Approssimazione di funzioni

19 gennaio 2009

1 Spazi normati e di Banach

Sia X uno spazio vettoriale (cf. [17]). La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice spazio normato (cf. [16]) se la funzione $\|\cdot\| \to \mathbb{R}$ (detta *norma*) ha le seguenti proprietà

1. Un vettore ha sempre lunghezza strettamente positiva. L'unica eccezione è il vettore nullo che ha sempre lunghezza zero.
2. Moltiplicare un vettore per un numero reale ha l'effetto di moltiplicare la sua lunghezza per il modulo di esso.
3. Vale la disuguaglianza triangolare, cioè

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \; \forall\, x, y \in X.$$

Uno spazio normato X si dice di Banach (cf. [13]) se e solo se è completo, cioè ogni successione di Cauchy in X è convergente. Ricordiamo che una successione $\{x_n\}_n$ di elementi di X si dice di Cauchy (cf. [14]) se

$$\forall \epsilon > 0 \text{ esiste } N(\epsilon) \text{ tale che } m, n > N(\epsilon) \text{ implica che } \|x_m - x_n\| \leq \epsilon.$$

Alcuni classici esempi di spazi di Banach sono

- $\mathbb{R}^n$ dotato della norma *euclidea* $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$;
- $C([a,b])$ con la norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|;$$

- $L^2([a,b])$ (spazio delle funzioni integrabili alla Lebesgue, cf. [12]) con la norma

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}.$$

2 Il problema di miglior approssimazione

Sia $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $\mathcal{W}$ un suo sottospazio vettoriale (non necessariamente di dimensione finita). Sia $f \in \mathcal{V}$. La miglior approssimazione di f in $\mathcal{W}$ consiste nel determinare, se esiste, un elemento $s^* \in \mathcal{W}$ tale che sia minima la quantità $\|f - s\|$ con $s \in \mathcal{W}$.

In quest'ambito astratto, risulta di fondamentale importanza stabilire le condizioni di esistenza di un elemento di miglior approssimazione $s^* \in S \subset X$.

Teorema 2.1 Esistenza. *Sia $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $\mathcal{W}$ un suo sottospazio di dimensione finita. Per ogni $f \in \mathcal{V}$ esiste un elemento di miglior approssimazione $w^* \in \mathcal{W}$.*

Dimostrazione (cf. [3, p.167]). Di sicuro $0 \in \mathcal{W}$, essendo $\mathcal{W}$ un sottospazio vettoriale. Quindi male che vada, $\|f - w^*\| \leq \|f - 0\| = \|f\|$. Di conseguenza, se esiste, w^* sta nella palla di elementi di $\mathcal{W}$ con centro f e raggio $\|f\|$, che denoteremo con $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}(f, \|f\|) := \mathcal{B}(f, \|f\|) \cap \mathcal{W}$. Ma il sottospazio $\mathcal{W}$ ha dimensione finita, e quindi $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}(f, \|f\|)$ è un insieme compatto, essendo tali tutti i sottinsiemi chiusi e limitati di uno spazio normato di dimensione finita.

Inoltre $\|f - \cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Per vederlo, basta mostrare che

$$\text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } \delta(\epsilon) > 0 \text{ tale che } \|f - g\| \leq \delta(\epsilon) \text{ implica } |\|f\| - \|g\||.$$

Supponiamo sia $\|f\| \geq \|g\|$. Da $f = g + (f - g)$, si ha per la disuguaglianza triangolare

$$\|f\| = \|g + (f - g)\| \leq \|g\| + \|f - g\|$$

$$0 \leq \|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|$$

$$|\|f\| - \|g\|| \leq |\|f - g\|| = \|f - g\|.$$

Di conseguenza posto $\delta(\epsilon) = \epsilon$, se $\|f - g\| \leq \epsilon$ allora

$$|\|f\| - \|g\|| \leq \|(f - g)\| \leq \epsilon.$$

Se viceversa $\|g\| \geq \|f\|$ basta riproporre lo stesso ragionamento partendo da $g = f + (g - f)$. Quindi $\|f - \cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Dal teorema di Weierstrass (cf [5, p.117]), visto che una funzione continua in un compatto di $\mathbb{R}$ assume un valore minimo, si conclude che esiste un minimo per la funzione $\|f - \cdot\|$ e che esiste l'elemento di miglior approssimazione w^*. ∎

Nota. Uno spazio normato V, si dice *strettamente convesso*, cf. [4, p.141]), se

$$\|x\|_{\mathcal{V}} \leq r,\ \|y\|_{\mathcal{V}} \leq r \to \|x + y\|_{\mathcal{V}} < 2r$$

a meno che $x = y$. Esempi di questi spazi normati sono $L^p([a, b])$ (cf. [15]). Si dimostra che

Teorema 2.2 *In uno spazio normato strettamente convesso V il problema di miglior approssimazione ha un'unica soluzione (qualsiasi sia il sottospazio W).*

Dimostrazione, (cf. [4, p.142]). Siano $u, v \in \mathscr{W}$ due elementi di miglior approssimazione di $f \in \mathscr{V}$. Sia $w = (u+v)/2$. Supponiamo sia $x = f-u$, $y = f-v$, $r = \|f-u\| = \|f-v\|$. Essendo lo spazio strettamente convesso

$$\|(f-u)+(f-v)\| = \|x+y\|\mathscr{V} < 2r$$

da cui

$$\|2f-u-v\| < 2r \text{ cioè } \|f-\frac{u+v}{2}\| < r$$

il che è assurdo in quanto sarebbe $\frac{u+v}{2} \in \mathscr{W}$ elemento di miglior approssimazione (e non u, v come supposto per ipotesi). ∎

3 Approssimazione in $(C([a,b]),\infty)$

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato. E' noto che $(C([a,b]),\infty)$ è uno spazio di Banach e che $\mathscr{P}_n$, l'insieme dei polinomi aventi grado uguale o inferiore a n, è un suo sottospazio vettoriale. Con riferimento al teorema precedente, posto $\mathscr{V} := C([a,b])$, $\mathscr{W} := \mathscr{P}_n$, data una funzione continua $f \in C([a,b])$ e fissato n, si cerchi il polinomio $p_N \in \mathscr{P}_n$ tale che

$$\|f-p_n\|_\infty = \min_{q_n \in \mathscr{P}_n} \|f-q_n\|_\infty \tag{1}$$

dove

$$\|f-p\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)-p(x)| \tag{2}$$

Questo problema, detto di *minimax* o di *miglior approssimazione uniforme*, non è in generale di facile soluzione e vedremo quali proprietà gode il polinomio p_n^* verificante (1). Di seguito considereremo il caso speciale in cui $f(x) = x^{n+1}$ e mostreremo il legame tra la soluzione del problema di minimax e l'interpolazione in nodi di Chebyshev.

Inizialmente ci poniamo il quesito se p_n^* esista e sia unico. Sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza del polinomio di miglior approssimazione, in quanto $(C([a,b]),\infty)$ è uno spazio normato e $\mathscr{W} := \mathscr{P}_n$ è un suo sottospazio di dimensione $n+1$. Di conseguenza, p_n^* esiste.

Mostriamo ora, tramite il teorema di De La Vallee-Poussin, una delle due direzioni di un teorema di Chebyshev da cui derivano le proprietà dei polinomi di miglior approssimazione. Di seguito vedremo che un tale polinomio è unico.
Poniamo

$$D(f,p_n^*) = \|f-p_n\|_\infty,\ d_n(f) = \min_{p_n\in\mathscr{P}_n} D(f,p_n^*).$$

Risulta evidente che per ogni $p \in \mathscr{P}_n$ si ha

$$d_n(f) = \min_{p_n\in\mathscr{P}_n} D(f,p_n^*) \le D(f,p).$$

Il nostro proposito è di vedere quando vale anche l'implicazione opposta, caratteristica del polinomio di miglior approssimazione.

Teorema 3.1 *Se un polinomio $p_n \in \mathscr{P}_n$ soddisfa a*

$$f(x_j) - p_n(x_j) = (-1)^j e_j, \quad j = 0, \ldots, n+1$$

con

1. $a \leq x_0 < x_1 < \ldots x_{n+1} \leq b$,
2. *tutti gli e_j hanno segno costante,*

allora

$$\min_j |e_j| \leq d_n(f)$$

Dimostrazione (cf. [2, p.222], [3, p.172]). Supponiamo per assurdo che la tesi non sia verificata. Di conseguenza $\min_j |e_j| > d_n(f)$ e quindi esiste un polinomio $q_n \in \mathscr{P}_n$ (ad esempio il polinomio di miglior approssimazione che sappiamo esistere) tale che

$$\min_j |e_j| > \max_{x \in [a,b]} |f(x) - q_n(x)|.$$

Il polinomio q_n non può coincidere con p_n perchè per tutti gli indici $j = 0, \ldots, n+1$

$$|f(x_j) - p_n(x_j)| > \max_{x \in [a,b]} |f(x) - q_n(x)| \leq |f(x_j) - q_n(x_j)|$$

per cui $p_n - q_n$ non è il polinomio nullo.
Da

$$q_n(x_j) - p_n(x_j) = (q_n(x_j) - f_n(x_j)) + (f_n(x_j) - p_n(x_j)) = (q_n(x_j) - f_n(x_j)) + (-1)^j e_j$$

e poichè $\min_j |e_j| > \max_{x \in [a,b]} |f(x) - q_n(x)|$ implica

$$|e_j| \geq \min_j |e_j| > \max_{x \in [a,b]} |f(x) - q_n(x)| \geq |f(x_j) - q_n(x_j)|$$

per cui necessariamente il segno di $q_n(x_j) - p_n(x_j)$ è lo stesso di quello di $f_n(x_j) - p_n(x_j)$. Quindi il polinomio non nullo $q_n - p_n \in \mathscr{P}_n$ cambia segno $n+1$ volte il che significa che ha almeno $n+1$ zeri e quindi non può essere un polinomio di grado n che è una contraddizione. ∎

Supponiamo ora che sia

$$|f(x_j) - p_n(x_j)| = D(f, p_n), \; j = 0, \ldots, n+1.$$

Dal teorema di De La Vallee-Poussin, in virtù di quest'ultima richiesta che sfruttiamo nell'ultimo passaggio

$$D_n(f, p_n) \geq d_n(f) \geq \min_j |e_j| = D(f, p_n)$$

cioè $D_n(f, p_n) = d_n(f)$ e quindi p_n è proprio un polinomio di miglior approssimazione.

Al momento resta il dubbio che esista un polinomio avente queste proprietà . A questa domanda risponde il seguente teorema di Chebyshev, detto anche di *equioscillazione*. Secondo alcuni questo teorema è dovuto a Borel (1905).

Teorema 3.2 *Un polinomio $p_n \in \mathscr{P}_n$ è un polinomio di miglior approssimazione (in norma $\|\cdot\|_\infty$) di una funzione $f \in C([a,b])$ se e solo se $f(x) - p_n(x)$ assume i valori $\pm D(f, p_n)$ con segni alterni, almeno $n+2$ volte in $[a,b]$.*

Per una dimostrazione completa di questo teorema si consulti [4, p.149] e per una sua difficile generalizzazione a polinomi razionali [1, p.51].

Figura 1: Charles Jean de la Vallee-Poussin (1866-1962).

Teorema 3.3 *Il polinomio $p_n \in \mathscr{P}_n$ di miglior approssimazione di una funzione $f \in C([a,b])$ (in norma $\|\cdot\|_\infty$) esiste ed è unico.*

Dimostrazione (cf. [4, p.144]). Supponiamo esistano due polinomi p_n, q_n di miglior approssimazione in norma $\|\cdot\|_\infty$ e si consideri il polinomio $(p_n + q_n)/2 \in \mathscr{P}_n$. Sfruttando la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{p_n(x) + q_n(x)}{2} \right| &= \frac{1}{2} |(f(x) - p_n(x)) + (f(x) - q_n(x))| \\ &\leq \frac{1}{2} |f(x) - p_n(x)| + \frac{1}{2} |f(x) - q_n(x)| \leq d_n(f) \qquad (3) \end{aligned}$$

per ogni $x \in [a,b]$, per cui essendo p_n, q_n polinomi di miglior approssimazione le disuguaglianze sono in realtà uguaglianze (altrimenti avremmo trovato un polinomio *migliore* dei precedenti) e, così , pure $(p_n + q_n)/2$ è un polinomio di miglior approssimazione. Se ne ricava che

$$\left| f(x) - \frac{p_n(x) + q_n(x)}{2} \right| = \frac{1}{2} |f(x) - p_n(x)| + \frac{1}{2} |f(x) - q_n(x)|.$$

Fissato $x \in [a,b]$ e posto $\alpha = \frac{f(x) - p_n(x)}{2}$, $\beta = \frac{f(x) - q_n(x)}{2}$ si ha che

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

Ma α e β sono numeri reali e l'unica possibilità per cui ciò accada e che α, β abbiano segni concordi. Inoltre in un punto x^* in cui $|f(x) - \frac{p_n(x)+q_n(x)}{2}|$ è massimo necessariamente sono pure massimi $|f(x) - p_n(x)|$, $|f(x) - q_n(x)|$ perchè i tre polinomi sono di miglior approssimazione. Più esplicitamente, se così non fosse, e per assurdo

$$|f(x^*) - p_n(x^*)| + |f(x^*) - q_n(x^*)| < 2\, d_n(f)$$

allora

$$\begin{aligned} D(f, \frac{p_n + q_n}{2}) &= |f(x^*) - \frac{p_n(x^*) + q_n(x^*)}{2}| \\ &= \frac{1}{2}(|f(x^*) - p_n(x^*)| + |f(x^*) - q_n(x^*)|) \\ &< \frac{1}{2} \cdot 2\, d_n(f) = d_n(f) \end{aligned} \quad (4)$$

il che è assurdo appunto perchè p_n, q_n sono polinomi di miglior approssimazione e quindi

$$D(f, \frac{p_n + q_n}{2}) \geq d_n(f).$$

Di conseguenza, $|f(x^*) - p_n(x^*)| = |f(x^*) - q_n(x^*)|$ e visto che gli argomenti dei moduli hanno pure lo stesso segno

$$f(x^*) - p_n(x^*) = f(x^*) - q_n(x^*).$$

Quindi $p_n(x^*) = q_n(x^*)$. In definitiva, gli $n+2$ punti di p_n e q_n in cui la massima equioscillazione è raggiunta (ed è pari a $d_n(f)$) sono gli stessi. Ma due polinomi di grado n che coincidono in $n+2$ punti distinti sono uguali. Infatti se ciò accade $p_n - q_n$ è un polinomio di grado n che si annulla in $n+2$ punti il che implica che è il polinomio nullo cioè $p_n \equiv q_n$. ▮

4 Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Consideriamo la funzione $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ con $x \in [-1, 1]$ (cf. [2, p.211]). A priori, in virtù della presenza del coseno, T_n non sembra essere un polinomio. In realtà si vede subito che $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$, $T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$. Dal teorema di prostaferesi

$$\cos((n \pm 1)\,\theta) = (\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) \mp (\sin(n\theta)) \cdot \sin(\theta)$$

si vede inoltre che per $\theta = \arccos(x)$ si ha

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\,(\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) = 2T_n(x)x$$

da cui

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n - T_{n-1}$$

Di conseguenza, per ricorrenza, si deduce che T_n è un polinomio di grado n e che inoltre per $n > 0$ è del tipo $T_n(x) = 2^{n-1}\,x^n + \cdots$.

Gli zeri x_k del polinomio di Chebyshev sono i punti per cui $\cos(n \arccos(x_k)) = 0$, per cui

$$n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\arccos(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \; k = 0, \dots, n-1.$$

Notiamo che gli zeri del polinomio di Chebyshev T_n sono esattamente n, distinti e nell'intervallo $[-1,1]$.

5 Facoltativo: Un problema di minimax

Sia $f \in C^{(n+1)}([-1,1])$ e si considerino $n+1$ punti distinti $x_0, \dots, x_n \in [-1,1]$. Supponiamo inoltre che $f^{(n+1)}$ sia costante. Se p_n è il polinomio che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ $(k = 0, \dots, n)$, dal teorema del resto dell'interpolazione polinomiale,

$$R(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

con $\xi \in \mathscr{I}(x_0, \dots, x_n)$ dove $\mathscr{I}(x_0, \dots, x_n)$ è il più piccolo intervallo aperto contenente $x_0, \dots, x_n$. Essendo $f^{(n+1)}$ costante, $R(x)$ in norma $\|\cdot\|_\infty$ è minimo per quella scelta di $x_0, \dots, x_n$ per cui è minimo

$$\max_{x \in [-1,1]} |(x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)|.$$

Ci si domanda, in questo caso, quali siano i punti migliori $x_0^*, \dots, x_n^*$ in cui effettuare l'interpolazione, così da minimizzare $\|R\|_\infty$ e di conseguenza determinare il polinomio di miglior approssimazione uniforme interpolando f nei punti $x_0^*, \dots, x_n^*$.

Si osserva che $r_{n+1}(x) := (x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)$ è un polinomio monico di grado $n+1$ e quindi si può riscrivere, per un certo $q_n \in \mathscr{P}_n$, come $r_{n+1}(x) = x^{n+1} - q_n(x)$. Di conseguenza

$$\max_{x \in [-1,1]} |r_{n+1}(x)| = \max_{x \in [-1,1]} |x^{n+1} - q_n(x)|$$

è minimo al variare degli $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$ quando $q_n(x)$ è il polinomio di miglior approssimazione uniforme di x^{n+1}. Sfruttando il teorema di Chebyshev, mostreremo che q_n è l'interpolante polinomiale di x^{n+1} negli $n+1$ zeri

$$t_k = \cos\left(\frac{(2k+1)}{(n+1)} \frac{\pi}{2}\right), \; k = 0, \dots, n$$

del polinomio di Chebyshev di grado $n+1$

$$T_{n+1}(x) = \cos\left((n+1)\arccos(x)\right).$$

Notiamo che in questo caso, per le proprietà interpolatorie, $t_k^{n+1} = q_n(t_k)$ e necessariamente $t_k^{n+1} - q_n(t_k) = 0$ per $k = 0, \dots, n$, per cui, a meno di un fattore moltiplicativo, $r_{n+1}(x) = x^{n+1} - q_n(x)$ è proprio il polinomio di Chebyshev di grado T_{n+1} perchè si annulla negli stessi $n+1$ punti ed ha lo stesso grado $n+1$. Basta così mostrare che $T_{n+1} = x^{n+1} - q_n(x)$ gode delle proprietà di equioscillazione. E così è , essendo $|\cos(x)| \le 1$, $\cos\left((n+1)\arccos(x)\right) = \pm 1$ quando $(n+1)\arccos(x)$ è multiplo di $k\pi$, cioè

$$(n+1)\arccos(s_k) = k\pi$$

$$\arccos(s_k) = \frac{k\pi}{n+1}$$
$$s_k = \cos(\arccos(s_k)) = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

per $k = 0, \ldots, n+1$ (non siamo andati oltre questi indici poichè per la periodicità del coseno avremmo ottenuto solo la ripetizione di alcuni punti).

6 Qualche esempio numerico

Per calcolare la miglior approssimazione uniforme di una funzione $f \in C([a,b])$ (con $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato) si usa spesso l'algoritmo di Remez (cf. [?]). Una sua implementazione in Matlab/Octave è distribuita in [7]. Alcuni test immediati, mostrano che la routine può avere problemi con versioni di Matlab strettamente precedenti alla 6.1, ma funziona con la 6.1 e successive, nonchè con le ultime releases di Octave. Il file, scaricabile da internet, una volta decompresso presenta una cartella contenente le routines `err.m`, `findzero.m`, `remez.m`, `test.m`, nonchè la spiegazione sull'algoritmo `Remez.pdf`. La routine centrale è `remez.m` che richiama `findzero.m`, `err.m`, mentre `test.m` è un driver che illustra il suo utilizzo effettuando due esempi relativamente alla miglior approssimazione uniforme rispettivamente di $\exp(x)$ e $\sin(x)$ in $[0, 2^{-10}]$ di grado 2. Il lancio del driver `test.m` offre come risultato i 2 grafici degli errori assoluti tra le funzioni e i polinomi di miglior approssimazione uniforme.
La routine `remez.m` ha una sintassi

```
A=remez(fun,fun_der,interval,order)
```

Gli input sono la funzione `fun`, la sua derivata `fun_der`, l'intervallo `interval` e il grado `order` mentre nella variabile di output `A` viene assegnato un vettore di lunghezza uguale a `order` + 2, in cui nell'ultima componente viene immagazzinato una stima dell'errore compiuto $\|f - p_n^*\|_\infty$, mentre nelle rimanenti ci sono i coefficienti del polinomio di miglior approssimazione in [a,b] relativamente alla base monomiale shiftata $\{(x-a)^k\}$, con a estremo inferiore dell'intervallo $[a,b]$.

Vediamo un esempio che illustri il suo utilizzo. In [4, p. 128], si asserisce che la miglior approssimazione di grado 1 della funzione $f(x) = x^4$, in $[0,1]$, è $p_1^*(x) = x - \frac{3}{16}\sqrt[3]{2} \approx x - 0.236\ldots$. Per verificare la bontà del codice Matlab/Octave `remez.m` digitiamo su shell

```
>> fun=inline('x.^4');
>> fun_der= inline('4*x.^3');
>> interval=[0,1];
>> order=1;
>> A= remez(fun, fun_der, interval, order)

A =

   -0.2362
```

```
    1.0000
   -0.2362

>>
```

Questo esperimento ci fa capire che in effetti i coefficienti del polinomio di miglior approssimazione uniforme sono descritti in ordine crescente per grado rispetto alla base $1, x, \ldots, x^n$, e che i risultati proposti sono corretti (era $p_1^*(x) \approx x - 0.236\ldots$). L'ultima componente di A, è lo scalare -0.2362 che rappresenta il massimo errore compiuto in modulo, ma dotato di segno. Di conseguenza,

$$\|f - p_1^*\|_\infty \approx |-0.2362| = +0.2362.$$

Se implementiamo la routine `mytest.m`

```
fun=inline('x.^4');
fun_der= inline('4*(x.^3)');
interval=[0,1];
order_vett=0:3;

for index=1:length(order_vett)
    order=order_vett(index);
    A= remez(fun, fun_der, interval, order);

    A1=A(1:end-1);
    E=A(end);

    fprintf('\n \t [DEGREE]: %3.0f [ERR. INFTY NORM]: %2.2e',order,abs(E) );
end
```

che calcola i polinomi di miglior approssimazione p_k^* per $k = 0, \ldots, 3$ nell'esempio precedente e la lanciamo dalla shell, otteniamo

```
>> mytest

          [DEGREE]:   0 [ERR. INFTY NORM]: 5.00e-001
          [DEGREE]:   1 [ERR. INFTY NORM]: 2.36e-001
          [DEGREE]:   2 [ERR. INFTY NORM]: 6.35e-002
          [DEGREE]:   3 [ERR. INFTY NORM]: 7.81e-003
>>
```

Consideriamo quale nuovo esempio, $f(x) = \exp(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Il polinomio di miglior approssimazione di grado 3 è (cf. [2, p.202], [3, p.174])

$$p_3^* = 0.994579 + 0.995668\,x + 0.542973\,x^2 + 0.179533\,x^3.$$

Per prima cosa lo verifichiamo con l'algoritmo di Remez in Matlab.

```
>> fun=inline('exp(x)');
>> fun_der=inline('exp(x)');
```

```
>> interval=[-1,1];
>> order=3;
>> A= remez(fun, fun_der, interval, order);
>> format long
>> A

A =

   0.36235107106275
   0.44832258411240
   0.00437233753337
   0.17953348361616
  -0.00552837010869
```

Notiamo subito che i primi 4 coefficienti in A non coincidono con quelli di p_3^*. La ragione è semplice perchè la base in cui è descritto il polinomio di miglior approssimazione è del tipo $1, (x+1), (x+1)^2, (x+1)^3$ e non $1, x, x^2, x^3$. Quindi vogliamo vedere, aiutandoci col calcolo simbolico di Matlab (o Maxima di Octave) che

$$\begin{aligned} p_3^* &= 0.36235107106275 + 0.44832258411240 \cdot (x+1) + 0.00437233753337 \cdot (x+1)^2 + \\ &+ 0.17953348361616 \cdot (x+1)^3 \end{aligned} \tag{5}$$

coincide con

$$p_3^* = 0.994579 + 0.995668\, x + 0.542973\, x^2 + 0.179533\, x^3.$$

In Matlab

```
>> syms x
>> p=0.36235107106275+0.44832258411240*(x+1)
     +0.00437233753337*(x+1).^2+0.17953348361616*(x+1).^3

p =
7301899142731767/9007199254740992
+4038130845500765/9007199254740992*x+
2520480983810965/576460752303423488*(x+1)^2
+3234187719657061/18014398509481984*(x+1)^3

>> simplify(p)

ans =
573336033147670005/576460752303423488+
286981678583374373/288230376151711744*x+
313002502070888821/576460752303423488*x^2+
3234187719657061/18014398509481984*x^3

>> 573336033147670005/576460752303423488
ans =
   0.99457947632468
```

```
>> 286981678583374373/288230376151711744
ans =
   0.99566771002762
>> 313002502070888821/576460752303423488
ans =
   0.54297278838185
>> 3234187719657061/18014398509481984
ans =
   0.17953348361616
>>
```

e quindi l'algoritmo di Remez calcola proprio il polinomio di miglior approssimazione (in norma infinito).

Vediamo la qualità dell'approssimazione aumentando il grado.

```
fun=inline('exp(x)');
fun_der= inline('exp(x)');
interval=[-1,1];
order_vett=1:10;

for index=1:length(order_vett)
    order=order_vett(index);
    A= remez(fun, fun_der, interval, order);

    A1=A(1:end-1,1);
    E=A(end);

    fprintf('\n \t [DEGREE]: %3.0f [ERR. INFTY NORM]: %2.2e',order,abs(E) );
end
```

ottenendo

```
>> mytest

          [DEGREE]:   1 [ERR. INFTY NORM]: 2.79e-001
          [DEGREE]:   2 [ERR. INFTY NORM]: 4.50e-002
          [DEGREE]:   3 [ERR. INFTY NORM]: 5.53e-003
          [DEGREE]:   4 [ERR. INFTY NORM]: 5.47e-004
          [DEGREE]:   5 [ERR. INFTY NORM]: 4.52e-005
          [DEGREE]:   6 [ERR. INFTY NORM]: 3.21e-006
          [DEGREE]:   7 [ERR. INFTY NORM]: 2.00e-007
          [DEGREE]:   8 [ERR. INFTY NORM]: 1.11e-008
          [DEGREE]:   9 [ERR. INFTY NORM]: 5.52e-010
          [DEGREE]:  10 [ERR. INFTY NORM]: 2.50e-011
```

Vediamo un paragone con la troncata della serie di Taylor di grado opportuno. Essendo

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},$$

consideriamo quale polinomio di grado p,

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}.$$

Salviamo in `mytaylor.m`

```
fun=inline('exp(x)');
interval=[-1,1];
order=3;

order_vett=1:10;

% Punti tests e valutazione funzione.
x=linspace(interval(1),interval(2),10000);
fx=feval(fun,x);

for index=1:length(order_vett)
    order=order_vett(index);

    % Calcola i coefficienti di Taylor, in ordine crescente per grado.
    v=(0:order)';
    coeffs=1./gamma(v+1);

    % Valuta l'errore in norma infinito.
    px=polyval(flipud(coeffs),x);
    inferr=norm(fx-px,inf);

    fprintf('\n \t [DEGREE]: %3.0f [ERR. INFTY NORM]: %2.2e',order,inferr);
end
```

Otteniamo così

```
>> mytaylor

          [DEGREE]:   1 [ERR. INFTY NORM]: 7.18e-001
          [DEGREE]:   2 [ERR. INFTY NORM]: 2.18e-001
          [DEGREE]:   3 [ERR. INFTY NORM]: 5.16e-002
          [DEGREE]:   4 [ERR. INFTY NORM]: 9.95e-003
          [DEGREE]:   5 [ERR. INFTY NORM]: 1.62e-003
          [DEGREE]:   6 [ERR. INFTY NORM]: 2.26e-004
          [DEGREE]:   7 [ERR. INFTY NORM]: 2.79e-005
          [DEGREE]:   8 [ERR. INFTY NORM]: 3.06e-006
          [DEGREE]:   9 [ERR. INFTY NORM]: 3.03e-007
          [DEGREE]:  10 [ERR. INFTY NORM]: 2.73e-008
```

E' immediato osservare la netta differenza tra la qualità dell'approssimazione fornita dalla troncata di Taylor e quella del polinomio di miglior approssimazione.

7 Esercizi.

1. Paragonare i risultati ottenuti dalla miglior approssimazione di $\exp(x)$ in [-1,1], con quelli ottenuti dallo sviluppo troncato di Taylor nei punti -1, $+1$. Utilizzare, se necessario, la funzione Matlab `polyval`.

2. Paragonare i risultati ottenuti dalla miglior approssimazione di $\exp(x)$ in [-1,1], con quelli dal polinomio interpolatore dello stesso grado negli zeri del polinomio di Chebyshev. Utilizzare, se necessario, le funzioni Matlab `polyfit`, `polyval`.

3. Paragonare i risultati ottenuti dalla miglior approssimazione di $1/(1+25\,x^2)$ in [-1,1], con quelli dal polinomio interpolatore dello stesso grado negli zeri del polinomio di Chebyshev. Utilizzare, se necessario, le funzioni Matlab `polyfit`, `polyval`.

4. Paragonare i risultati ottenuti dalla miglior approssimazione di $1/(1+25\,x^2)$ in [-1,1], con quelli ottenuti dallo sviluppo troncato di Taylor nei punti -1, 0, $+1$. Utilizzare, se necessario, le funzioni Matlab `polyfit`, `polyval`.

5. Perchè questi esempi sono interessanti? Cosa hanno a che fare con l'esempio di Runge?

8 Costanti di Lebesgue

Sia $f \in C([a,b])$, con $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio $p_n \in \mathscr{P}_n$ che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ (per $k = 0,\dots,n$, x_k a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione $f_k := f(x_k)$. Come è noto, indicato con L_k il k-simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x).$$

Supponiamo che i valori di f_k siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con $\tilde{f}_k$. Otteniamo quindi quale polinomio interpolatore

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_k L_k(x).$$

Si ha così che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k - \tilde{f}_k||L_k(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k|\right) \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

e quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

si ha

$$\| p_n - \tilde{p}_n \|_\infty \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Il valore Λ_n è nota come *costante di Lebesgue* dell'insieme di punti $x_0, \ldots, x_n$ (cf. [11]). Si vede immediatamente che è un indice di stabilità dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [3, p.139-140]).
Ricordiamo che se $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono due spazi normati, $A : X \to Y$ è un operatore lineare limitato se e solo sa il numero

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

è finito. Il numero reale $\|A\|$ si chiama *norma dell'operatore lineare A* (cf. [6, p.224]). Si può mostrare che se $\mathscr{L}_n$ è l'operatore (lineare e limitato) che associa a $f \in C([a,b])$ il suo polinomio di interpolazione nei nodi $x_0, \ldots, x_n$ allora

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{\|L_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

cioè la costante di Lebesgue è la norma dell'operatore di interpolazione $\mathscr{L}_n$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 8.1 *Se $f \in C([a,b])$ e p_n è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti $x_0, \ldots, x_n$ si ha*

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f) \tag{6}$$

dove

$$E_n(f) = \inf_{q_n \in \mathscr{P}_n} \|f -_n\|_\infty$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme.

Dimostrazione (cf. [3, p.140]). Se $f \in \mathscr{P}_n$, allora $f \equiv p_n \equiv q_n$ e quindi l'asserto è ovvio. Supponiamo quindi che f non appartenga a $\mathscr{P}_n$, cioè $f - q_n$ non sia la funzione nulla, qualsiasi sia $q_n \in \mathscr{P}_n$.

Per ogni polinomio $q_n \in \mathscr{P}_n$, è $\mathscr{L}_n(q_n) = q_n$, in quanto l'unico polinomio che interpola in $n+1$ punti distinti un polinomio di grado n è il polinomio stesso. Inoltre

$$\mathscr{L}_n(f - q_n) = \mathscr{L}_n(f) - \mathscr{L}_n(q_n) = p_n - q_n.$$

Poichè $f - q$ non è la funzione nulla, abbiamo

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{\|\mathscr{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|\mathscr{L}_n(f - q_n)\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \frac{\|p_n - q_n\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \tag{7}$$

e di conseguenza

$$\|(p_n - q_n)\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty. \tag{8}$$

Per concludere, osserviamo che per la disuguaglianza triangolare da $f - p = (f - q) + (q - p)$ e (8)

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &= \|(f - q_n) + (q - p_n)\|_\infty \\ &\le \|f - q_n\|_\infty + \|q_n - p_n\|_\infty \\ &\le \|f - q_n\|_\infty + \Lambda_n \|f - q_n\|_\infty \\ &= (1 + \Lambda_n)\|f - q_n\|_\infty \end{aligned} \quad (9)$$

Questo teorema è utile, perchè fa capire che se la costante di Lebesgue è piccola allora l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è *poco* più grande dell'errore di miglior approssimazione uniforme.

Figura 2: Henri Lebesgue (1875-1941).

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di $n+1$ punti $x_0, \ldots, x_n$ particolarmente interessanti, nell'intervallo $[-1, 1]$ (cf. [8]):

1. punti equispaziati: si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente $\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en\log(n)}$ (cf. [3, p.142]);

2. punti di Chebyshev: corrispondono a $\frac{\cos(2k-1)}{2(n+1)}$ dove $k = 1, \ldots, n+1$; si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente

$$\frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \frac{8}{\pi}\right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

   dove $\gamma \approx 0.577$ è la *costante di Eulero-Mascheroni* (cf. [**?**]);

3. punti di Chebyshev estesi: sono definiti da $\frac{\cos(2k-1)}{2(n+1)\cdot\cos(\frac{\pi}{2n+1})}$ dove $k = 1, \ldots, n+1$; si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente

$$\frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3}\right) + O\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right);$$

4. configurazione ottimale: si dimostra che la minima costante di Lebesgue (non è nota esplicitamente!) vale

$$\frac{2}{\pi}\left(\log(n+1)+\gamma+\log\left(\frac{4}{\pi}\right)\right)+O\left(\frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)}\right)$$

Vediamo usando Matlab quanto siano differenti tali costanti per gradi n quali $5, 10, \ldots, 50$.

```
>> n=(5:5:50)'; % VETTORE COLONNA DI GRADI.
>> % NODI EQUISPAZIATI.
>> s=(2.^(n+1))./(exp(1)*n.*log(n));
>> % NODI CHEBYSHEV.
>> % \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma +\frac{8}{\pi}  \right)+ O\left( \frac{1}{(n+1)^2} \r
>> t=(2/pi)*( log(n+1) + 0.577 + (8/pi) );
>> [s t]

ans =

  2.9258e+000  3.1291e+000
  3.2720e+001  3.5150e+000
  5.9352e+002  3.7536e+000
  1.2877e+004  3.9267e+000
  3.0679e+005  4.0626e+000
  7.7425e+006  4.1746e+000
  2.0316e+008  4.2698e+000
  5.4825e+009  4.3526e+000
  1.5112e+011  4.4259e+000
  4.2351e+012  4.4915e+000

>>
```

Dalla stima precedente tra errore compiuto dall'interpolante rispetto a quello della miglior approssimazione uniforme, si capisce bene, una volta ancora, perchè i nodi di Chebyshev siano da preferire a quelli equispaziati.

Volendo stimare l'errore di interpolazione da (6), manca una stima dell'errore di miglior approssimazione. Questa viene fornita dai seguenti teoremi di Jackson [3, p.142], [2, p.224]

Teorema 8.2 *Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $f \in C([a,b])$ esiste una costante M indipendente da n, a, b tale che*

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f-p\|_\infty \leq M\omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right)$$

dove $\omega(f,\cdot)$ è il modulo di continuità della funzione f su [a,b], cioè

$$\omega(f,\delta) := \sup_{x,y\in[a,b], |x-y|\leq\delta} |f(x)-f(y)|.$$

Teorema 8.3 *Se* $f \in C^p([a,b])$, $p \geq 0$ *si ha per ogni* $n > p$

$$\inf_{p \in \mathscr{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \dots (n-p+1)} \omega\left(f^{(p)}, \frac{b-a}{n-p}\right).$$

Teorema 8.4 *Se* $f \in C^p([a,b])$, *ed* $f^{(k)}$ *è* α *holderiana, cioè*

$$\sup_{x,y \in [a,b]} |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq M|x-y|^\alpha$$

per qualche $M > 0$, $0 < \alpha \leq 1$. *Allora esiste una costante* d_k *indipendente da* f *e* n *per cui*

$$\inf_{p \in \mathscr{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq \frac{M d_k}{n^{k+\alpha}}, \ n \geq 1.$$

9 Esercizi

1. (Non facile, e richiede qualche conto su carta). Si implementi un codice Matlab che approssimi la costante di Lebesgue di un set di punti $x_0, \dots, x_n$ in un intervallo prefissato $[a,b]$, valutando la *funzione di Lebesgue* $\sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$ (dove al solito L_k è il k-simo polinomio di Lagrange) in $M = 1000$ punti test equispaziati in $[a,b]$. In seguito si valuti con tale codice la costante di Lebesgue di un set di 10 punti equispaziati in $[-1,1]$ e in 10 punti di Chebyshev.

2. (Facile, ma un po' lungo). Sfruttando i valori citati (a meno di O grandi), si confrontino i valori delle costanti di Lebesgue per i nodi equispaziati, di Chebyshev e di Chebyshev estesi.

References

[1] N.I. Achieser, *Theory of approximation*, Dover, 1992.

[2] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.

[3] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.

[4] P.J. Davis, *Interpolation and approximation*, Dover, 1975.

[5] G. Gilardi, *Analisi Due, seconda edizione*, Mc Graw-Hill, 1996.

[6] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1970.

[7] Sherif A. Tawfik, Matlab Files Exchange, Algoritmo di Remez, http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8094.

[8] S.J. Smith, *Lebesgue constants in polynomial interpolation*, Annales Mathematicae et Informaticae, p. 109-123, 33 (2006) http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami.

[9] R. Pachon and L.N. Trefethen, *Barycentric-Remez algorithms for best polynomial approximation in the chebfun system*, (2008) http://www.comlab.ox.ac.uk/files/1948/NA-08-20.pdf.

[10] Wikipedia, (Costante di Eulero Mascheroni), http://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni.

[11] Wikipedia, (de la Vallee-Poussin), http://it.wikipedia.org/wiki/Charles_Jean_de_la_Vall%C3%A9e-Poussin.

[12] Wikipedia, (Lebesgue), http://it.wikipedia.org/wiki/Lebesgue.

[13] Wikipedia, (Lebesgue constant interpolation), http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation).

[14] Wikipedia, (Integrale di Lebesgue), http://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Lebesgue.

[15] Wikipedia, (spazio di Banach), http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Banach.

[16] Wikipedia, (successione di Cauchy), http://it.wikipedia.org/wiki/Successione_di_Cauchy.

[17] Wikipedia, (spazio L^p), http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_Lp.

[18] Wikipedia, (spazio normato), http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_normato.

[19] Wikipedia, (spazio vettoriale), http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_vettoriale.