

Tracce di calcolo numerico¹

Prof. Marco Vianello - Dipartimento di Matematica, Università di Padova
aggiornamento: 23 maggio 2018

2 Soluzione numerica di equazioni non lineari

2.1 Metodo di bisezione e metodo di Newton

1. data una funzione $f \in C[a, b]$ (cioè, f continua in $[a, b]$), tale che $f(a)f(b) < 0$, si dimostri che la successione $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, costruita col metodo di bisezione (utilizzando iterativamente il teorema degli zeri) soddisfa la stima *a priori* dell'errore

$$e_n = |\xi - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove ξ è uno zero di f in (a, b) ; si diano ipotesi su f che garantiscono l'unicità dello zero

2. utilizzando la stima del punto 1, si calcoli il minimo numero di iterazioni del metodo di bisezione che garantisce un errore minore di ε , dove $\varepsilon > 0$ è una tolleranza prefissata
3. data una funzione continua f tale che $f(\xi) = 0$ ed una successione $\{x_n\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, perché in generale il "residuo" $|f(x_n)|$ non è una buona stima dell'errore? (si disegni il possibile andamento locale di f , se il grafico è "piatto" ...); come va corretto il residuo utilizzando la derivata di f ? (residuo pesato) (traccia: assumendo f derivabile con derivata continua e non nulla in $[c, d]$, dove $x_n \in [c, d]$ almeno per n abbastanza grande, si utilizzi il teorema del valor medio, $f(x_n) - f(\xi) = f'(\alpha_n)(x_n - \xi)$, $\alpha_n \in \text{int}(x_n, \xi)$; si osservi che per la permanenza del segno la derivata è sicuramente non nulla in un intorno $[c, d]$ di uno zero semplice, ovvero ξ tale che $f'(\xi) \neq 0$)
4. se $|f'(x)| \geq k > 0$ in $[c, d]$, come può essere stimato l'errore tramite il residuo?
5. utilizzando i risultati del punto 3, si discuta la seguente stima *a posteriori* dell'errore (con correzione del residuo)

$$e_n = |\xi - x_n| \approx |f(x_n)| \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right|$$

6. si dia un'interpretazione geometrica del metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

7. un risultato di *convergenza globale del metodo di Newton*: data $f \in C^2[a, b]$, tale che $f(a)f(b) < 0$, con f'' di segno costante in $[a, b]$; scelto x_0 tale che $f(x_0)f''(x_0) > 0$, il metodo di Newton è ben definito e convergente all'unico zero di f in $[a, b]$

¹argomenti e quesiti contrassegnati da * sono più impegnativi, se non si è in grado di fare la dimostrazione bisogna comunque sapere (e saper usare) gli enunciati e capire di cosa si sta parlando

(traccia: ci sono 4 configurazioni possibili (disegnarle); le tangenti alla curva grafico stanno sempre sopra o sotto la curva, la successione $\{x_n\}$ è monotona e limitata, quindi ha limite finito che è ..., passando al limite nella definizione del metodo ...)

8. detto $e_n = |\xi - x_n|$ l'errore assoluto del metodo di Newton per $f(x) = 0$, in ipotesi di convergenza e per $f \in C^2(I)$, dove $I \supset \{x_n\}$ è un intervallo chiuso e limitato in cui $f'(x) \neq 0$, si dimostri la disuguaglianza $e_{n+1} \leq C e_n^2$ con C costante opportuna
traccia: utilizzando la formula di Taylor calcolata nella radice e centrata in x_n , $0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2$, dove $z_n \in \text{int}(x_n, \xi)$, insieme alla definizione di $\{x_n\}$, si ottiene $\xi - x_{n+1} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$, e ... $C = \max_{x \in I} |f''(x)| / (2 \min_{x \in I} |f'(x)|)$

* approfondimento: partendo da tale disuguaglianza, perchè ci si aspetta *convergenza locale*? (cioè, partendo in un intorno opportuno della soluzione? si osservi che $C e_{n+1} \leq (C e_n)^2$, da cui $C e_n \leq (C e_0)^{2^n}$)

9. un metodo convergente ha *ordine di convergenza* almeno $p \geq 1$ se esiste $C > 0$ tale che

$$e_{n+1} \leq C e_n^p$$

e ordine esattamente p se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = L \neq 0;$$

quindi il metodo di Newton nel caso di uno zero semplice ha ordine almeno 2; quando ha ordine esattamente 2, e quando maggiore di 2?

* per $p = 1$ si osservi in generale che necessariamente $L \leq 1$ e che $L < 1$ oppure $C < 1$ sono condizioni sufficienti per la convergenza

10. si mostri che il metodo di Newton per il calcolo della radice k -esima di un numero reale $a > 0$, assume la forma

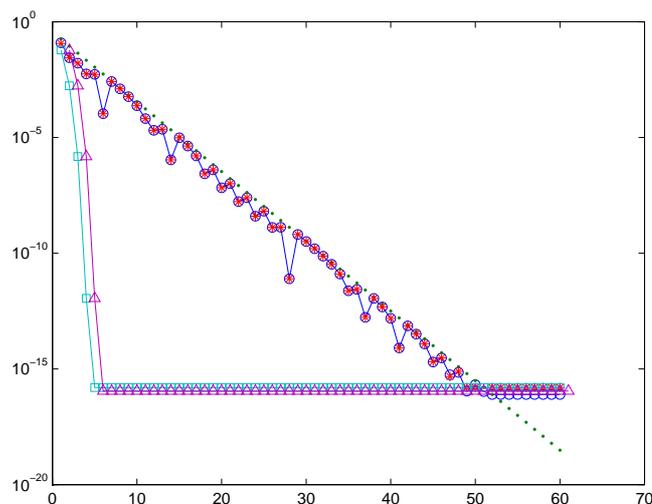
$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(già nota in antichità come metodo di Erone nel caso della radice quadrata), dove x_0 va scelto tale che $x_0^k > a$

11. si giustifichi il fatto che nel calcolo di $\sqrt{2}$ risolvendo l'equazione $x^2 - 2 = 0$ nell'intervallo $(1, 2)$, il metodo di bisezione guadagna in media 1 cifra decimale significativa ogni 3-4 iterazioni, mentre il metodo di Newton raddoppia il numero di cifre significative ad ogni iterazione

(traccia: si ragioni sull'errore relativo, $\rho_n = e_n/|\xi|$; col metodo di bisezione "in media" $\rho_{n+1} \approx \rho_n/2$, ...; col metodo di Newton $\rho_{n+1} \leq C|\xi|\rho_n^2$, quindi se $C|\xi| \leq 1$ si ha che $\rho_{n+1} \leq \rho_n^2$...)

12. in figura gli errori relativi (in scala logaritmica) nell'approssimazione di $\sqrt{2}$ con il metodo di bisezione (errore effettivo: pallini; stima a priori: puntini; stima del residuo pesato: asterischi) e con il metodo di Newton (errore effettivo: quadratini; stima dello "step", $e_n \approx |x_{n+1} - x_n|$: triangolini); si osservi che lo step $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n)|/|f'(x_n)|$ è per costruzione un residuo "pesato"



13. si studino numericamente le seguenti equazioni “storiche”:

- $x^3 - 2x - 5 = 0$ (su questa equazione Newton illustrò il suo metodo)
- $m = x - E \sin x$ (equazione di Keplero: m è l’anomalia media di un pianeta, E l’eccentricità della sua orbita, x l’anomalia eccentrica; si assuma ad esempio $m = 0.8$, $E = 0.2$)

(traccia: isolare gli zeri anche graficamente, verificare l’applicabilità dei metodi di bisezione e di Newton, ...)

14. si studi la risolubilità dell’equazione $x - e^{-\alpha x} = 0$, $\alpha > 0$, con i metodi di bisezione e di Newton (l’equazione può anche essere interpretata come intersezione di grafici)

2.2 Iterazioni di punto fisso

1. un risultato di *convergenza delle iterazioni di punto fisso*: sia $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile nell’intervallo chiuso $I \subseteq \mathbb{R}$, con (i): $\phi(I) \subseteq I$, e (ii): $|\phi'(x)| \leq \theta < 1$ per ogni $x \in I$; scelto un qualsiasi $x_0 \in I$, la successione $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, converge all’unico punto fisso di ϕ in I , ovvero $\xi \in I$ tale che $\xi = \phi(\xi)$ (si faccia vedere usando (ii) e il teorema del valor medio che ϕ “contrae le distanze” e che il punto fisso è unico in I ; si osservi anche che I può essere non limitato, ovvero una semiretta chiusa o anche tutta la retta)

(* traccia della dimostrazione (facoltativo): si provi che valgono le disuguaglianze $|x_{n+p} - x_n| \leq (1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{p-1})|x_{n+1} - x_n| \leq (\theta^n / (1 - \theta))|x_1 - x_0|$, da cui si vede che la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy, quindi ha limite in I ...)

2. corollario (*convergenza locale*): sia ξ punto fisso di una funzione ϕ di classe C^1 in un intorno di ξ , con $|\phi'(\xi)| < 1$; allora la successione delle iterazioni di punto fisso converge a ξ a partire da qualsiasi x_0 in un intorno opportuno di ξ

(* traccia: detto $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$ un intorno chiuso di ξ in cui $|\phi'(x)| < 1$, che esiste per la permanenza del segno, si applichi il risultato precedente mostrando che $\phi(I) \subseteq I$; chi è θ ?)

3. in ipotesi di convergenza, per le iterazioni di punto fisso valgono le stime di errore

$$|x_n - \xi| \leq \theta^n |x_0 - \xi| \quad (\text{a priori})$$

$$|x_n - \xi| = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - \phi'(z_n)} \leq \frac{1}{1 - \theta} |x_{n+1} - x_n| \quad (\text{a posteriori})$$

dove $z_n \in \text{int}(x_n, \xi)$; quando ha senso usare il solo step $|x_{n+1} - x_n|$ come stima a posteriori dell'errore?

(traccia: per la prima si osservi che per il teorema del valor medio $|x_{n+1} - \xi| = |\phi(x_n) - \phi(\xi)| = |\phi'(z_n)| |x_n - \xi| \leq \theta |x_n - \xi|$; per la seconda si osservi che $x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - \xi + \xi - x_n = \phi'(z_n)(x_n - \xi) + \xi - x_n, \dots$)

4. si mostri che l'equazione $x - e^{-\alpha x} = 0$, $0 < \alpha < 1$, è risolubile con le iterazioni di punto fisso; quante iterazioni occorrono per garantire un errore assoluto $< 10^{-8}$ con $\alpha = 1/5$?
5. *ordine di convergenza* delle iterazioni di punto fisso: si dimostri che un'iterazione di punto fisso $x_{n+1} = \phi(x_n)$, con $\phi \in C^p$ in un intorno di ξ , ha ordine 1 se e solo se $\phi'(\xi) \neq 0$, e ha ordine $p > 1$ se e solo se $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$ e $\phi^{(j)}(\xi) = 0$, $j = 1, \dots, p-1$

traccia per $p > 1$: per la formula di Taylor $x_{n+1} - \xi = \phi(x_n) - \phi(\xi) = \phi'(\xi)(x_n - \xi) + \dots + \phi^{(p-1)}(\xi)(x_n - \xi)^{p-1}/(p-1)! + \phi^{(p)}(z_n)(x_n - \xi)^p/p!$ con $z_n \in \text{int}(x_n, \xi)$, ...; per il "solo se" si osservi che assumendo ordine p , se esistesse $1 \leq j < p$ tale che $\phi^{(j)}(\xi) \neq 0$, ponendo $k = \min\{1 \leq j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0\}$ si avrebbe $e_{n+1}/e_n^p = (e_{n+1}/e_n^k)e_n^{k-p}$ con $k-p < 0$, ...

6. perché il metodo di Newton si può interpretare come iterazione di punto fisso? quando ci si aspetta ordine di convergenza $p > 2$?
- (traccia: si osservi che il metodo di Newton corrisponde a un'iterazione di punto fisso con $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$, quindi se $f'(\xi) \neq 0$ si ha che $\phi'(\xi) = 0$...)