

APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI *

A. SOMMARIVA[†]

Conoscenze richieste. Spazi vettoriali, polinomi, funzioni continue, funzioni integrabili, Teorema di Weierstrass, trigonometria di base, derivate superiori di una funzione, interpolazione e approssimazione di funzioni, programmazione in Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Spazi normati e di Banach. Problema di miglior approssimazione. Esistenza e unicità dell'elemento di miglior approssimazione in alcuni spazi di Banach. Elemento di miglior approssimazione in $C([a, b])$ con $[a, b]$ compatto. Teorema di equioscillazione. Polinomi di Chebyshev e migliore approssimazione. Costante di Lebesgue. Stabilità dell'interpolazione e costante di Lebesgue. Operatori lineari limitati. Relazione tra la costante di Lebesgue, interpolante polinomiale e la miglior interpolante di $f \in C([a, b])$. Teoremi di Jackson. Funzioni lipschitziane e hölderiane.

1. Spazi normati e di Banach. Sia X uno spazio vettoriale (cf. [36]). La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice spazio normato (cf. [35]) se la funzione $\|\cdot\| \rightarrow \mathbb{R}$ (detta *norma*) ha le seguenti proprietà

1. Un vettore ha sempre lunghezza strettamente positiva. L'unica eccezione è il vettore nullo che ha sempre lunghezza zero. In altri termini,

$$\|x\| > 0 \text{ se } x \neq 0, \quad \|0\| = 0,$$

2. Moltiplicare un vettore per un numero reale ha l'effetto di moltiplicare la sua lunghezza per il modulo di esso. In simboli

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in X.$$

3. Vale la disuguaglianza triangolare, cioè

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Uno spazio normato X si dice di Banach (cf. [32]) se e solo se è completo, cioè ogni successione di Cauchy in X è convergente. Ricordiamo che una successione $\{x_n\}_n$ di elementi di X si dice di Cauchy (cf. [33]) se

$$\forall \epsilon > 0 \text{ esiste } N(\epsilon) \text{ tale che } m, n > N(\epsilon) \text{ implica che } \|x_m - x_n\| \leq \epsilon.$$

Alcuni classici esempi di spazi di Banach sono

- $\mathbb{R}^n$ dotato della norma *euclidea* $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$;
- $C([a, b])$ con la norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|;$$

- $L^2([a, b])$ (spazio delle funzioni integrabili alla Lebesgue, cf. [29]) con la norma

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

*Ultima revisione: 23 gennaio 2010

[†]Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università degli Studi di Padova, stanza 419, via Trieste 63, 35121 Padova, Italia (alvise@euler.math.unipd.it). Telefono: +39-049-8271350.

2. Il problema di miglior approssimazione. Sia $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $\mathcal{W}$ un suo sottospazio vettoriale (non necessariamente di dimensione finita). Sia $f \in \mathcal{V}$. La miglior approssimazione di f in $\mathcal{W}$ consiste nel determinare, se esiste, un elemento $s^* \in \mathcal{W}$ tale che sia minima la quantità $\|f - s\|$ con $s \in \mathcal{W}$.

In quest'ambito astratto, risulta di fondamentale importanza stabilire le condizioni di esistenza di un elemento di miglior approssimazione $s^* \in S \subset X$.

LEMMA 2.1. *Sia $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Per ogni $f \in \mathcal{V}$, la funzione $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|_{\mathcal{V}}$ da $\mathcal{V}$ in $\mathbb{R}$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione di continuità, basta mostrare che

$$\text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } \delta(\epsilon) > 0 \text{ tale che } \|f - g\| \leq \delta(\epsilon) \text{ implica } |||f\| - \|g\||| \leq \epsilon. \quad (2.1)$$

Supponiamo sia $\|f\| \geq \|g\|$. Da $f = g + (f - g)$, si ha per la disuguaglianza triangolare

$$\|f\| = \|g + (f - g)\| \leq \|g\| + \|f - g\|$$

$$0 \leq \|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|$$

$$|||f\| - \|g\||| \leq |||f - g||| = \|f - g\|.$$

Di conseguenza posto $\delta(\epsilon) = \epsilon$, se $\|f - g\| \leq \epsilon$ allora da (2.1) abbiamo

$$|||f\| - \|g\||| \leq \|(f - g)\| \leq \epsilon.$$

Se viceversa $\|g\| \geq \|f\|$ basta riproporre lo stesso ragionamento partendo da $g = f + (g - f)$. Quindi $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua. Siccome la funzione $\cdot - f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è pure una funzione continua e la composizione di funzioni continue è continua concludiamo che la funzione $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|_{\mathcal{V}}$ da $\mathcal{V}$ in $\mathbb{R}$ è continua. $\square$

TEOREMA 2.2. Esistenza. *Sia $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $\mathcal{W}$ un suo sottospazio di dimensione finita. Per ogni $f \in \mathcal{V}$ esiste un elemento di miglior approssimazione $w^* \in \mathcal{W}$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è tratta da [4, p.167]. Di sicuro $0 \in \mathcal{W}$, essendo $\mathcal{W}$ un sottospazio vettoriale. Quindi male che vada, $\|f - w^*\| \leq \|f - 0\| = \|f\|$. Di conseguenza, se esiste, w^* sta nella palla di elementi di $\mathcal{W}$ con centro f e raggio $\|f\|$, che denoteremo con $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}(f, \|f\|) := \mathcal{B}(f, \|f\|) \cap \mathcal{W}$. Ma il sottospazio $\mathcal{W}$ ha dimensione finita, e quindi $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}(f, \|f\|)$ è un insieme compatto, essendo tali tutti i sottinsiemi chiusi e limitati di uno spazio normato di dimensione finita.

Inoltre, dal Teorema 2.1, la funzione $\|f - \cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Dal teorema di Weierstrass (cf [7, p.117]), visto che una funzione continua in un compatto di $\mathbb{R}$ assume un valore minimo, si conclude che esiste un minimo per la funzione $\|f - \cdot\|$ e che esiste l'elemento di miglior approssimazione w^* .

$\square$

3. Facoltativo. Spazi strettamente normati. . **DEFINIZIONE 3.1.** *Uno spazio normato $\mathcal{V}$, si dice strettamente convesso, cf. [5, p.141], se*

$$\|x\|_{\mathcal{V}} \leq r, \|y\|_{\mathcal{V}} \leq r \rightarrow \|x + y\|_{\mathcal{V}} < 2r$$

a meno che $x = y$.

Esempi di questi spazi normati sono $L^p([a, b])$ (cf. [34]). Si dimostra che

TEOREMA 3.2. *In uno spazio normato strettamente convesso V il problema di miglior approssimazione ha un'unica soluzione (qualsiasi sia il sottospazio W).*

DIMOSTRAZIONE. Per la dimostrazione si consideri [5, p.142]. Siano $u, v \in \mathcal{W}$ due elementi distinti di miglior approssimazione di $f \in \mathcal{V}$. Sia $w = (u + v)/2$. Supponiamo sia $x = f - u, y = f - v, r = \|f - u\|_{\mathcal{V}} = \|f - v\|_{\mathcal{V}} = \|x\|_{\mathcal{V}} = \|y\|_{\mathcal{V}}$. Essendo lo spazio strettamente convesso

$$\|(f - u) + (f - v)\|_{\mathcal{V}} = \|x + y\|_{\mathcal{V}} < \|x\|_{\mathcal{V}} + \|y\|_{\mathcal{V}} < 2r$$

da cui

$$\|2f - u - v\|_{\mathcal{V}} < 2r \text{ cioè } \|f - \frac{u+v}{2}\|_{\mathcal{V}} < r$$

il che è assurdo in quanto sarebbe $\frac{u+v}{2} \in \mathcal{W}$ elemento di miglior approssimazione (e non u, v come supposto per ipotesi). $\square$

4. Approssimazione in $(C([a, b]), \infty)$. Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato. E' noto che $(C([a, b]), \infty)$ è uno spazio di Banach e che $\mathcal{P}_n$, l'insieme dei polinomi aventi grado uguale o inferiore a n , è un suo sottospazio vettoriale. Con riferimento al teorema precedente, posto $\mathcal{V} := C([a, b])$, $\mathcal{W} := \mathcal{P}_n$, data una funzione continua $f \in C([a, b])$ e fissato n , si cerchi il polinomio $p_N \in \mathcal{P}_n$ tale che

$$\|f - p_n\|_{\infty} = \min_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_{\infty} \quad (4.1)$$

dove

$$\|f - p\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| \quad (4.2)$$

Questo problema, detto di *minimax* o di *miglior approssimazione uniforme*, non è in generale di facile soluzione e vedremo quali proprietà gode il polinomio p_n^* verificante (4.1). Di seguito considereremo il caso speciale in cui $f(x) = x^{n+1}$ e mostreremo il legame tra la soluzione del problema di minimax e l'interpolazione in nodi di Chebyshev.

Inizialmente ci poniamo il quesito se p_n^* esista e sia unico. Sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza del polinomio di miglior approssimazione, in quanto $(C([a, b]), \infty)$ è uno spazio normato e $\mathcal{W} := \mathcal{P}_n$ è un suo sottospazio di dimensione $n + 1$. Di conseguenza, p_n^* esiste.

Mostriamo ora, tramite il teorema di De La Vallée-Poussin, una delle due direzioni di un teorema di Chebyshev da cui derivano le proprietà dei polinomi di miglior approssimazione. Di seguito vedremo che un tale polinomio è unico. Poniamo

$$D(f, p_n^*) = \|f - p_n^*\|_{\infty}, \quad d_n(f) = \min_{p_n \in \mathcal{P}_n} D(f, p_n^*).$$

Risulta evidente che per ogni $p \in \mathcal{P}_n$ si ha

$$d_n(f) = \min_{p_n \in \mathcal{P}_n} D(f, p_n^*) \leq D(f, p).$$

Il nostro proposito è di vedere quando vale anche l'implicazione opposta, caratteristica del polinomio di miglior approssimazione. Lasciamo la lettura della dimostrazione allo studente interessato.

TEOREMA 4.1. *Sia $f \in C([a, b])$ con $[a, b]$ chiuso e limitato. Se un polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ soddisfa a*

$$f(x_j) - p_n(x_j) = (-1)^j e_j, \quad j = 0, \dots, n+1$$

con

1. $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$,
2. tutti gli e_j hanno segno costante,

allora

$$\min_j |e_j| \leq d_n(f)$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è tratta da [2, p.222], [4, p.172], [14, p.232]. Supponiamo per assurdo che la tesi non sia verificata. Di conseguenza $\min_j |e_j| > d_n(f)$ e quindi esiste un polinomio $q_n \in \mathcal{P}_n$ (ad esempio il polinomio di miglior approssimazione che sappiamo esistere) tale che

$$\min_j |e_j| > \max_{x \in [a, b]} |f(x) - q_n(x)|.$$

Il polinomio q_n non può coincidere con p_n perchè per tutti gli indici $j = 0, \dots, n+1$

$$|f(x_j) - p_n(x_j)| > \max_{x \in [a, b]} |f(x) - q_n(x)| \leq |f(x_j) - q_n(x_j)|$$

per cui $p_n - q_n$ non è il polinomio nullo.

Da

$$q_n(x_j) - p_n(x_j) = (q_n(x_j) - f_n(x_j)) + (f_n(x_j) - p_n(x_j)) = (q_n(x_j) - f_n(x_j)) + (-1)^j e_j$$

e poichè $\min_j |e_j| > \max_{x \in [a, b]} |f(x) - q_n(x)|$ implica

$$|e_j| \geq \min_j |e_j| > \max_{x \in [a, b]} |f(x) - q_n(x)| \geq |f(x_j) - q_n(x_j)|$$

per cui necessariamente il segno di $q_n(x_j) - p_n(x_j)$ è lo stesso di quello di $f_n(x_j) - p_n(x_j)$. Quindi il polinomio non nullo $q_n - p_n \in \mathcal{P}_n$ cambia segno $n+1$ volte il che significa che ha almeno $n+1$ zeri e quindi non può essere un polinomio di grado n che è una contraddizione.

□

Supponiamo ora che sia

$$|f(x_j) - p_n(x_j)| = D(f, p_n), \quad j = 0, \dots, n+1.$$

Dal teorema di De La Vallée-Poussin, in virtù di quest'ultima richiesta che sfruttiamo nell'ultimo passaggio

$$D_n(f, p_n) \geq d_n(f) \geq \min_j |e_j| = D(f, p_n)$$

cioè $D_n(f, p_n) = d_n(f)$ e quindi p_n è proprio un polinomio di miglior approssimazione.

Al momento resta il dubbio che esista un polinomio avente queste proprietà. A questa domanda risponde il seguente teorema di Chebyshev, detto anche di *equi-oscillazione*. Secondo alcuni questo teorema è dovuto a Borel (1905).

TEOREMA 4.2. *Un polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ è un polinomio di miglior approssimazione (in norma $\|\cdot\|_\infty$) di una funzione $f \in C([a, b])$ se e solo se $f(x) - p_n(x)$ assume i valori $\pm D(f, p_n)$ con segni alterni, almeno $n + 2$ volte in $[a, b]$.*

Per una dimostrazione completa di questo teorema si consulti [5, p.149] e per una sua difficile generalizzazione a polinomi razionali [1, p.51]. Si consideri anche [14, p.233].

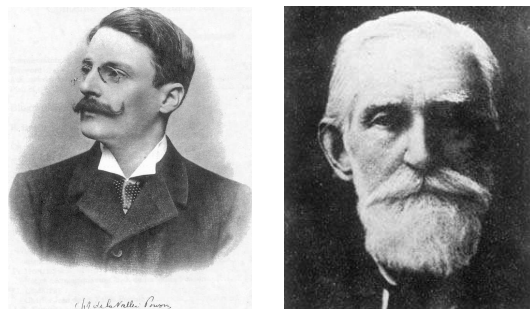


FIGURA 4.1. Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866-1962) e Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894).

TEOREMA 4.3. *Il polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ di miglior approssimazione di una funzione $f \in C([a, b])$ (in norma $\|\cdot\|_\infty$) esiste ed è unico.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è tratta da [5, p.144], [14, p.238]. Supponiamo esistano due polinomi p_n, q_n di miglior approssimazione in norma $\|\cdot\|_\infty$ e si consideri il polinomio $(p_n + q_n)/2 \in \mathcal{P}_n$. Sfruttando la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{p_n(x) + q_n(x)}{2} \right| &= \frac{1}{2} |(f(x) - p_n(x)) + (f(x) - q_n(x))| \\ &\leq \frac{1}{2} |f(x) - p_n(x)| + \frac{1}{2} |f(x) - q_n(x)| \leq d_n(f) \end{aligned} \quad (4.3)$$

per ogni $x \in [a, b]$, per cui essendo p_n, q_n polinomi di miglior approssimazione le disuguaglianze sono in realtà uguaglianze (altrimenti avremmo trovato un polinomio *migliore* dei precedenti) e, così, pure $(p_n + q_n)/2$ è un polinomio di miglior approssimazione. Se ne ricava che

$$\left| f(x) - \frac{p_n(x) + q_n(x)}{2} \right| = \frac{1}{2} |f(x) - p_n(x)| + \frac{1}{2} |f(x) - q_n(x)|.$$

Fissato $x \in [a, b]$ e posto $\alpha = \frac{f(x) - p_n(x)}{2}$, $\beta = \frac{f(x) - q_n(x)}{2}$ si ha che

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

Ma α e β sono numeri reali e l'unica possibilità per cui ciò accada è che α, β abbiano segni concordi. Inoltre in un punto x^* in cui $|f(x) - \frac{p_n(x) + q_n(x)}{2}|$ è massimo necessariamente sono pure massimi $|f(x) - p_n(x)|$, $|f(x) - q_n(x)|$ perchè i tre polinomi sono di miglior approssimazione. Più esplicitamente, se così non fosse, e per assurdo

$$|f(x^*) - p_n(x^*)| + |f(x^*) - q_n(x^*)| < 2 d_n(f)$$

allora

$$\begin{aligned}
D(f, \frac{p_n + q_n}{2}) &= |f(x^*) - \frac{p_n(x^*) + q_n(x^*)}{2}| \\
&= \frac{1}{2}(|f(x^*) - p_n(x^*)| + |f(x^*) - q_n(x^*)|) \\
&< \frac{1}{2} \cdot 2 d_n(f) = d_n(f)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

il che è assurdo appunto perchè p_n, q_n sono polinomi di miglior approssimazione e quindi

$$D(f, \frac{p_n + q_n}{2}) \geq d_n(f).$$

Di conseguenza, $|f(x^*) - p_n(x^*)| = |f(x^*) - q_n(x^*)|$ e visto che gli argomenti dei moduli hanno pure lo stesso segno

$$f(x^*) - p_n(x^*) = f(x^*) - q_n(x^*).$$

Quindi $p_n(x^*) = q_n(x^*)$. In definitiva, gli $n + 2$ punti di p_n e q_n in cui la massima equioscillazione è raggiunta (ed è pari a $d_n(f)$) sono gli stessi. Ma due polinomi di grado n che coincidono in $n + 2$ punti distinti sono uguali. Infatti se ciò accade $p_n - q_n$ è un polinomio di grado n che si annulla in $n + 2$ punti il che implica che è il polinomio nullo cioè $p_n \equiv q_n$. $\square$

5. Alcune note sui polinomi di Chebyshev. Consideriamo la funzione

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1]$$

(cf. [2, p.211], [14, p.241]). A priori, in virtù della presenza del coseno, T_n non sembra essere un polinomio. In realtà si vede subito che $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$, $T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$. Dal teorema di prostaferesi

$$\cos((n \pm 1) \theta) = (\cos(n \theta)) \cdot \cos(\theta) \mp (\sin(n \theta)) \cdot \sin(\theta)$$

si vede inoltre che per $\theta = \arccos(x)$ si ha

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 (\cos(n \theta)) \cdot \cos(\theta) = 2T_n(x)x$$

da cui

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n - T_{n-1}$$

Di conseguenza, per ricorrenza, si deduce che T_n è un polinomio di grado n e che inoltre per $n > 0$ è del tipo $T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots$.

Gli zeri x_k del polinomio di Chebyshev sono i punti per cui $\cos(n \arccos(x_k)) = 0$, per cui

$$n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\arccos(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Notiamo che gli zeri del polinomio di Chebyshev T_n sono esattamente n , distinti e nell'intervallo $[-1, 1]$. Si lascia la comprensione della dimostrazione al lettore interessato.

TEOREMA 5.1. *Sia $f \in C^{(n+1)}([-1, 1])$ e supponiamo $f^{(n+1)}$ sia costante. Allora l'interpolante polinomiale di grado n negli zeri del polinomio di Chebyshev di grado n è l'elemento di miglior approssimazione di f in $\mathcal{P}_n$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in C^{(n+1)}([-1, 1])$ e si considerino $n+1$ punti distinti $x_0, \dots, x_n \in [-1, 1]$. Supponiamo inoltre che $f^{(n+1)}$ sia costante. Se p_n è il polinomio che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ ($k = 0, \dots, n$), dal teorema del resto dell'interpolazione polinomiale,

$$R(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

con $\xi \in \mathcal{I}(x_0, \dots, x_n)$ dove $\mathcal{I}(x_0, \dots, x_n)$ è il più piccolo intervallo aperto contenente $x_0, \dots, x_n$. Essendo $f^{(n+1)}$ costante, $R(x)$ in norma $\|\cdot\|_\infty$ è minimo per quella scelta di $x_0, \dots, x_n$ per cui è minimo

$$\max_{x \in [-1, 1]} |(x - x_0) \dots (x - x_n)|.$$

Ci si domanda, in questo caso, quali siano i punti migliori $x_0^*, \dots, x_n^*$ in cui effettuare l'interpolazione, così da minimizzare $\|R\|_\infty$ e di conseguenza determinare il polinomio di miglior approssimazione uniforme interpolando f nei punti $x_0^*, \dots, x_n^*$.

Si osserva che $r_{n+1}(x) := (x - x_0) \dots (x - x_n)$ è un polinomio monico di grado $n+1$ e quindi si può riscrivere, per un certo $q_n \in \mathcal{P}_n$, come $r_{n+1}(x) = x^{n+1} - q_n(x)$. Di conseguenza

$$\max_{x \in [-1, 1]} |r_{n+1}(x)| = \max_{x \in [-1, 1]} |x^{n+1} - q_n(x)|$$

è minimo al variare degli $\{x_k\}_{k=0, \dots, n}$ quando $q_n(x)$ è il polinomio di miglior approssimazione uniforme di x^{n+1} . Sfruttando il teorema di Chebyshev, mostreremo che q_n è l'interpolante polinomiale di x^{n+1} negli $n+1$ zeri

$$t_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{(n+1)2}\right), \quad k = 0, \dots, n$$

del polinomio di Chebyshev di grado $n+1$

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x)).$$

Notiamo che in questo caso, per le proprietà interpolatorie, $t_k^{n+1} = q_n(t_k)$ e necessariamente $t_k^{n+1} - q_n(t_k) = 0$ per $k = 0, \dots, n$, per cui, a meno di un fattore moltiplicativo, $r_{n+1}(x) = x^{n+1} - q_n(x)$ è proprio il polinomio di Chebyshev di grado T_{n+1} perchè si annulla negli stessi $n+1$ punti ed ha lo stesso grado $n+1$. Basta così mostrare che $T_{n+1} = x^{n+1} - q_n(x)$ gode delle proprietà di equioscillazione. E così è, essendo $|\cos(x)| \leq 1$, $\cos((n+1)\arccos(x)) = \pm 1$ quando $(n+1)\arccos(x)$ è multiplo di $k\pi$, cioè

$$(n+1)\arccos(s_k) = k\pi$$

$$\arccos(s_k) = \frac{k\pi}{n+1}$$

$$s_k = \cos(\arccos(s_k)) = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

per $k = 0, \dots, n+1$ (non siamo andati oltre questi indici poichè per la periodicità del coseno avremmo ottenuto solo la ripetizione di alcuni punti). $\square$

6. Costanti di Lebesgue. Sia $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ (per $k = 0, \dots, n$, x_k a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione $f_k := f(x_k)$. Come è noto, indicato con L_k il k -simo polinomio di Lagrange

$$L_k(x) := \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x - x_0)}{(x_k - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})} \frac{(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_k - x_n)}.$$

si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x).$$

Supponiamo che i valori di f_k siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con $\tilde{f}_k$. Otteniamo quindi quale polinomio interpolatore

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x).$$

Si ha così che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k - \tilde{f}_k| |L_k(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

e quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

si ha

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Il valore Λ_n è nota come *costante di Lebesgue* dell'insieme di punti $x_0, \dots, x_n$ (cf. [28]). Si vede immediatamente che è un indice di stabilità dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [4, p.139-140]). Ricordiamo le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 6.1. *Un operatore $A : X \rightarrow Y$ è lineare se e solo se*

1. $A(u + v) = A(u) + A(v)$ per ogni $u, v \in X$;
2. $A(\alpha v) = \alpha A(u)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, u \in X$;

DEFINIZIONE 6.2. Se $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ sono due spazi normati, $A : X \rightarrow Y$ è un operatore lineare limitato (cf. [31]) se e solo se esiste C tale che

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \forall x \in X$$

o equivalentemente A mappa limitati di X in limitati di Y . Il numero reale

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

si chiama *norma dell'operatore lineare* A (cf. [8, p.224]), [3, p.40].

Talvolta un operatore lineare limitato si dice *continuo*, poichè come si vede facilmente la continuità è equivalente alla limitatezza. Si noti che ciò non è vero in generale se l'operatore non è lineare.

Sia $\mathcal{L}_n$ è l'operatore che associa a $f \in C([a, b])$ il suo polinomio di interpolazione nei nodi distinti $x_0, \dots, x_n$. Non è difficile mostrare che $\mathcal{L}_n$ è lineare mentre la sua limitatezza dipende dal fatto che (cf. [12, p.81])

$$\|\mathcal{L}_n(f)\| = \left\| \sum_k f(x_k) L_k(x) \right\| \leq \left\| \sum_k |L_k(x)| \right\| \max |f(x_k)| \leq \left\| \sum_k |L_k(x)| \right\| \|f\|. \quad (6.1)$$

Si può inoltre provare che

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a, b]), g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \quad (6.2)$$

cioè la costante di Lebesgue è la norma dell'operatore di interpolazione $\mathcal{L}_n$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ (cf. [12, p. 83]).

NOTA 6.3 (Facoltativo). Dalla definizione di norma di un operatore lineare A , si vede facilmente che $\|A\|$ è il più piccolo C per cui

$$\|A(f)\| \leq C\|f\|.$$

Di conseguenza, da (6.1) ricaviamo che $\|\mathcal{L}_n\| \leq \Lambda_n$. Mostriamo che è pure vero che $\|\mathcal{L}_n\| \geq \Lambda_n$ e che quindi $\|\mathcal{L}_n\| = \Lambda_n$.

Essendo la funzione di Lebesgue $\sum_{k=0}^n |L_k(x)|$ continua in $[a, b]$, necessariamente dal teorema di Weierstrass esiste un suo punto x^* in cui assume massimo. Sia g la funzione lineare a tratti che in x_k ha valore $\text{sign}(L_k(x^*))$. Allora essendo il massimo del valore assoluto di una funzione lineare a tratti in uno dei punti della suddivisione abbiamo

$$\|g\| = \max_{x \in [a, b]} |g(x)| = \max_{k=0, \dots, n} |g(x_k)| = \max_{k=0, \dots, n} |\text{sign}(L_k(x^*))| = 1$$

e da

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_n(g)\| &= \left\| \sum_{k=0}^n g(x_k) L_k(x) \right\| = \left\| \sum_{k=0}^n \text{sign}(L_k(x^*)) L_k(x) \right\| \\ &= \max_{x \in [a, b]} \left| \sum_{k=0}^n \text{sign}(L_k(x^*)) L_k(x) \right| \geq \left| \sum_{k=0}^n \text{sign}(L_k(x^*)) L_k(x^*) \right| \\ &= \sum_{k=0}^n |L_k(x^*)| = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)| = \Lambda_n. \end{aligned} \quad (6.3)$$

ricaviamo

$$\|\mathcal{L}_n\| \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|}{\|g\|} \geq \Lambda_n.$$

NOTA 6.4 (Facoltativo). Un operatore lineare $P : V \rightarrow V$ (con V spazio di Banach) si dice essere una proiezione se $P^2 = P \circ P$ coincide con P [3, p.121]. Se in particolare P è anche limitato, essendo $Im(P) = \{g \in V : g = P(f), f \in V\} \subseteq V$ ricaviamo

$$\max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P(P(f))\|}{\|P(f)\|} = \max_{g \in Im(V), g \neq 0} \frac{\|P(g)\|}{\|g\|} \leq \max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P(f)\|}{\|f\|}.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \|P^2\| &= \max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P^2(f)\|}{\|f\|} = \max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P(P(f))\|}{\|f\|} \\ &= \max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P(P(f))\| \cdot \|P(f)\|}{\|P(f)\| \cdot \|f\|} \\ &\leq \max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P(P(f))\|}{\|P(f)\|} \cdot \max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P(f)\|}{\|f\|} \\ &\leq \max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P(f)\|}{\|f\|} \cdot \max_{f \in V, f \neq 0} \frac{\|P(f)\|}{\|f\|} \\ &= \|P\| \cdot \|P\| = \|P\|^2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

abbiamo da $P^2 = P$ che $\|P^2\| = \|P\|$ e quindi

$$\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2.$$

In definitiva essendo $\|P\| \geq 0$ abbiamo che se P è un operatore di proiezione limitato non nullo allora $\|P\| \geq 1$. Si vede facilmente che l'operatore $\mathcal{L}_n$ è un operatore limitato, di proiezione, e non nullo. Di conseguenza $\|\mathcal{L}_n\| \geq 1$ e quindi $\Lambda_n = \|\mathcal{L}_n\| \geq 1$.

TEOREMA 6.5. Se $f \in C([a, b])$ e p_n è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti $x_0, \dots, x_n$ si ha

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n)d_n(f) \tag{6.5}$$

dove

$$d_n(f) = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme.

DIMOSTRAZIONE.

Per la dimostrazione si consultino [4, p.140], [11, p.213], [12, p.85]. Se $f \in \mathcal{P}_n$, allora $f \equiv p_n \equiv q_n$ e quindi l'asserto è ovvio. Supponiamo quindi che f non appartenga a $\mathcal{P}_n$, cioè $f - q_n$ non sia la funzione nulla, qualsiasi sia $q_n \in \mathcal{P}_n$.

Per ogni polinomio $q_n \in \mathcal{P}_n$, è $\mathcal{L}_n(q_n) = q_n$, in quanto l'unico polinomio che interpola in $n + 1$ punti distinti un polinomio di grado n è il polinomio stesso. Inoltre essendo p_n il polinomio che interpola f in $x_0, \dots, x_n$ abbiamo $\mathcal{L}_n(f) = p_n$. Dalla linearità dell'operatore $\mathcal{L}_n$ abbiamo così

$$\mathcal{L}_n(f - q_n) = \mathcal{L}_n(f) - \mathcal{L}_n(q_n) = p_n - q_n.$$

Poichè $f - q_n$ è una funzione continua non nulla, abbiamo

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(f - q_n)\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} = \frac{\|p_n - q_n\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \quad (6.6)$$

e di conseguenza

$$\|p_n - q_n\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty. \quad (6.7)$$

Per concludere, osserviamo che per la disuguaglianza triangolare da $f - p = (f - q) + (q - p)$ e (6.7)

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &= \|(f - q_n) + (q - p_n)\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \|q_n - p_n\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \Lambda_n \|f - q_n\|_\infty \\ &= (1 + \Lambda_n) \|f - q_n\|_\infty \end{aligned} \quad (6.8)$$

□

Questo teorema è utile, perchè fa capire che se la costante di Lebesgue è piccola allora l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è *poco* più grande dell'errore di miglior approssimazione uniforme.

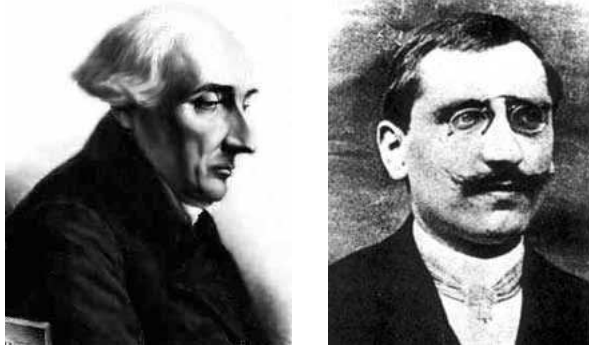


FIGURA 6.1. Giuseppe Lodovico Lagrangia o Lagrange (1736-1813) e Henri Lebesgue (1875-1941).

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di $n + 1$ punti $x_0, \dots, x_n$ particolarmente interessanti, nell'intervallo $[-1, 1]$ (cf. [13]):

1. punti equispaziati: si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en \log(n)}$$

(cf. [4, p.142]);

2. punti di Chebyshev: corrispondono a $\frac{\cos(2k-1)}{2(n+1)}$ dove $k = 1, \dots, n + 1$; si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente

$$\frac{2}{\pi} \left(\log(n+1) + \gamma + \frac{8}{\pi} \right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

dove $\gamma \approx 0.577$ è la *costante di Eulero-Mascheroni* (cf. [23]);



FIGURA 6.2. Leonhard Euler (1707-1783) e Lorenzo Mascheroni (1750-1800).

3. punti di Chebyshev estesi: sono definiti da $\frac{\cos(2k-1)}{2(n+1) \cdot \cos(\frac{\pi}{2n+1})}$ dove $k = 1, \dots, n+1$; si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente

$$\frac{2}{\pi} \left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3} \right) + O\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right);$$

4. configurazione ottimale: si dimostra che la minima costante di Lebesgue (non è nota esplicitamente!) vale

$$\frac{2}{\pi} \left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right) \right) + O\left(\frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)}\right)$$

Vediamo usando Matlab quanto siano differenti tali costanti per gradi n quali 5, 10, ..., 50.

```
>> n=(5:5:50)'; % VETTORE COLONNA DI GRADI.
>> % NODI EQUISPACIATI.
>> s=(2.^(n+1))./(exp(1)*n.*log(n));
>> % NODI CHEBYSHEV.
>> t=(2/pi)*( log(n+1) + 0.577 + (8/pi) );
>> % COSTANTI DI LEBESGUE:
>> % NODI EQUISPACIATI vs CHEBYSHEV (GRADI 5, 10, ... 50)
>> [s t]
```

ans =

```
2.9258e+000 3.1291e+000
3.2720e+001 3.5150e+000
5.9352e+002 3.7536e+000
1.2877e+004 3.9267e+000
3.0679e+005 4.0626e+000
7.7425e+006 4.1746e+000
2.0316e+008 4.2698e+000
5.4825e+009 4.3526e+000
1.5112e+011 4.4259e+000
4.2351e+012 4.4915e+000
```

>>

Dalla stima precedente tra errore compiuto dall'interpolante rispetto a quello della miglior approssimazione uniforme, si capisce bene, una volta ancora, perchè i nodi di Chebyshev siano da preferire a quelli equispaziati.

Volendo stimare l'errore di interpolazione da (6.5), manca una stima dell'errore di miglior approssimazione. Questa viene fornita dai seguenti teoremi di Jackson [4, p.142], [2, p.224]

TEOREMA 6.6. *Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $f \in C([a, b])$ esiste una costante M indipendente da n, a, b tale che*

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right)$$

dove $\omega(f, \cdot)$ è il modulo di continuità della funzione f su $[a, b]$, cioè

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

Conoscendo le derivate successive (o loro stime) si possono avere stime più precise dell'errore di miglior approssimazione.

TEOREMA 6.7. *Se $f \in C^p([a, b])$, $p \geq 0$ si ha per ogni $n > p$*

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \cdots (n-p+1)} \omega\left(f^{(p)}, \frac{b-a}{n-p}\right).$$

Una tentazione che viene guardando il teorema precedente, visti i termini $\frac{b-a}{n-p}$ e il denominatore $n \cdot (n-1) \cdots (n-p+1)$ è di credere che più alto sia p meglio è. Si deve però osservare che non si ha alcuna conoscenza di come varino le derivate p -esime al crescere di p e che inoltre se $b-a > 1$ allora $(b-a)^p$ cresce al crescere di p .

TEOREMA 6.8. *Se $f \in C^p([a, b])$, ed $f^{(k)}$ è α hölderiana, cioè*

$$\sup_{x, y \in [a, b]} |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq M|x-y|^\alpha$$

per qualche $M > 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Allora esiste una costante M_k indipendente da f e n per cui

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq \frac{M_k}{n^{k+\alpha}}, \quad n \geq 1.$$

NOTA 6.9. Una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice Lipschitziana (cf. [26]) se e solo se esiste $K \geq 0$ tale che

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Se in particolare $\Omega = [a, b]$ chiuso e limitato, dalla definizione di modulo di continuità si ha facilmente che $\omega(f, \delta) \leq K\delta$. Un utile esercizio consiste nello stimare l'errore di miglior approssimazione per funzioni f per cui $f^{(p)}$ è Lipschitziana.

NOTA 6.10. Un esempio di funzione hölderiana è la radice quadrata. Consideriamo ad esempio la funzione radice quadrata definita in un intervallo $[a, b]$. Si dimostra che è Hölderiana con costante $1/2$. Un utile esercizio è mostrare che in $[0, \infty)$ la funzione $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \leq 1$ è α Hölderiana ma non Lipschitziana (cf [6, p.157]).



FIGURA 6.3. Otto Hölder (1859-1937) e Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903).

7. Esercizio in laboratorio. Se si intende approssimare $f(x) = x^4$ nell'intervallo $[0, 1]$ con una retta $g_2(x) = a_1 + b_1x$ cosicchè sia minima la quantità

$$\int_0^1 (f(x) - g_2(x))^2 dx$$

si ottiene quale miglior approssimante

$$g_2^*(x) = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}x.$$

Se invece si intende minimizzare con una retta $g_\infty(x) = a_2 + b_2x$ la quantità

$$\max_{x \in [0,1]} |x^4 - g_\infty(x)|$$

si ottiene

$$g_\infty^*(x) = \frac{-3 \cdot 2^{1/3}}{16} + x.$$

E' questa una contraddizione? Perchè (cf. [5, p.128])?

1. Usando Matlab/Octave e il comando `quad` (aiutarsi con l'help!) calcolare

$$\int_0^1 (f(x) - g_2(x))^2 dx,$$

$$\int_0^1 (f(x) - g_\infty^*(x))^2 dx.$$

2. Definiti 201 punti equispaziati $x_k = k/200$ ove $k = 0, \dots, 200$ nell'intervallo $[0, 1]$ e aiutandosi con l'help del comando `linspace`, valutare

$$\max_{x_k} |x_k^4 - g_2(x_k)|$$

$$\max_{x_k} |x_k^4 - g_\infty(x_k)|.$$

3. Disegnare il grafico delle funzioni f , g_2 , g_∞ . Inoltre plottare in scala semilogaritmica $|f - g_2|$ e $|f - g_\infty|$.

Cosa attestano questi risultati numerici?

Suggerimenti:

1. Per l'utilizzo di `quad` in Octave può essere d'aiuto

<http://www.math.uic.edu/~hanson/Octave/OctaveIntegralEG.html>

2. Per l'utilizzo di `quad` in Matlab può essere d'aiuto

<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/quad.html>

NOTA 7.1. *Per quanto riguarda `quad` (su Matlab 7.8, osservando che in Octave le cose sono diverse)*

```
>>
>> % IN MATLAB 7.8 (DIVERSO IN OCTAVE).
>>
>> %-----
>> % FUNZIONE DEFINITA VETTORIALE SU SHELL.
>> %-----
>> myfun_inline=inline('x.^4');
>>
>> % PRIMO TENTATIVO.
>> Q=quad(myfun_inline,0,1)

Q =

    0.2000

>>
>> % SECONDO TENTATIVO.
>> Q=quad(@myfun_inline,0,1)
??? Error: "myfun_inline" was previously used as a variable,
conflicting with its use here as the name of a function
or command.
See MATLAB Programming, "How MATLAB Recognizes
Function Calls That Use Command Syntax" for details.

>>
>> % TERZO TENTATIVO.
>> Q=quad("myfun_inline",0,1)
??? Q=quad("myfun_inline",0,1)
|
Error: The input character is not valid in MATLAB statements or
expressions.

>>
>> % QUARTO TENTATIVO.
>> Q=quad('myfun_inline',0,1)
??? Undefined function or method 'myfun_inline' for input
arguments of type 'double'.

Error in ==> quad at 77
y = f(x, varargin{:});
```

```

>>
>> %-----
>> % FUNZIONE DEFINITA SU FILE (E NON SU SHELL).
>> %
>> % function y=myfun(x)
>> % y=x.^4;
>> %-----
>>
>> % PRIMO TENTATIVO.
>> Q=quad(myfun,0,1)
??? Input argument "x" is undefined.

Error in ==> myfun at 4
y=x.^4;
>>
>> % SECONDO TENTATIVO.
>> Q=quad(@myfun,0,1)

Q =

    0.2000

>>
>> % TERZO TENTATIVO.
>> Q=quad("myfun",0,1)
??? Q=quad("myfun",0,1)
      |
Error: The input character is not valid in MATLAB statements or
expressions.

>>
>> % QUARTO TENTATIVO.
>> Q=quad('myfun',0,1)

Q =

    0.2000

>>

```

Per quanto riguarda invece il calcolo del massimo può essere d'aiuto:

```

>>
>> myfun_inline=inline('x.^3+sin(x)');
>>
>> % CALCOLIAMO IL MASSIMO DI TALE FUNZIONE IN UN SET
>> % DI PUNTI EQUISPACIATI DELL'INTERVALLO [-1,1].
>>
>> x=-1:0.001:1;
>> length(x)

ans =

```



```

2001

>> % I PUNTI SONO 2001: 1000 NEGATIVI, 1000 POSITIVI, E ZERO.
>> % AVREI POTUTO AVERE LO STESSO SET DI PUNTI USANDO
>> % x=linspace(-1,1,2001);
>>
>> y=feval(myfun_inline,x);
>> max_value=max(y);
>> max_value

max_value =

    1.8415

>>
>> % SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE LA NORMA INFINITO DI
>> % QUESTA FUNZIONE FORNENDO QUALE APPROSSIMAZIONE
>> % IL VALORE DEL MASSIMO NEL SET CAMPIONE, (RICORDARSI
>> % IL VALORE ASSOLUTO!!).
>> abs_y=abs(y);
>> max_value_abs=max(abs_y)

max_value_abs =

    1.8415

>>
>> % ALTERNATIVAMENTE AVREI POTUTO USARE IL COMANDO norm.
>>
>> help norm
NORM Matrix or vector norm.
For matrices...
    NORM(X) is the largest singular value of X,
            max(svd(X)).
    NORM(X,2) is the same as NORM(X).
    NORM(X,1) is the 1-norm of X, the largest
            column sum, = max(sum(abs(X))).
    NORM(X,inf) is the infinity norm of X, the largest
            row sum, = max(sum(abs(X'))).
    NORM(X,'fro') is the Frobenius norm,
            sqrt(sum(diag(X'*X))).
    NORM(X,P) is available for matrix X only if P
            is 1, 2, inf or 'fro'.

For vectors...
    NORM(V,P) = sum(abs(V).^P)^(1/P).
    NORM(V) = norm(V,2).
    NORM(V,inf) = max(abs(V)).
    NORM(V,-inf) = min(abs(V)).

See also cond, rcond, condest, normest, hypot.

>>
>> norm_inf=norm(y,inf)

```

```

norm_inf =

    1.8415

>>
>> % PER CONVINCERSENE FACCIAMO UN PLOT E LOCALIZZIAMO
>> % IL MASSIMO IN -1 O 1(SONO UGUALI, PERCHE'?).
>> plot(x,y)

```

- Sottolineiamo che alcuni warnings possono essere prodotti dal calcolo di integrali definiti con `quad`. Si osservi se i risultati prodotti sono corretti calcolando l'integrale analiticamente.
- La funzione integranda f , che supponiamo possa essere calcolata vettorialmente da `f.m`, viene campionata in certe ascisse x_k decise dalla routine `quad` e poi via una particolare combinazione lineare con certi $w_k \in \mathbb{R}$ offerti nuovamente da `quad` si ottiene

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N w_k f(x_k).$$

8. Esercizio in laboratorio. Qualche esempio numerico sul calcolo dell'elemento di miglior approssimazione.. Si implementi un codice Matlab che approssimi la costante di Lebesgue di un set di punti $x_0, \dots, x_n$ in un intervallo prefissato $[a, b]$, valutando la funzione di Lebesgue $\sum_{k=0}^n |L_k(x)|$ (dove al solito L_k è il k -simo polinomio di Lagrange) in $M = 1000$ punti test equispaziati in $[a, b]$. In seguito si valuti con tale codice la costante di Lebesgue di un set di 10 punti equispaziati in $[-1, 1]$ e in 10 punti di Chebyshev.

9. Facoltativo. Qualche esempio numerico sul calcolo dell'elemento di miglior approssimazione.. Per calcolare la miglior approssimazione uniforme di una funzione $f \in C([a, b])$ (con $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato) si usa spesso l'algoritmo di Remez (cf. [9]), un matematico ucraino che lo ha scoperto intorno al 1930. Una sua implementazione in Matlab/Octave è distribuita in [15]. Alcuni test immediati, mostrano che la routine può avere problemi con versioni di Matlab strettamente precedenti alla 6.1, ma funziona con la 6.1 e successive, nonché con le ultime releases di Octave. Il file, scaricabile da internet, una volta decompresso presenta una cartella contenente le routines `err.m`, `findzero.m`, `remez.m`, `test.m`, nonché la spiegazione sull'algoritmo `Remez.pdf`. La routine centrale è `remez.m` che richiama `findzero.m`, `err.m`, mentre `test.m` è un driver che illustra il suo utilizzo effettuando due esempi relativamente alla miglior approssimazione uniforme rispettivamente di $\exp(x)$ e $\sin(x)$ in $[0, 2^{-10}]$ di grado 2. Il lancio del driver `test.m` offre come risultato i 2 grafici degli errori assoluti tra le funzioni e i polinomi di miglior approssimazione uniforme.

La routine `remez.m` ha una sintassi

```
A=remez(fun,fun_der, interval,order)
```

Gli input sono la funzione `fun`, la sua derivata `fun_der`, l'intervallo `interval` e il grado `order` mentre nella variabile di output `A` viene assegnato un vettore di lunghezza uguale a `order + 2`, in cui nell'ultima componente viene immagazzinato una stima dell'errore compiuto $\|f - p_n^*\|_\infty$, mentre nelle rimanenti ci sono i coefficienti del polinomio di miglior approssimazione in $[a, b]$ relativamente alla base monomiale shiftata $\{(x - a)^k\}$, con a estremo inferiore dell'intervallo $[a, b]$.

Vediamo un esempio che illustri il suo utilizzo. In [5, p. 128], si asserisce che la miglior approssimazione di grado 1 della funzione $f(x) = x^4$, in $[0, 1]$, è $p_1^*(x) = x - \frac{3}{16}\sqrt[3]{2} \approx x - 0.236\dots$. Per verificare la bontà del codice Matlab/Octave `remez.m` digitiamo su shell

```
>> fun=inline('x.^4');
>> fun_der= inline('4*x.^3');
>> interval=[0,1];
>> order=1;
>> A= remez(fun, fun_der, interval, order)
```

```
A =
```

```
-0.2362
 1.0000
-0.2362
```

```
>>
```

Questo esperimento ci fa capire che in effetti i coefficienti del polinomio di miglior approssimazione uniforme sono descritti in ordine crescente per grado rispetto alla base $1, x, \dots, x^n$, e che i risultati proposti sono corretti (era $p_1^*(x) \approx x - 0.236\dots$). L'ultima componente di A , è lo scalare -0.2362 che rappresenta il massimo errore compiuto in modulo, ma dotato di segno. Di conseguenza,

$$\|f - p_1^*\|_\infty \approx |-0.2362| = +0.2362.$$

Se implementiamo la routine `mytest.m`

```
fun=inline('x.^4');
fun_der= inline('4*(x.^3)');
interval=[0,1];
order_vett=0:3;

for index=1:length(order_vett)
    order=order_vett(index);
    A= remez(fun, fun_der, interval, order);

    A1=A(1:end-1);
    E=A(end);

    fprintf('\n \t [DEGREE]: %3.0f [ERR. INFTY NORM]: %2.2e',order,abs(E) );
end
```

che calcola i polinomi di miglior approssimazione p_k^* per $k = 0, \dots, 3$ nell'esempio precedente e la lanciamo dalla shell, otteniamo

```
>> mytest

[DEGREE]:    0 [ERR. INFTY NORM]: 5.00e-001
[DEGREE]:    1 [ERR. INFTY NORM]: 2.36e-001
[DEGREE]:    2 [ERR. INFTY NORM]: 6.35e-002
[DEGREE]:    3 [ERR. INFTY NORM]: 7.81e-003

>>
```

Consideriamo quale nuovo esempio, $f(x) = \exp(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Il polinomio di miglior approssimazione di grado 3 è (cf. [2, p.202], [4, p.174])

$$p_3^* = 0.994579 + 0.995668x + 0.542973x^2 + 0.179533x^3.$$

Per prima cosa lo verifichiamo con l'algoritmo di Remez in Matlab.

```
>> fun=inline('exp(x)');
>> fun_der=inline('exp(x)');
>> interval=[-1,1];
>> order=3;
>> A= remez(fun, fun_der, interval, order);
>> format long
>> A
```

A =

```
0.36235107106275
0.44832258411240
0.00437233753337
0.17953348361616
-0.00552837010869
```

Notiamo subito che i primi 4 coefficienti in A non coincidono con quelli di p_3^* . La ragione è semplice perchè la base in cui è descritto il polinomio di miglior approssimazione è del tipo $1, (x+1), (x+1)^2, (x+1)^3$ e non $1, x, x^2, x^3$. Quindi vogliamo vedere, aiutandoci col calcolo simbolico di Matlab (o Maxima di Octave) che

$$p_3^* = 0.36235107106275 + 0.44832258411240 \cdot (x+1) + 0.00437233753337 \cdot (x+1)^2 + 0.17953348361616 \cdot (x+1)^3 \quad (9.1)$$

coincide con

$$p_3^* = 0.994579 + 0.995668x + 0.542973x^2 + 0.179533x^3.$$

In Matlab

```
>> syms x
>> p=0.36235107106275+0.44832258411240*(x+1)
+0.00437233753337*(x+1).^2+0.17953348361616*(x+1).^3
```

```
p =
7301899142731767/9007199254740992
+4038130845500765/9007199254740992*x+
2520480983810965/576460752303423488*(x+1)^2
+3234187719657061/18014398509481984*(x+1)^3
```

```
>> simplify(p)
```

```
ans =
573336033147670005/576460752303423488+
286981678583374373/288230376151711744*x+
313002502070888821/576460752303423488*x^2+
3234187719657061/18014398509481984*x^3
```

```

>> 573336033147670005/576460752303423488
ans =
    0.99457947632468
>> 286981678583374373/288230376151711744
ans =
    0.99566771002762
>> 313002502070888821/576460752303423488
ans =
    0.54297278838185
>> 3234187719657061/18014398509481984
ans =
    0.17953348361616
>>

```

e quindi l'algoritmo di Remez calcola proprio il polinomio di miglior approssimazione (in norma infinito).

Vediamo la qualità dell'approssimazione aumentando il grado.

```

fun=inline('exp(x)');
fun_der= inline('exp(x)');
interval=[-1,1];
order_vett=1:10;

for index=1:length(order_vett)
    order=order_vett(index);
    A= remez(fun, fun_der, interval, order);

    A1=A(1:end-1,1);
    E=A(end);

    fprintf('\n \t [DEGREE]: %3.0f [ERR. INFTY NORM]: %2.2e',order,abs(E) );
end

```

ottenendo

```

>> mytest

[DEGREE]:    1 [ERR. INFTY NORM]: 2.79e-001
[DEGREE]:    2 [ERR. INFTY NORM]: 4.50e-002
[DEGREE]:    3 [ERR. INFTY NORM]: 5.53e-003
[DEGREE]:    4 [ERR. INFTY NORM]: 5.47e-004
[DEGREE]:    5 [ERR. INFTY NORM]: 4.52e-005
[DEGREE]:    6 [ERR. INFTY NORM]: 3.21e-006
[DEGREE]:    7 [ERR. INFTY NORM]: 2.00e-007
[DEGREE]:    8 [ERR. INFTY NORM]: 1.11e-008
[DEGREE]:    9 [ERR. INFTY NORM]: 5.52e-010
[DEGREE]:   10 [ERR. INFTY NORM]: 2.50e-011

```

Vediamo un paragone con la troncata della serie di Taylor di grado opportuno. Essendo

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},$$

consideriamo quale polinomio di grado p ,

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^p \frac{x^k}{k!}.$$

Salviamo in `mytaylor.m`

```
fun=inline('exp(x)');
interval=[-1,1];
order=3;

order_vett=1:10;

% Punti tests e valutazione funzione.
x=linspace(interval(1),interval(2),10000);
fx=feval(fun,x);

for index=1:length(order_vett)
    order=order_vett(index);

    % Calcola i coefficienti di Taylor, in ordine crescente per grado.
    v=(0:order)';
    coeffs=1./gamma(v+1);

    % Valuta l'errore in norma infinito.
    px=polyval(flipud(coeffs),x);
    inferr=norm(fx-px,inf);

    fprintf('\n \t [DEGREE]: %3.0f [ERR. INFTY NORM]: %2.2e',order,inferr);
end
```

Otteniamo così

```
>> mytaylor

[DEGREE]:   1 [ERR. INFTY NORM]: 7.18e-001
[DEGREE]:   2 [ERR. INFTY NORM]: 2.18e-001
[DEGREE]:   3 [ERR. INFTY NORM]: 5.16e-002
[DEGREE]:   4 [ERR. INFTY NORM]: 9.95e-003
[DEGREE]:   5 [ERR. INFTY NORM]: 1.62e-003
[DEGREE]:   6 [ERR. INFTY NORM]: 2.26e-004
[DEGREE]:   7 [ERR. INFTY NORM]: 2.79e-005
[DEGREE]:   8 [ERR. INFTY NORM]: 3.06e-006
[DEGREE]:   9 [ERR. INFTY NORM]: 3.03e-007
[DEGREE]:  10 [ERR. INFTY NORM]: 2.73e-008
```

E' immediato osservare la netta differenza tra la qualità dell'approssimazione fornita dalla troncata di Taylor e quella del polinomio di miglior approssimazione.

NOTA 9.1. Il codice freeware `remez.m` purtroppo a volte non si comporta correttamente. Per gli utenti che dispongano di Matlab in versione recente (a partire dalla 7.4), si suggerisce in alternativa di installare le routines del pacchetto `chebfun` [16] e quindi utilizzare la routine `remez.m` (da non confondersi con la precedente, perchè di natura totalmente diversa) introdotta in [9].

Se la routine è correttamente installata, abbiamo

```
>> % f=inline('exp(x)');
>> % APPROSSIMA "f" ALLA PRECISIONE DI MACCHINA CON UN POLINOMIO "p".
>> p=chebfun('exp(x)');
>> % TESTIAMO APPROSSIMAZIONE DI CHEBFUN.
>> test_nodes=-1:0.001:1;
>> f_test_nodes=feval(f,test_nodes);
>> p_test_nodes=feval(p,test_nodes);
>> abs_err_chebfun=norm(f_test_nodes-p_test_nodes,inf)

abs_err_chebfun =

    1.3323e-15

>> rel_err_chebfun=norm( (f_test_nodes-p_test_nodes)/...
    p_test_nodes,inf)

rel_err_chebfun =

    1.2308e-16

>> % TESTIAMO APPROSSIMAZIONE DI REMEZ (GRADO 10).
>> n=10;
>> [p_remez,err,xk] = remez(p,n);
>> % p_remez E' IL POLINOMIO, err E' IL MASSIMO ERRORE COMPIUTO.
>> p_remez_test_nodes=feval(p_remez,test_nodes);
>> abs_err_remez=norm(f_test_nodes-p_remez_test_nodes,inf)

abs_err_remez =

    2.5023e-11

>> rel_err_chebfun=norm( (f_test_nodes-p_remez_test_nodes)/ ...
    p_remez_test_nodes,inf)

rel_err_chebfun =

    1.2838e-13
```

Si osservi che a grado 10, i due codici `remez.m` offrono gli stessi errori assoluti.

10. Esercizi facoltativi.

1. (Facile, ma un po' lungo). Sfruttando i valori citati (a meno di O grandi), si confrontino i valori delle costanti di Lebesgue per i nodi equispaziati, di Chebyshev e di Chebyshev estesi.
2. (Richiede almeno la versione 7.4 di Matlab e la suite `chebfun`) Utilizzando l'algoritmo di Remez, calcolare il massimo errore compiuto dal polinomio di miglior approssimazione di grado 2 relativamente alla funzione

$$f(x) = \left(\frac{3x+5}{8} \right)^{1/2}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$ (cf. [10, p.119, Esempio 5.17]).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] N.I. Achieser, *Theory of approximation*, Dover, 1992.
- [2] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [3] K. Atkinson and W. Han, *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Approach*, Springer, 2001.
- [4] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- [5] P.J. Davis, *Interpolation and approximation*, Dover, 1975.
- [6] G. De Marco, *Analisi Due / I*, Zanichelli, 1992.
- [7] G. Gilardi, *Analisi Due, seconda edizione*, Mc Graw-Hill, 1996.
- [8] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1970.
- [9] R. Pachon and L.N. Trefethen, *Barycentric-Remez algorithms for best polynomial approximation in the chebfun system*, (2008)
<http://www.comlab.ox.ac.uk/files/1948/NA-08-20.pdf>.
- [10] G.M.M. Phillips e P.J. Taylor, *Theory and Applications of Numerical Analysis*, Elsevier Science, 1996.
- [11] G. Rodriguez, *Algoritmi Numerici*, Pitagora Editrice Bologna, 2008.
- [12] V.S. Ryaben'kii and S. V. Tsyknov, *A Theoretical Introduction to Numerical Analysis*, Chapman and Hall / CRC, 2007.
- [13] S.J. Smith, *Lebesgue constants in polynomial interpolation*, Annales Mathematicae et Informaticae, p. 109-123, 33 (2006)
<http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami>.
- [14] E. Süli and D. Meyers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge Press, 2003.
- [15] Sherif A. Tawfik, Matlab Files Exchange, Algoritmo di Remez,
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8094>
- [16] L.N. Trefethen and collaborators, *Chebfun*,
<http://www.comlab.ox.ac.uk/chebfun>
- [17] Mac Tutor (Euler) ,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html>.
- [18] Mac Tutor (Hölder) ,
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Holder.html>.
- [19] Mac Tutor (Lagrange) ,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html>.
- [20] Mac Tutor (Lebesgue) ,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lebesgue.html>.
- [21] Mac Tutor (Lipschitz) ,
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lipschitz.html>.
- [22] Mac Tutor (Mascheroni) ,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mascheroni.html>.
- [23] Wikipedia, (Costante di Eulero Mascheroni),
http://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni.
- [24] Wikipedia, (de la Vallee-Poussin),
http://it.wikipedia.org/wiki/Charles_Jean_de_la_Vall%C3%A9e-Poussin.
- [25] Wikipedia, (Funzione Lipschitziana),
http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_lipschitziana.
- [26] Wikipedia, (Hölder condition),
http://en.wikipedia.org/wiki/Hölder_condition.
- [27] Wikipedia, (Lebesgue),
<http://it.wikipedia.org/wiki/Lebesgue>.
- [28] Wikipedia, (Lebesgue constant interpolation),
[http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_\(interpolation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation)).
- [29] Wikipedia, (Integrale di Lebesgue),
http://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Lebesgue.
- [30] Wikipedia, (Operatore Lineare),
http://it.wikipedia.org/wiki/Operatore_lineare.
- [31] Wikipedia, (Operatore Lineare Continuo),
http://it.wikipedia.org/wiki/Operatore_lineare_continuo.
- [32] Wikipedia, (spazio di Banach),
http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Banach.
- [33] Wikipedia, (successione di Cauchy),
http://it.wikipedia.org/wiki/Successione_di_Cauchy.
- [34] Wikipedia, (spazio L^p),
<http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio-Lp>.
- [35] Wikipedia, (spazio normato),

- http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_normato.
[36] Wikipedia, (spazio vettoriale),
http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_vettoriale.