INTRODUZIONE *

A. SOMMARIVA † E M. GENTILE ‡

1. Introduzione. Il proposito di questo lavoro è quello di introdurre nuove mesh debolmenti ammissibili (spesso abbreviate in letteratura con il termine WAM) di bassa cardinalità per domini poligonali Ω, utilizzando principalmente opportune quadrangolazioni di Ω e mesh debolmenti ammissibili per quadrangoli (o al più triangoli).

A tale scopo ricordiamo che una mesh debolmente ammissibile di grado n per un dominio compatto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (non necessariamente poligonale) è un insieme finito di punti $A_n = \{x_1, \ldots, x_M\} \subset \mathcal{P}$ tale che

$$\|p\|_\Omega \leq C_n \|p\|_{A_n}, \ \ p \in \mathbb{P}_n$$

con C_n una sequenza che cresce al più polinomialmente, $\|\cdot\|$ la norma infinito e $\mathbb{P}_n$ lo spazio dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}^d$ (avente cardinalità $M = \left(\begin{array}{c} n+d \\ n \end{array} \right)$).

Utilizzando due recenti algoritmi è possibile estrarre da una WAM su Ω dei punti unisolventi $\xi = \{\xi_k\}_{k=1,\ldots,M}$ per l'interpolazione polinomiale di grado n, il cui determinante di Vandermonde, rispetto una base prefissata $\phi_1, \ldots, \phi_M$ di $\mathbb{P}_n$, sia particolarmente elevato. Per l'implementazione numerica di tali algoritmi, i punti chiave sono delle classiche routines dell'algebra lineare come la fattorizzazione QR (nel qual caso i punti estratti si chiamano *punti approssimati di Fekete*) oppure la LU (e i punti estratti sono noti come *punti discreti di Leja*). Con un terzo algoritmo numerico risulta inoltre possibile determinare delle formule di cubatura su domini bivariati aventi, fissato un grado di precisione, un numero di nodi particolarmente piccolo e interni a Ω.

Dal punto di vista computazionale, affinchè tale estrazione sia meno costosa, si cercano WAM di cardinalità bassa. Poiche' se $\Omega = \cup_{i=1}^s \Omega_i$ e $A_n^{(i)}$ è una WAM per Ω_i allora $\cup_{i=1}^s A_n^{(i)}$ è una WAM per Ω, nel caso di un dominio poligonale Ω si è in passato scelto di calcolare una triangolazione minimale di Ω e quindi, partendo da WAM sui singoli triangoli, ottenere una WAM per Ω. In questo lavoro intendiamo seguire una strada diversa. Dapprima calcoliamo una quadrangolazione del poligono semplice Ω (con un numero particolarmente basso di quadrangoli e triangoli) e di seguito, note delle WAM per quadrangoli e triangoli determiniamo una WAM di cardinalità particolarmente bassa per il poligono Ω.

Il nostro studio è quindi andato in due direzioni diverse: la costruzione di una quadrangolazione $\mathcal{Q}$ *quasi-minimale* per un dominio poligonale semplice Ω e il calcolo di punti quasi ottimali per l'interpolazione polinomiale (come pure formule cubatura) su Ω.

Nel primo caso, dopo la descrizione dell'algoritmo, si è fornita una stima del numero di quadrangoli e triangoli di $\mathcal{Q}$ e una implementazione Matlab dello stesso che mostra, anche su poligoni non convessi, la bontà dell'idea. Sottolineiamo che in letteratura lo studio di quadrangolazioni quasi-minimali sembra essere un nuovo argomento di ricerca e che questo lavoro pone un importante tassello in tale ambito.

In seguito, si sono determinate delle nuove WAM ed effettuati i confronti con quanto precedentemente noto. Le nuove WAM sono in generale di cardinalità minore di quelle precedentemente note e permettono quindi, a parità di grado, l'estrazione di *punti approssimati*

*Ultima revisione: 11 febbraio 2011

†DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA, VIA TRIESTE 63, 35121 PADOVA, ITALIA (ALVISE@MATH.UNIPD.IT)

‡DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA, VIA TRIESTE 63, 35121 PADOVA, ITALIA (MRRUSSO@MATH.UNIPD.IT)

di Fekete, *punti discreti di Leja* nuove formule algebriche di cubatura ad un minor costo computazionale.