

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO *

A. SOMMARIVA [†] E M. VENTURIN [‡]

1. Esercizio su Matlab.

1. E' noto che per $|x| < 1$ si ha

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

- Fissato $h = 0.01$ e i punti $x = -1 + h, -1 + 2h, \dots, 1 - 2h, 1 - h$ si valutino in tali punti le funzioni

$$\frac{1}{1-x}$$

e

$$1 + x + x^2 + x^3$$

e si plottino i corrispettivi grafici in una stessa finestra.

Suggerimento: usare i comandi Matlab/Octave `hold on` e `hold off` (aiutarsi con l'help di Matlab/Octave).

```
>> help hold
HOLD    Hold current graph
        HOLD ON holds the current plot and all axis properties
        so that subsequent graphing commands add to the
        existing graph.

        HOLD OFF returns to the default mode whereby PLOT
        commands erase the previous plots and reset all axis
        properties before drawing new plots.

        HOLD, by itself, toggles the hold state.
        HOLD does not affect axis autoranging properties.

        HOLD ALL holds the plot and the current color and
        linestyle so that subsequent plotting commands will
        not reset the color and linestyle.

        HOLD(AX,...) applies the command to the Axes object
        AX.

Algorithm note:
HOLD ON sets the NextPlot property of the current
figure and axes to "add".
HOLD OFF sets the NextPlot property of the current
```

*Ultima revisione: 1 giugno 2010

[†]DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA,
VIA TRIESTE 63, 35121 PADOVA, ITALIA (ALVISE@MATH.UNIPD.IT)

[‡]DIPARTIMENTO DI INFORMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA, STRADA LE GRAZIE
15, 37134 VERONA, ITALIA (MANOLO.VENTURIN@GMAIL.COM)

```
axes to "replace".
```

```
See also ishold, newplot, figure, axes.
```

```
Reference page in Help browser  
doc hold
```

```
>>
```

- Si plotti in scala semilogaritmica il grafico dell'errore assoluto $\left| \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + x^3) \right|$.
Perchè quest'ultima quantità è particolarmente piccola per $x = 0$?

Suggerimento: riguardo all'implementazione in Matlab/Octave, si faccia attenzione all'utilizzo delle operazioni puntuali di Matlab.

```
>> x=0:0.5:1;  
>> y=1+x+x^2  
??? Error using ==> mpower  
Matrix must be square.  
  
>> y=1+x+x.^2  
  
y =  
  
    1.0000    1.7500    3.0000  
  
>>
```

Indicare in cosa consista l'errore di sintassi compiuto da Matlab/Octave.

2. Esercizio su Matlab. Eulero ha dimostrato che tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

quanto

$$(\ln 2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot 2^{k-1}}$$

convergono a $\frac{\pi^2}{6}$. Calcolare per $N = 1000$ le somme

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$$

e

$$(\ln 2)^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2 \cdot 2^{k-1}}.$$

Valutare

$$\left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} \right|$$

e

$$\left| (\ln 2)^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2 \cdot 2^{k-1}} - \frac{\pi^2}{6} \right|.$$

Per effettuare la somma usare il comando `sum` di cui vediamo un esempio.

```
>> v=[1 3 56 23];
>> somma=0;
>> for ii=1:length(v)
    somma=somma+v(ii);
end
>> somma
```

```
somma =
```

```
      83
```

```
>> sum(v)
```

```
ans =
```

```
      83
```

```
>>
```

Si osservi inoltre che

```
>> somma=0;
>> for k=1:1000
    somma=somma+(1/k);
end
>> v=sum(1./(1:1000));
>> somma
```

```
somma =
```

```
    7.4855
```

```
>> v
```

```
v =
```

```
    7.4855
```

```
>>
```

Adattare questi ultimi calcoli alla somma richiesta.

3. Propagazione degli errori. Una funzione f risulta difficile da valutare al calcolatore nel punto $x \neq 0$ in cui $f(x) \neq 0$ qualora a piccoli errori (relativi) sui dati

$$|x - x_c|/|x|$$

corrispondano grandi errori (relativi) sui risultati

$$|f(x) - f(x_c)|/|f(x)|.$$

Di conseguenza è importante valutare la quantità

$$\mathcal{K}(f, x, x_c) = \frac{|f(x) - f(x_c)|/|f(x)|}{|x - x_c|/|x|}.$$

Se f è derivabile con continuità nel più piccolo intervallo $\mathcal{I}$ aperto contenente x ed x_c , per il teorema della media, essendo

$$f(x) - f(x_c) = f'(\xi) \cdot (x - x_c), \quad \xi \in \mathcal{I},$$

ricaviamo facilmente che

$$\mathcal{K}(f, x, x_c) \approx \mathcal{K}(f, x) := \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}.$$

Date le funzioni

$$f_1(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

$$f_2(x) = 1 - x$$

si calcoli analiticamente il *condizionamento*

$$\mathcal{K}(f_1, x) = \frac{|x \cdot f'_1(x)|}{|f_1(x)|}$$

$$\mathcal{K}(f_2, x) = \frac{|x \cdot f'_2(x)|}{|f_2(x)|}$$

Utilizzando Matlab/Octave, si plottino in scala semilogaritmica i grafici di $\mathcal{K}(f_1, \cdot)$ e $\mathcal{K}(f_2, \cdot)$ nel set di punti $x = -1 + 10^{(-3)}, -1 + 2 \cdot 10^{(-3)}, \dots, 1 - 2 \cdot 10^{(-3)}, 1 - 10^{(-3)}$. Si può dire da questi dove la funzione è malcondizionata (cioè assume valori di condizionamento *alti*)?

4. Equazioni nonlineari. Calcolare con i metodi di bisezione e Newton un'approssimazione dello zero α di

$$5x = \exp(-x) \tag{4.1}$$

$$x^4 - 2 = 0 \tag{4.2}$$

$$x \log(x) - 1 = 0 \tag{4.3}$$

$$(x - 1) \log(x) = 0 \tag{4.4}$$

$$m = x - E \sin(x), \quad m = 0.8, \quad E = 2 \tag{4.5}$$

Verificare che per le approssimazioni $x^* \approx \alpha$ fornite sia effettivamente $f(x^*) \approx 0$. Posto come x^* il risultato finale, si disegni il grafico degli errori $|x^{(k)} - x^*|$ in scala semilogaritmica. Da questa dedurre, se possibile, l'ordine di convergenza del metodo e giustificare teoricamente la risposta.

5. Interpolazione. Calcolare analiticamente il polinomio di terzo grado che interpola le coppie $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 12)$, $(5, 21)$. Quindi valutare tale polinomio nei punti di ascissa -1 , 0 , 10 .