(h) \approx 1$, ci possiamo aspettare che l'errore compiuto nel valutare $\exp(h)$ sia pari alla precisione di macchina, ovvero $\epsilon = 10^{-16}$. Visto che $M_2 \approx \exp(0) = 1$, ci aspettiamo che il passo critico sia

$$h^* = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{M_2}} \approx 10^{-8}$$

come confermato dagli esperimenti numerici.

h	$E_h(f, 0)$	h	$E_h(f, 0)$
$1.0e - 01$	$5.171e - 02$	$1.0e - 14$	$7.993e - 04$
$1.0e - 02$	$5.017e - 03$	$1.0e - 15$	$1.102e - 01$
$1.0e - 03$	$5.002e - 04$	$1.0e - 16$	$1.000e + 00$
$1.0e - 04$	$5.000e - 05$	$1.0e - 17$	$1.000e + 00$
$1.0e - 05$	$5.000e - 06$	$1.0e - 18$	$1.000e + 00$
$1.0e - 06$	$5.000e - 07$	$1.0e - 19$	$1.000e + 00$
$1.0e - 07$	$4.943e - 08$	$1.0e - 20$	$1.000e + 00$
$1.0e - 08$	$6.077e - 09$	$1.0e - 21$	$1.000e + 00$
$1.0e - 09$	$8.274e - 08$	$1.0e - 22$	$1.000e + 00$
$1.0e - 10$	$8.274e - 08$	$1.0e - 23$	$1.000e + 00$
$1.0e - 11$	$8.274e - 08$	$1.0e - 24$	$1.000e + 00$
$1.0e - 12$	$8.890e - 05$	$1.0e - 25$	$1.000e + 00$
$1.0e - 13$	$7.993e - 04$	$1.0e - 26$	$1.000e + 00$

Tabella 1: Valutazione dell'errore $E_h(f, 0)$, $f(x) = \exp(x)$, per alcuni passi h . L'errore degrada a partire da circa $h = 1.0e - 08$.

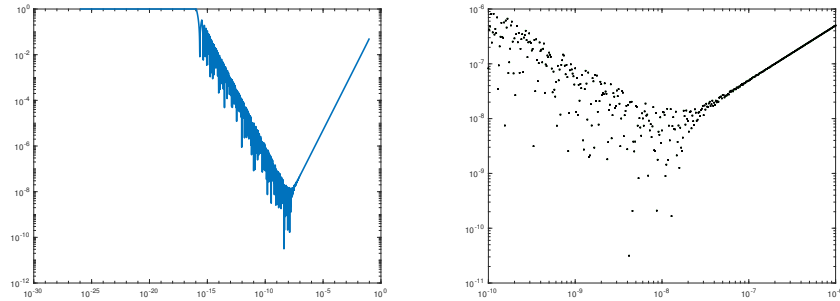


Figura 1: A sinistra, grafico in scala semilogaritmica dell'errore $E_h(f, 0)$, $f(x) = \exp(x)$, per alcuni passi h . A destra lo studio in scala loglog, attorno al valore $h = 10^{-8}$, in cui si vede come già vicino a $h = 10^{-7}$ incomincino a esserci problemi di convergenza

Esempio. La derivata della funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

è

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nel punto $x_0 = 5$ abbiamo che $f'(x_0) = -1.479289940828402e - 02$.

Approssimiamo $f'(x_0)$, calcolando

$$\delta_+(f, 5, h) = \frac{f(5+h) - f(5)}{h}.$$

Otteniamo i risultati della tabella, dove valutiamo

$$E_h(f, 5) = |\delta_+(f, 5, h) - f'(5)|$$

per $h = 1, 10^{-1}, \dots, 10^{-15}$. Come nel caso precedente, per $h < 1.0e - 08$ i valori della derivata cominciano a degradare.

h	$E_h(f, 0)$	h	$E_h(f, 0)$
$1.0e + 00$	$3.358e - 03$	$1.0e - 08$	$2.258e - 10$
$1.0e - 01$	$4.108e - 04$	$1.0e - 09$	$2.381e - 09$
$1.0e - 02$	$4.200e - 05$	$1.0e - 10$	$1.150e - 08$
$1.0e - 03$	$4.209e - 06$	$1.0e - 11$	$8.212e - 07$
$1.0e - 04$	$4.210e - 07$	$1.0e - 12$	$4.927e - 07$
$1.0e - 05$	$4.210e - 08$	$1.0e - 13$	$7.159e - 05$
$1.0e - 06$	$4.210e - 09$	$1.0e - 14$	$8.321e - 04$
$1.0e - 07$	$3.913e - 10$	$1.0e - 15$	$8.645e - 03$

Tabella 2: A sinistra, grafico in scala semilogaritmica dell'errore $E_h(f, 0)$, $f(x) = 1/(1+x^2)$, per alcuni passi h . A destra lo studio in scala loglog, attorno al valore $h = 10^{-8}$, in cui si vede come già vicino a $h = 10^{-7}$ incomincino a esserci problemi di convergenza.

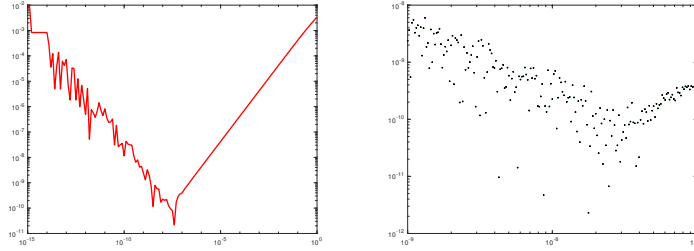


Figura 2: Errore $E_h(f, 0)$ per alcuni passi h . Zoom attorno al valore $h = 10^{-8}$ in cui si vede come tra $h = 10^{-7}$ e $h = 10^{-8}$ incomincino a esserci problemi di convergenza.

3. Rapporto incrementale simmetrico

Supponiamo $f \in C^3([a, b])$ e che $x-h, x+h \in [a, b]$ abbiamo per $\xi_+ \in (x, x+h)$

$$f(x+h) = f(x) + hf^{(1)}(x) + h^2 f^{(2)}(x)/2 + h^3 f^{(3)}(\xi_+)/2,$$

e per $\xi_- \in (x-h, x)$

$$f(x-h) = f(x) - hf^{(1)}(x) + h^2 f^{(2)}(x)/2 - h^3 f^{(3)}(\xi_-)/2.$$

Sottraendo membro a membro,

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf^{(1)}(x) + h^3(f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-))/2.$$

Dal teorema dei valori intermedi, la funzione assume tutti i valori tra $\min(f^{(3)}(\xi_-), f^{(3)}(\xi_+))$ e $\max(f^{(3)}(\xi_-), f^{(3)}(\xi_+))$ e quindi in particolare il loro valore medio. Quindi possiamo asserire che esiste $\xi \in (x - h, x + h)$ tale che

$$f^{(3)}(\xi) = (f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-))/2$$

e di conseguenza

$$f(x + h) - f(x) = 2hf^{(1)}(x) + h^3f^{(3)}(\xi)$$

da cui riarrangiando i termini

$$\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}f^{(3)}(\xi).$$

Se $M_3 = \max_{x \in (a, b)} |f^{(3)}(x)|$ abbiamo

$$0 \leq \left| \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| = \frac{h^2}{2} |f^{(3)}(\xi)| \leq \frac{h^2}{2} M_3 \quad (5)$$

da cui, per il teorema del confronto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - f^{(1)}(x) \right| = 0$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta_2(f, x, h) = f^{(1)}(x).$$

Come nel caso precedente, questo risultato teorico non trova sempre riscontro nella pratica numerica.

La funzione f non viene sempre valutata esattamente, ed ogni volta calcoliamo

$$\tilde{\delta}_2(f, x, h) = \frac{\tilde{f}(x + h) - \tilde{f}(x - h)}{2h}$$

invece di $\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$ e abbiamo

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &= |f'(x) - \delta_2(f, x, h) + \delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \\ &\leq |f'(x) - \delta_2(f, x, h)| + |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \end{aligned} \quad (6)$$

Se ϵ è il massimo errore compiuto nel valutare la funzione

$$\begin{aligned} |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &= \left| \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{\tilde{f}(x + h) - \tilde{f}(x - h)}{2h} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x + h) - \tilde{f}(x + h)}{2} \right| + \left| \frac{f(x - h) - \tilde{f}(x - h)}{2} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2h} + \frac{\epsilon}{2h} = \frac{\epsilon}{h} \end{aligned} \quad (7)$$

e quindi ricaviamo da (6), (5) per $M_3 = \max_{s \in [a, b]} |f^{(3)}(s)|$

$$\begin{aligned} |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| &\leq |f'(x) - \delta_2(f, x, h)| + |\delta_2(f, x, h) - \tilde{\delta}_2(f, x, h)| \\ &\leq \frac{h^2}{2} M_3 + \frac{\epsilon}{h}. \end{aligned} \quad (8)$$

Siccome l'analisi viene fatta per $h \rightarrow 0$, e l'unica richiesta è che sia $x + h, x - h \in [a, b]$, generalmente $[a, b]$ è un intervallo con una piccola ampiezza, contenente x al suo interno e possiamo pensare quindi che se la derivata terza non varia troppo vicino a x , sia $M_2 \approx f^{(3)}(x)$.

In particolare, visto che la funzione $g_2(h) := \frac{h^2}{2} M_3 + \frac{\epsilon}{h}$ ha minimo in $h^* = \frac{\epsilon^{1/3}}{M_3^{1/3}}$, si suggerisce di non scegliere numericamente valori di h più piccoli di h^* .

Esempio. Quale esempio consideriamo la funzione $f(x) = \exp(x)$ la cui derivata è $f'(x) = \exp(x)$. La valutiamo in $x_0 = 0$, calcolando

$$\delta_2(f, 0, h) = \frac{f(0 + h) - f(0 - h)}{2h} = \frac{\exp(h) - \exp(-h)}{2h}.$$

Il valore desiderato è $f'(0) = \exp(0) = 1$.

Otteniamo i risultati della tabella e della figura, dove valutiamo

$$E_h(f, 0) = |\delta_2(f, 0, h) - 1|$$

per $h = 10^0, \dots, 10^{-25}$, che evidenziano un degradamento attorno a $h^* = 10^{-6}$. Osserviamo come gli errori, per $h > h^*$ siano circa $(h^2/2)M_3 = (h^2/2)$ in quanto $M_3 \approx D^3 \exp(0) = 1$. Ad esempio per $h = 10^{-4}$ ci aspettiamo un errore di $5 \cdot 10^{-9}$ non troppo distante, almeno come ordine, da $1.667e - 09$.

h	$E_h(f, 0)$	h	$E_h(f, 0)$
1.0e + 00	1.752e - 01	1.0e - 13	2.442e - 04
1.0e - 01	1.668e - 03	1.0e - 14	7.993e - 04
1.0e - 02	1.667e - 05	1.0e - 15	5.471e - 02
1.0e - 03	1.667e - 07	1.0e - 16	4.449e - 01
1.0e - 04	1.667e - 09	1.0e - 17	1.000e + 00
1.0e - 05	1.210e - 11	1.0e - 18	1.000e + 00
1.0e - 06	2.676e - 11	1.0e - 19	1.000e + 00
1.0e - 07	5.264e - 10	1.0e - 20	1.000e + 00
1.0e - 08	6.077e - 09	1.0e - 21	1.000e + 00
1.0e - 09	2.723e - 08	1.0e - 22	1.000e + 00
1.0e - 10	8.274e - 08	1.0e - 23	1.000e + 00
1.0e - 11	8.274e - 08	1.0e - 24	1.000e + 00
1.0e - 12	3.339e - 05	1.0e - 25	1.000e + 00

Tabella 3: Valutazione dell'errore $E_h(f, 0)$, $f(x) = \exp(x)$, per alcuni passi h . L'errore sembra degradare a partire da circa $h = 1.0e - 06$.

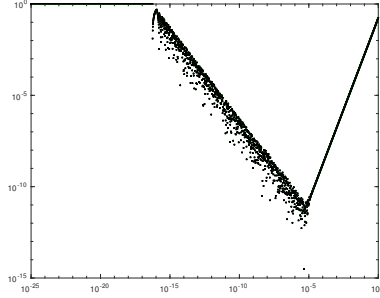


Figura 3: Errore $E_h(f, 0)$, con $f(x) = \exp(x)$, per alcuni passi h . Si vede, partendo da destra, come l'errore compiuto sia una funzione decrescente al diminuire di h fino a 10^{-5} (e non 10^{-6} come dice la tabella), dopo di che l'andamento, pur meno prevedibile, è essenzialmente crescente, fornendo errori tendenzialmente maggiori al diminuire di h .

Esempio. La derivata della funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

è

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nel punto $x_0 = 5$ abbiamo che $f'(x_0) = -1.479289940828402e - 02$.

Approssimiamo $f'(5)$, calcolando

$$\delta_2(f, 5, h) = \frac{f(5+h) - f(5-h)}{2h}.$$

Inoltre, con qualche conto, $f^{(3)}(5) \approx -6.302300339623963e - 03$.

Otteniamo i risultati della tabella, dove valutiamo

$$E_h(f, 0) = |\delta_2(f, 5, h) - f'(5)|$$

per $h = 1, 10^{-1}, \dots, 10^{-15}$. Ci aspettiamo un errore dell'ordine di $h^3 |f^{(3)}(\xi)|$ con $\xi \approx 5$, in quanto

$$|\delta_2(f, x, h) - f'(x)| = |h^2 f^{(3)}(\xi)|/2$$

ovvero

$$E_h(f, 5) \approx \frac{6 \cdot 10^{-3} h^3}{2} = 3 \cdot 10^{-3} h^2.$$

Ad esempio, per $h = 10^{-4}$ la stima offre $3 \cdot 10^{-11}$ molto prossima al valore numerico effettivo di $1.050e - 11$ (almeno come ordine!).

Come nel caso precedente, per $h < 1.0e - 08$ i valori della derivata cominciano a degradare.

h	$E_h(f, 0)$	h	$E_h(f, 0)$
$1.0e + 00$	$1.105e - 03$	$1.0e - 08$	$1.211e - 10$
$1.0e - 01$	$1.051e - 05$	$1.0e - 09$	$1.088e - 09$
$1.0e - 02$	$1.050e - 07$	$1.0e - 10$	$1.150e - 08$
$1.0e - 03$	$1.050e - 09$	$1.0e - 11$	$1.273e - 07$
$1.0e - 04$	$1.050e - 11$	$1.0e - 12$	$4.927e - 07$
$1.0e - 05$	$1.293e - 13$	$1.0e - 13$	$2.455e - 06$
$1.0e - 06$	$1.458e - 12$	$1.0e - 14$	$1.219e - 04$
$1.0e - 07$	$2.505e - 11$	$1.0e - 15$	$8.321e - 04$

Tabella 4: Valutazione dell'errore $E_h(f, 5)$, con $f(x) = 1/(1 + x^2)$, per alcuni passi h . L'errore degrada a partire da circa $h = 1.0e - 05$.

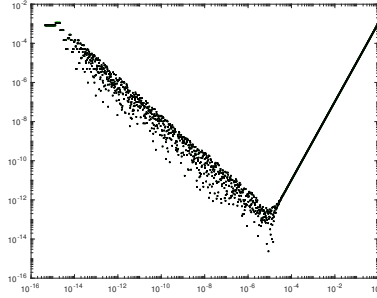


Figura 4: Errore $E_h(f, 5)$, con $f(x) = 1/(1 + x^2)$, per alcuni passi h . Si vede, partendo da destra, come l'errore compiuto sia una funzione decrescente al diminuire di h fino a 10^{-5} , dopo di che l'andamento, pur meno prevedibile, è essenzialmente crescente, fornendo errori tendenzialmente maggiori al diminuire di h .

4. Estrapolazione

Data una formula di approssimazione $\phi(h)$ di una quantità α , con la struttura

$$\phi(h) = \alpha + ch^p + O(h^q), \quad q > p \geq 1$$

dove c è una costante indipendente da h , abbiamo

$$\phi\left(\frac{h}{2}\right) = \alpha + c\left(\frac{h^p}{2^p}\right) + O(h^{pq}). \quad (9)$$

da cui moltiplicando (9) per 2^p e visto che essendo $q > p > 1$, dalla teoria degli infinitesimi $2^p O(h^{pq}) + O(h^q) = O(h^q)$, ricaviamo

$$\begin{aligned} \phi(h) - 2^p \phi(h/2) &= (\alpha + ch^p + O(h^q)) - 2^p(\alpha + c\left(\frac{h^p}{2^p}\right) + O(h^{pq})) \\ &= (1 - 2^p)\alpha + O(h^q) \end{aligned}$$

ovvero, visto che $O(h^q)/(1 - 2^p) = O(h^q)$,

$$\frac{\phi(h) - 2^p \phi(h/2)}{1 - 2^p} = \alpha + O(h^q).$$

In definitiva, abbiamo ottenuto una nuova approssimazione di α , il cui errore non è più dell'ordine di p , ma di $q > p$ e quindi potenzialmente migliore.

Sviluppando il rapporto incrementale δ_+ e il rapporto incrementale simmetrico δ dopo qualche conto simile a quelli già fatti, ma troncando la formula di Taylor rispettivamente al terzo e quinto ordine, abbiamo

- si ha per $f \in C^3([a, b])$, $x, x + h \in [a, b]$,

$$\delta_+(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + hf''(x) + O(h^2), \quad \xi_x \in (x, x+h).$$

ovvero della forma $\delta_+(f, x, h) = \alpha + ch^p + O(h^q)$ per $\alpha = f'(x)$, $c = 1$, $p = 1$, $q = 2$,

- si ha per $f \in C^5([a, b])$, $x-h, x+h \in [a, b]$

$$\delta_2(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{12}f^{(3)}(x) + O(h^4).$$

ovvero della forma $\delta_2(f, x, h) = \alpha + ch^p + O(h^q)$ per $\alpha = f'(x)$, $c = f^{(3)}(x)/12$, $p = 2$, $q = 4$.

Bibliografia.

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] Wikipedia, Finite Difference, https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference
- [3] Wikipedia, Numerical Differentiation, https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_differentiation