CONOSCENZE MATEMATICHE RICHIESTE E OTTENUTE DAL CORSO DI ANALISI NUMERICA *

A. SOMMARIVA E M. VIANELLO†

1. Approssimazione di funzioni.

Conoscenze richieste. Spazi vettoriali, polinomi, funzioni continue, funzioni integrabili, Teorema di Weierstrass, trigonometria di base, derivate superiori di una funzione, interpolazione e approssimazione di funzioni, programmazione in Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Spazi normati e di Banach. Problema di miglior approssimazione. Esistenza e unicità dell'elemento di miglior approssimazione in alcuni spazi di Banach. Elemento di miglior approssimazione in $C([a,b])$ con $[a,b]$ compatto. Teorema di equioscillazione. Polinomi di Chebyshev e migliore approssimazione. Costante di Lebesgue. Stabilità dell'interpolazione e costante di Lebesgue. Operatori lineari limitati. Relazione tra la costante di Lebesgue, interpolante polinomiale e la miglior interpolante di $f \in C([a,b])$. Teoremi di Jackson. Funzioni lipschitziane e hölderiane.

2. Miglior approssimazione in spazi euclidei.

Conoscenze richieste. Spazio vettoriale. Spazio normato. Vettori linearmente indipendenti. Sistemi lineari. Operatore delta di Kronecker.

Conoscenze ottenute. Spazi euclidei. Elemento di miglior approssimazione in un sottospazio di dimensione finita di uno spazio euclideo. Determinazione dei coefficienti di Fourier per basi generiche e ortogonali.

3. Interpolazione trigonometrica e Fast Fourier Transform

Conoscenze richieste. Funzioni quadrato integrabili. Funzioni periodiche. Operazioni elementari in campo complesso. Spazi vettoriali. Elementi linearmente indipendenti. Ortogonalità di un sistema di vettori. Rappresentazione dell'elemento di miglior approssimazione in spazi Euclidei. Conoscenza di Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Coefficienti di Fourier. Base trigonometrica e ortogonale di polinomi trigonometrici. Elemento di miglior approssimazione di $L^2_\pi([0,2\pi])$ in un sottospazio di polinomi trigonometrici. Legame tra i coefficienti di Fourier e la formula dei trapezi. Interpolazione trigonometrica. FFT e complessità computazionale. FFT in Matlab/Octave.

4. Minimi quadrati e polinomi ortogonali

Conoscenze richieste. Integrazione di funzioni. Funzioni quadrato integrabili. Calcolo dell'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei. Condizionamento di una matrice. Polinomi.

Conoscenze ottenute. Problema ai minimi quadrati (nel continuo). Funzione peso. Soluzione analitica del problema ai minimi quadrati (rispetto una funzione peso). Matrice di Hilbert. Problema ai minimi quadrati (nel continuo) e polinomi ortogonali. Proprietà delle radici dei polinomi ortogonali.

5. Quadratura numerica

Conoscenze richieste. Integrale di Riemann. Teorema di Weierstrass. Polinomi di Lagrange. Derivate di ordine superiore. Operatori lineari limitati. Teorema di Weierstrass sulla densità di uno spazio polinomiale rispetto $C([a,b])$ con $[a,b]$ chiuso. Programmazione in Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Formule di quadratura. Grado di precisione. Formule interpolatorie. Formule di Newton-Cotes. Regola del trapezio e di Simpson. Formule composte. Errore di alcune formule di quadratura. Formule a pesi positivi. Errore formule di quadratura di Newton-Cotes. Errore formule di quadratura di Gauss. Stabilità di una formula di quadratura. Teorema di Polya-Steklov.

6. Metodi iterativi per la soluzione di equazioni lineari

*Ultima revisione: 26 gennaio 2010

†Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Universitá degli Studi di Padova, via Trieste 63, 35121 Padova, Italia (alvise@euler.math.unipd.it, marcov@euler.math.unipd.it).

Conoscenze richieste. Spazi vettoriali, operazioni elementari con le matrici, programmazione in Matlab/Octave. Fattorizzazione LU. Norma di matrici.

Conoscenze ottenute. Metodi iterativi stazionari. Metodo di Jacobi. Metodo di Gauss-Seidel. Velocità di convergenza. Raggio spettrale e convergenza di un metodo stazionario. Metodi di rilassamento. Metodo SOR. Velocità di convergenza asintotica. Convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per particolari matrici. Metodo del gradiente coniugato.

7. Autovalori di una matrice

Conoscenze richieste. Matrici, vettori. Operazioni con matrici e vettori. Matrici simmetriche. Conoscenze di Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Teoremi di Gerschgorin. Metodo delle potenze e loro convergenza. Metodo delle potenze inverse e loro convergenza. Metodo QR e loro convergenza.

8. Sistemi lineari sovradeterminati e SVD

Conoscenze richieste. Spazi vettoriali. Operazioni elementari con le matrici. Rango di una matrice. Programmazione in Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Sistemi lineari sovradeterminati. Insieme delle soluzioni ai minimi quadrati. Fattorizzazione QR. Fattorizzazione SVD. Calcolo della fattorizzazione QR e SVD in Matlab/Octave. Calcolo della soluzione ai minimi quadrati: equazioni normali, metodo QR, metodo SVD. SVD e compressione delle immagini.

9. Equazione di Poisson

Conoscenze richieste. Derivate di ordine superiore. Derivate parziali. Formula di Taylor. Programmazione in Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Classificazione di equazioni alle derivate parziali. Discretizzazione del Laplaciano in dimensione uno e due. Discretizzazione dellequazione di Poisson-Laplace. Un metodo alle differenze a 5 punti. Stima dell'errore. Risoluzione di alcune equazioni di Poisson in Matlab.

10. Equazione del calore

Conoscenze richieste. Derivate di ordine superiore. Derivate parziali. Formula di Taylor. Equazioni differenziali. Teoremi di Gerschgorin. Calcolo matriciale e vettoriale. Matrici definite positive. Conoscenza di Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Equazione del calore. Metodo delle linee. Discretizzazione con Eulero implicito ed Eulero esplicito. Stabilità dei due metodi.