

Tracce di calcolo numerico¹

Prof. Marco Vianello - Dipartimento di Matematica, Università di Padova
aggiornamento: 29 novembre 2016

3 Interpolazione e approssimazione

3.1 Interpolazione polinomiale

1. problema algebrico dell'interpolazione (costruzione): dati $n + 1$ punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, sul grafico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, determinare se esiste ed è unica una funzione f_n in una opportuna famiglia di funzioni \mathcal{F}_n , tale che

$$f_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

(nel caso di $\mathcal{F}_n = \mathbb{P}_n$, lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$, si parla di interpolazione polinomiale, e chiameremo $\Pi_n(x) = f_n(x)$ il polinomio interpolatore)

2. problema analitico dell'interpolazione (convergenza): per quali scelte dei nodi $\{x_i\}$ e in quali ipotesi su f si ha convergenza uniforme degli interpolatori, cioè

$$\text{dist}(f_n, f) = \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty ?$$

3. perché il polinomio interpolatore $\Pi_n(x)$ di grado $\leq n$ di una funzione f su $n + 1$ nodi distinti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è unico?

(traccia: se esistessero due polinomi interpolatori distinti, la loro differenza si annullerebbe in tutti i nodi e per il teorema fondamentale dell'algebra ...)

4. si mostri che

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x), \quad \ell_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

è il polinomio interpolatore su $n + 1$ nodi distinti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (si tratta della cosiddetta "forma di Lagrange" del polinomio interpolatore; siccome $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$, ...)

5. il problema di interpolazione polinomiale di grado n su $n + 1$ nodi è equivalente al sistema lineare $Va = y$, dove $V = (v_{ij}) = (x_i^j)$, $0 \leq i, j \leq n$ è detta "matrice di Vandermonde" dei nodi di interpolazione, $a = (a_0, \dots, a_n)^t$ e $y = (y_0, \dots, y_n)^t$, $y_i = f(x_i)$

6. forma di Lagrange dell'errore di interpolazione di grado n per $f \in C^{n+1}[a, b]$ (si noti l'analogia con il resto della formula di Taylor):

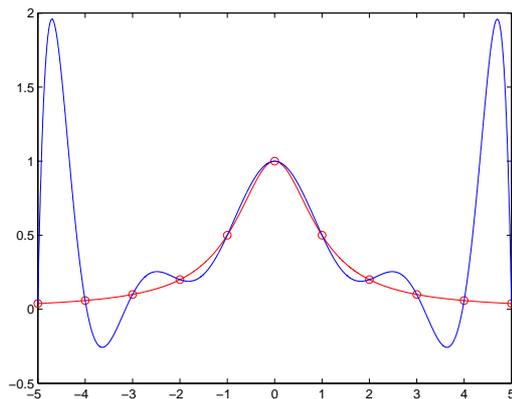
$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

dove $\eta \in \text{int}(x, x_0, \dots, x_n)$

(* traccia della dimostrazione (facolt.): si utilizzi la funzione (di variabile z) $G(z) = E_n(z) - \omega(z)(E_n(x)/\omega(x))$, $x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ fissato, e si applichi ripetutamente il teorema di Rolle)

¹argomenti e quesiti contrassegnati da * sono più impegnativi, se non si è in grado di fare la dimostrazione bisogna comunque sapere (e saper usare) gli enunciati e capire di cosa si sta parlando

7. * con la forma di Lagrange dell'errore di interpolazione polinomiale di grado n per $f \in C^{n+1}[a, b]$, si dimostra che $dist(\Pi_n, f) \leq \max_{x \in [a, b]} \{|f^{(n+1)}(x)|\} (b-a)^{n+1}/(n+1)!$, e che nel caso di nodi equispaziati $dist(\Pi_n, f) \leq \max_{x \in [a, b]} \{|f^{(n+1)}(x)|\} h^{n+1}/(4(n+1))$ dove $h = (b-a)/n$ (dim. non richiesta); perché da questa stime non si può dedurre la convergenza per $f \in C^\infty[a, b]$? (si pensi al controesempio di Runge, $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in [-5, 5]$, in cui accade che $dist(\Pi_n, f) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$; in figura i grafici della funzione di Runge e del polinomio interpolatore di grado 10 su 11 nodi equispaziati, si notino le oscillazioni dell'interpolatore verso gli estremi)



8. interpolazione di Chebyshev: abbiamo visto che in generale i polinomi interpolatori non convergono alla funzione campionata (controesempio di Runge su nodi equispaziati); scelte speciali dei nodi però assicurano tale convergenza, è il caso ad esempio dell'interpolazione polinomiale sui nodi di Chebyshev

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) + \frac{b+a}{2}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

si noti che tali nodi, che corrispondono alla proiezione su $[a, b]$ di punti equispaziati sulla semicirconferenza di centro $(a+b)/2$ e raggio $(b-a)/2$, non sono equispaziati ma si accumulano più rapidamente agli estremi dell'intervallo; si può dimostrare (dim. non richiesta) che, detto $\Pi_n^{\text{Cheb}}(x)$ il polinomio interpolatore sui nodi di Chebyshev, per ogni $f \in C^k[a, b]$, $k > 0$, esiste una costante c_k tale che

$$dist(\Pi_n^{\text{Cheb}}, f) = \max_{x \in [a, b]} |\Pi_n^{\text{Cheb}}(x) - f(x)| \leq c_k \frac{\log(n)}{n^k},$$

e quindi si ha convergenza uniforme per $n \rightarrow \infty$ (in particolare per la funzione del controesempio di Runge)

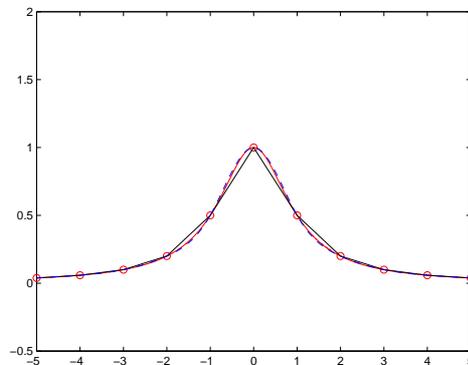
9. * si mostri che la "risposta alle perturbazioni" su f dell'interpolazione polinomiale è legata alla quantità $\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|$ (costante di Lebesgue), dove gli $\{\ell_i\}$ sono i polinomi elementari di Lagrange; si osservi che Λ_n dipende solo dai nodi di interpolazione

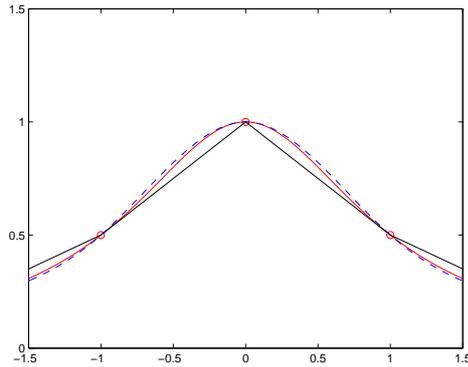
(traccia: si utilizzi la forma di Lagrange del polinomio interpolatore, detto $\tilde{\Pi}_n(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{f}(x_i) \ell_i(x)$ il polinomio interpolatore sui dati perturbati $\{\tilde{f}(x_i)\}$ dove $|\tilde{f}(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon$, si ha $|\tilde{\Pi}_n(x) - \Pi(x)| \leq \dots$)

10. * è noto che per qualsiasi distribuzione di nodi la costante di Lebesgue ha crescita almeno logaritmica, $\Lambda_n \geq c_1 \log n$, che per i nodi equispaziati $\Lambda_n \sim c_2 \frac{2^n}{n \log n}$ (instabilità), mentre per i nodi di Chebyshev $\Lambda_n = \mathcal{O}(\log n)$ (c_1 e c_2 sono opportune costanti)

3.2 Interpolazione polinomiale a tratti

1. nell'interpolazione polinomiale a tratti di grado s su $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, dove n è multiplo di s , si costruisce una funzione continua $\Pi_s^c(x)$ tale che $\Pi_s^c(x)$ sia il polinomio interpolatore di grado fissato s sui nodi $x_{ks}, x_{ks+1}, \dots, x_{(k+1)s}, 0 \leq k \leq \frac{n}{s} - 1$ (si osservi che $\Pi_s^c(x)$ si ottiene "incollando" per continuità pezzi polinomiali e che in generale i punti di raccordo x_{ks} sono punti angolosi della funzione interpolante)
2. si dimostri che l'interpolazione lineare a tratti ($s = 1$, disegnarla) converge uniformemente per $f \in C^2[a, b]$ con un errore $\mathcal{O}(h^2)$, dove $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, $h = \max_i \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, n - 1$
(traccia: si utilizzi su ogni intervallino $[x_i, x_{i+1}]$ la stima dell'errore di interpolazione polinomiale di grado 1)
3. * si dimostri che l'interpolazione quadratica a tratti ($s = 2$, disegnarla) converge uniformemente per $f \in C^3[a, b]$ con un errore $\mathcal{O}(h^3)$, dove $h = \max_i \Delta x_i$; c'è qualche vincolo sul numero di nodi? si utilizzi poi la stima trovata per decidere a priori quanti nodi usare nell'interpolazione quadratica a passo costante di $f(x) = \sin(x)$ in $[0, \pi]$ per avere un errore $< 10^{-8}$
(traccia: si utilizzi localmente la stima dell'errore di interpolazione polinomiale di grado 2)
4. nell'interpolazione spline di grado s su $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, si cerca $S_s \in C^{s-1}[a, b]$ tale che S_s ristretta a $[x_i, x_{i+1}]$ sia un polinomio di grado al più s e $S_s(x_i) = f(x_i), 0 \leq i \leq n$; chi sono le incognite in questo problema, quante sono le equazioni (vincoli)? nel caso cubico, come si ottiene un sistema quadrato?
5. è noto che se $f \in C^4[a, b]$, $\text{dist}(S_3^{(j)}, f^{(j)}) = \mathcal{O}(h^{4-j}), 0 \leq j \leq 3$ (le derivate di S_3 non sono però interpolanti)
6. nella prima figura i grafici della funzione di Runge e delle spline interpolanti lineare e cubica (tratteggiata) su 11 nodi equispaziati, nella seconda figura un particolare





3.3 Approssimazione polinomiale ai minimi quadrati

1. dato un campionamento $\{(x_i, y_i)\}$, $y_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq N$, nell'approssimazione ai *minimi quadrati* invece di interpolare si cerca un polinomio p di grado $m < N$ (tipicamente $m \ll N$) tale che la somma degli scarti quadratici $\sum_{i=1}^N (y_i - p(x_i))^2$ sia minima, ovvero si risolve il problema di minimo in $m + 1$ variabili $a = (a_0, \dots, a_m)$

$$\min_{a \in \mathbb{R}^{m+1}} \sum_{i=1}^N (y_i - (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m))^2$$

che ha soluzione unica, calcolabile risolvendo il sistema lineare $V^t V a = V^t y$, dove $V = (v_{ij}) = (x_i^j)$, $1 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq m$ è una matrice di Vandermonde rettangolare $N \times (m + 1)$ e $V^t V$ è una matrice $(m + 1) \times (m + 1)$ simmetrica e definita positiva (traccia: si tratta della soluzione ai minimi quadrati del sistema sovradeterminato $V a = y$, si veda la sezione di Algebra Lineare Numerica)

2. * detto L_m il polinomio dei minimi quadrati, si può dimostrare (dim. non richiesta) che se $h = \max_i \Delta x_i \leq \theta(b - a)/m^2$, $0 < \theta < 1$, allora per ogni $f \in C^k[a, b]$, $k > 1$, esiste una costante c_k tale che $\text{dist}(L_m, f) = \max_{x \in [a, b]} |L_m(x) - f(x)| \leq c_k m^{1-k}$
3. in figura il polinomio dei minimi quadrati di grado $m = 8$ (puntini) e di grado $m = 10$ (tratteggio), ottenuti da un campionamento con rumore su $N = 200$ punti (linea frastagliata) della funzione $\sin(10x)$ in $[-1, 1]$ (linea continua)

