

Gli albori della quadratura numerica

Alvise Sommariva

Metodi e Modelli Analitici, Numerici e Probabilistici
per Problemi di Fisica

Giornata di Studio in onore di Renato Spigler,

Roma (I), 29 gennaio 2025

In questa comunicazione faremo delle osservazioni storiche sulle

- formule di quadratura di tipo Newton-Cotes;
- formule composte;
- formule gaussiane.

Focalizzeremo inoltre l'attenzione sulla disponibilità di documenti originali.

Nell'esporre tali regole, tipicamente

- si fissa un insieme di nodi $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ nell'intervallo limitato $[a, b]$,
- si determina l'interpolante polinomiale nei nodi in termini di polinomi di Lagrange,
- si integra l'interpolante e si nota che i pesi corrispondono all'integrale dei polinomi di Lagrange L_i , $i = 1, \dots, n$.

In altri termini, posto $w_i = \int_a^b L_i(x) dx$, $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)\end{aligned}$$

Di seguito, tipicamente si fanno esempi, anche di natura geometrica, introducendo

- le regole del rettangolo (punto medio),
- la regola del trapezio (qualcuno dice di Stevino autore della meglio nota [legge in idrostatica](#)),
- la regola di Cavalieri-Simpson,
- e piu' in generale le regole di Newton-Cotes aventi almeno 3 punti.

Ovviamente qualcosa non va, visto che Lagrange e' nato dopo Cavalieri, Simpson, Newton e Cotes.

Mentre le regole del rettangolo e del trapezio non richiedono grandi sforzi per essere definite le cose diventano decisamente piú complesse relativamente

- alla regola di Cavalieri-Simpson,
- piú in generale alle regole di Newton-Cotes con almeno tre nodi.

Esempi Newton-Cotes:

Posto $f_k = f(x_k)$, e $x_k = a + k \cdot (b - a)/n$, con $k = 0, \dots, n$,

- **Regola di Simpson 3/8**, $n = 3$: $\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_4)$,
- **Regola di Milne-Boole-Bode**, $n = 4$: $\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$,
- **Regola a sei punti**, $n = 5$: $\frac{5h}{288}(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5)$,
- **Regola di Weddle-Hardy**, $n = 6$: $\frac{h}{140}(41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6)$,
- **Regola a otto punti** $n = 7$:
 $\frac{7h}{17280}(751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 + 2989f_4 + 1323f_5 + 3577f_6 + 751f_7)$,
- **Regola a nove punti**, $n = 8$:
 $\frac{4h}{14175}(989f_0 + 5888f_1 - 928f_2 + 10496f_3 - 4540f_4 + 10496f_5 - 928f_6 + 5888f_7 + 989f_8)$,
- **Regola a dieci punti**, $n = 9$:
 $\frac{9h}{89600}(2857(f_0 + f_9) + 15741(f_1 + f_8) + 1080(f_2 + f_7) + 19344(f_3 + f_6) + 5778(f_4 + f_5))$,
- **Regola a undici punti**, $n = 10$: $\frac{5h}{299376}(16067(f_0 + f_{10}) + 106300(f_1 + f_9) - 48525(f_2 + f_8) + 272400(f_3 + f_7) - 260550(f_4 + f_6) + 427368f_5)$.

Viene spontaneo farsi alcune domande.

- Se Newton e Cotes non conoscevano i polinomi di Lagrange, come potevano calcolare le formule di quadratura interpolatorie col loro nome? Che tecnica hanno usato per calcolarle?
- Se le avevano calcolate, come mai prendono tipicamente i nomi di matematici nati successivamente?

Discuteremo in breve il caso della formula di Cavalieri-Simpson.

Regola di Cavalieri-Simpson

Sull'attribuzione a Cavalieri, scrive Peano in [Residuo in Formula de quadratura Cavalieri-Simpson](#) (1916), in un anomalo interlingua, attribuendo la formula a contributi di [Cavalieri](#) (1639), [Gregory](#) (1668), [Cotes](#) (1722) e Simpson (1743).

dans la figure 1, dont la figure 2 est une projection oblique. En joignant PQ' et QP' nous obtenons le point S ; la droite $A'S$ passe par le point inaccessible A .

La projection centrale de la figure 1 sur un ablique à celle-ci f_2 , donne la construction proposée par M. d'Ocagne. Son tracé consiste à mener par A' deux droites quelconques (projection de Δ parallèles par A' dans la fig. 1); par les points d'intersection J et K nous menons deux droites quelconques (projection des parallèles auxiliaires par P et Q dans la fig. 1) sur lesquelles on a deux pointuelles homologues déterminées par les trois couples de points JJ' , $Q'P'$ et $Q''P''$. La droite AA' n'étant autre chose que l'axe perspectif des deux pointuelles, nous obtenons un point quelconque de l'axe en joignant convenablement les points des deux supports, ici PQ' et $Q''P''$. Le point d'intersection S est un point de la droite cherchée.

Residuo in Formula de quadratura Cavalieri-Simpson:

Nota de G. Prato (Torino)

NOTE DE LA RÉDACTION. — Sur la demande de M. G. Peano, professeur d'Analyse à l'Université de Turin et président de l'Accademia pro Interlingua, nous reproduisons, à titre de spécimen, une note rédigée dans la langue auxiliaire internationale Interlingua.

Formula de quadratura que nos considera es:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

que es vero, si functione f es integro, de gradu non superiore

¹ Indiquons en passant une construction très simple des points de la droite AA' qui n'a été donnée telle que: Si l'on mène une parallèle quelconque à BB' , qui coupe $A'B$ en C et $A'B'$ en C' et qu'on complète le triangle $A'CC'$ en un parallélogramme ayant CC' comme diagonale le sommet opposé à A' peut servir à déterminer la droite AA' .

³ Umrei variabile en latino: Ia, de, asa, et; nomine habet forma de Urena, id est: reniduo, feruile, grada, distere (ablativ), non nominativus, sed lex antiquior.

• *Acronimo* pro *Interlingua* = *habe origine* la 1887, se adopta *Volegik* publicat la 1888, atele *Esperanto* publicat la 1887; la 1908 publicat «*Idicea natural*» construat supar principi de *internationalitate maximu*; se continua *libere* pro *Engua international*.

• *Activari* prezente, truon se «*Atti Ri. Acc. di Torino*, 29, 2, 1913», se scripto la «*Lingua sine flexione*», uno ex *numerosa* forma de *interlingua*, *intelligibile* sine *studiu* al *lingua publica*.

ad 3; et pro alio functiones, ea de usu frequente, ut formula de approximatione.

Ce formula occorre sub forma geometrico, in
B. CAVALIERI, *Centuria di varii problemi*, Bologna, a. 1639, p. 446⁴.

J. GREGORY, *Exercitationes geometricae*, Londini anno 1668;
R. COTES, *Harmonia mensurarum*, Catabrigiae, anno 1722, p. 33
et in fine in

TH. SIMPSON, *Mathematical dissertations*, London, 1753, p. 109.

Es usu de appella « formula di Simpson » formula precedente.
Me adde nomine de primo auctore.

Praxi proba quod formula de Cavallieri-Simpson, es in generale satis approximato. Ergo plure auctore desidera de cognosce uno limite de errore in isto approximatione.

id es de differentia inter primo et secundo membro sub forma:

$$= -\frac{(b-a)^2}{4|b-a|} D^2 f(x)$$

ubi ξ è uno valore medio inter a e b .

Idem resultatu: es publicato ab Markov, in libro edito in S. Petersburg, 1889; et versione cum titulo: MARKOFF, *Differenzenrechnung*, Leipzig, 1896.

Un caso particolare di regola esposto in mio scritto: *Resto nelle formule di quadratura, espresso con un integrale definito*, « Rendiconti Acc. Lincei », 4 maggio 1913, ibi me da espressioni de residui in formula de Cavalieri-Simpson, sub-forma de integrale.

In presente scripto, me perveni ad idem resultatu, per via plus
directo et plus elementare.

Teodano: Pro habet capacitatem de uno vinario, non multiplico termino parte de longitudine de vaso per datus circulo manens et uno minores.

Si nos damos así de vane pro α , de α , et pro origine puncti medio, si longitudines de vane α , et si $\gamma(\alpha)$ es area de sectione de vane, in puncto de abscissa α , et normale ad α , tunc

velocidade $= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f(x) dx$; círculo unidade $= f(0)$; círculo unidade $= f(\Delta/2) = f(-\Delta/2)$; et
 res de Cavalieri que esse integral vale

$$\frac{\lambda}{2} [q'(x) + f(x)] = \frac{\lambda}{2} [q'(x) + f(x - \lambda x) + f(x)]$$

Risulta sorprendente a cosa servisse a Cavalieri una tale formula.

All'epoca studiavano molto i solidi di rotazione. Per esempio, **Keplero** in *Nova stereometria doliorum vinariorum* ovvero *Nuova misura del volume delle botti di vino* cercò di giustificare un **criterio empirico usato dai bottai austriaci**. Utilizzò metodi geometrici per provvedere allo scopo.

D'altra parte pare che anche **Cavalieri** fosse interessato a questo. In *Note - Postille Matematiche* di Gabrio Piola, si parla del lavoro di Cavalieri *Centuria di varii problemi*. In particolare a pagina 83, si dice

Il problema 80 per la misura delle botti ellittico-circolari, dove si dà una regola la quale é precisamente la medesima che oggidì si cava dalla nota formola del Rossi-Amulis dimostrata mediante il calcolo nel 1806.

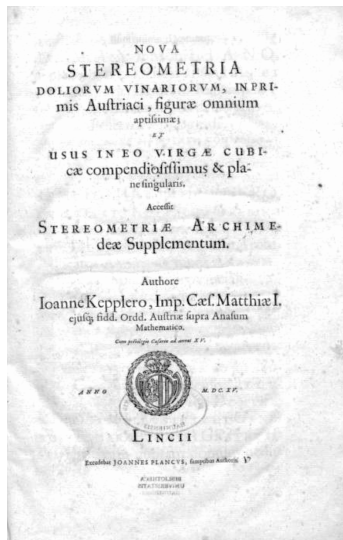


Figure: Copertina della pubblicazione di Keplero intitolata *Nova stereometria doliorum vinariorum* sul volume delle botti.

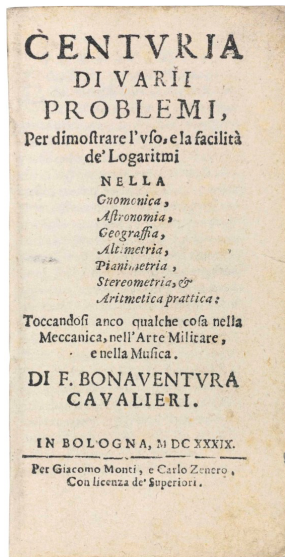


Figure: La copertina della pubblicazione di Cavalieri, suggerita da Peano.

¹ Phrasi de Cavalieri es: « Per havere la capacità della botte moltiplicheremo la terza parte della lunghezza della botte in due cerchi maggiori ed uno dei minori ».

Versione « Pro habe capacitate de vase vinario, nos multiplica tercio parte de longitudine de vase per duo circulo maggiore et uno minore ».

Si nos sume axi de vase pro axi de x , et pro origine puncto medio, si longitudine de vase es h , et si $f(x)$ es area de sectione de vase, in puncto de abscissa x , et normale ad axi, tunc

volumine $= \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx$; circulo maggiore $= f(0)$, circulo minore $= f(h/2) = f(-h/2)$; et re-

gola de Cavalieri dic que integrale vale :

$$\frac{h}{3} [2f(0) + f(h/2)] = \frac{h}{6} [4f(0) + f(-h/2) + f(h/2)] .$$

Figure: Nota di Peano sul volume delle botti di Cavalieri.

1948. In *Vino Veritas*:—"Si adunque moltiplicheremo la terza parte di IM lunghezza della Botte $BDFH$ in due cerchi maggiore CG e uno de minore BH , DF come in BH , ci verrà la capacità di detta Botte." F. B. Cavalieri, *Una centuria di varii Problemi nella Prattica Astrologica*, (Bologna, 1639), Problema 80. [Per Dr. G. N. Watson. It was probably this formula for the capacity of a cask of wine which suggested to James Gregory (who spent the years 1665–8 in Padua) the more general formula for approximate integration, often written in the form

$$\int_0^{2h} y \, dx = h(y_0 + 4y_1 + y_2)/3,$$

which, in its turn, led to the outstanding generalisations due to Newton and Cotes, and subsequently to the minor generalisation known as 'Simpson's rule'; about this rule (published in 1743) there is not much to be said except that it is more accurate than the 'trapezoidal rule'] [Per Dr. G. N. Watson]

Problema 79. 445

quello, che dimostra Archim. ne Lib. de Sphæra, & Cylindro, perciò basterà misurare il cerchio di, BA, semidiametro, cioè giungeremo insieme il log. del cerchio della Tauloletta del prob. 66 che è 0,49715. con il doppio del log. di, BA, cioè con il log. di, EA, 130103. e di, AI, 060206. (perche, EA, AB, AI, sono proporzionali) e ne verrà il logar. 240024. di p. 251.33. e tanto farà la superficie di detta porzione di sfera. La scio poi l'Essempio per la solidità della porzione dello sferoide, non essendo dissimile l'operazione da quella della sfera.

PROBLEMA 80.

Misurare la capacità delle Botti.

Sia di nuovo posta quā la figura del prob. ant. nella quale siano le due porzioni, ABH, D EF, li cui assi, AI, ME, siano eguali, onde trā le basi di quelle, cioè trā li cerchi, BH, DF, che faranno eguali, resti compreso il corpo,

446 Della Centuria

po, o Botte, BDFH, e per, L, centro pass, CG, diametro del cerchio maggiore, C G, perpendicolare ad, AE.

Per hauere adunque la capacità della Botte, BDFH, si potrà misurare mediante gli assi, AE, CG, tutto lo sferoide, ACEG, per il prob. 77. e poi per il prob. ant. le due porzioni, BAH, DEF, le quali sottratte dallo sferoide, ACEG, ci lasceranno la capacità della Botte, BDFH, ma perche questa è troppo lunga fattura, perciò ci potremo seruire di questi altri modi, come più facili.

Se adunque moltiplicheremo la terza parte di, IM, lunghezza della Botte, BDFH, in due cerchi maggiori, CG, & vno de minori, BH, DF, come in, BH, ci verrà la capacità di detta Botte. E poi quadreremo il cerchio di, CG, moltiplicando, CG, in se stesso,



Problema 80. 447

so, e poi moltiplicando il prodotto di nuovo per 7854. e partendo l'aumento per 10000 (che sono li termini della proporzione del quadrato al cerchio inscritto) poiche il quoziente farà il cerchio, CG, e così ancora quadreremo il cerchio, BH, e poi moltiplicheremo il terzo di, IM, nelli due cerchi, CG, & vno, BH, e ne verrà la capacità della Botte, BDFH.

E per i log. giungendo insieme il log. della terza parte di, IM, cō il log. del cerchio, CG, cioè con il log. del cerchio della Tauloletta del prob. 66. che è 0,49715. e con il log. duplicato di, CL, e con il log. del Binario, ne verrà il log. di vn primo inuento. Dipoi giungendo parimente insieme il log. della terza parte di, IM, con il log. del cerchio, BH, cioè con il log. del cerchio della Taur. del Prob. 66. e con il log. duplicato di, BL, ne verrà il log. di vn secondo inuento, il quale giunto al primo ci darà la capacità della Botte, BDFH.

ES-

Regola di Cavalieri-Simpson

La stessa regola di quadratura si trova in [Mathematical dissertations On A Variety of Physical and Analytical subjects](#) di Thomas Simpson. Guardando la figura, T. Simpson pensa probabilmente a formula composte.

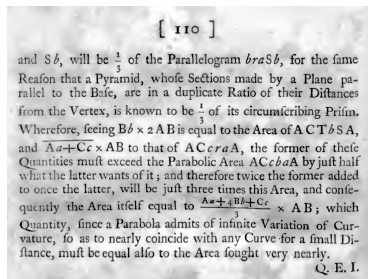
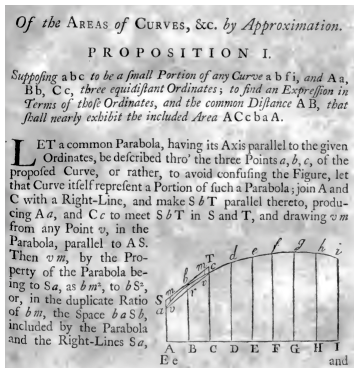


Figure: Dal testo di Simpson *Mathematical dissertations On A Variety of Physical and Analytical subjects*.

Nell'ambito delle formule composte risulta interessante citare che in Science, Vol. 351, No. 6272, nell'articolo

Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph

si cita un primo uso della formula composta dei trapezi da parte dei Babilonesi, tra il 50 e 350 AC, al fine di tracciare la velocità di Giove.

HISTORY OF SCIENCE

Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph

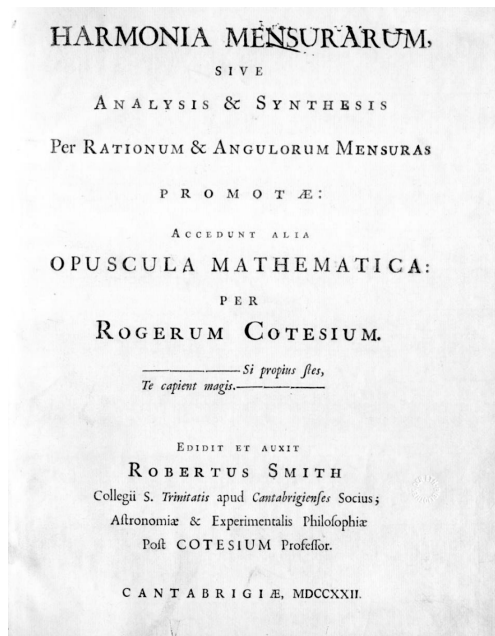
Mathieu Ossendrijver*

The idea of computing a body's displacement as an area in time-velocity space is usually traced back to 14th-century Europe. I show that in four ancient Babylonian cuneiform tablets, Jupiter's displacement along the ecliptic is computed as the area of a trapezoidal figure obtained by drawing its daily displacement against time. This interpretation is prompted by a newly discovered tablet on which the same computation is presented in an equivalent arithmetical formulation. The tablets date from 350 to 50 BCE. The trapezoid procedures offer the first evidence for the use of geometrical methods in Babylonian mathematical astronomy, which was thus far viewed as operating exclusively with arithmetical concepts.

- Queste formule furono introdotte da Newton nel 1676, e descritte in *Of Quadrature by Ordinates* nel 1695. La letteratura non é molto chiara, dicono che calcoló formule a 5 ordinate (grado 4?).
- Furono di seguito perfezionate da Cotes, che era editore della seconda edizione dei Principia di Newton, probabilmente nel 1707 ma pubblicate nel 1722, che le calcoló fino a quelle con 11 nodi.

Guardando *Harmonia mensurarum*, non é facile capire dove si trovino tali formule dovute a Cotes. Viene citato un *opuscolo aggiuntivo*, ma non é chiaro il riferimento.

Cotes pare non sia stato citato o pagato per il lavoro nei Principia. Ciò nonostante era molto stimato da Newton, che alla morte di Cotes a 34 anni disse *If he had lived, we might have known something*.



Teorema (Esistenza e unicità delle formule gaussiane)

Per ogni $n \geq 1$ esistono e sono unici dei nodi $x_1, \dots, x_n$ e pesi $w_1, \dots, w_n$ per cui il grado di precisione sia almeno $2n - 1$, ovvero

$$I_w(p_{2n-1}) := \int_a^b p_{2n-1}(x) w(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k p_{2n-1}(x_k)$$

per ogni $p_{2n-1} \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

I **nod**i sono gli zeri del polinomio ortogonale di grado n (rispetto w),

$$\phi_n(x) = A_n \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

e i corrispettivi **pesi** sono

$$w_i = \int_a^b L_i(x) w(x) dx = \int_a^b L_i^2(x) w(x) dx > 0,$$

con $i = 1, \dots, n$.

- Gauss in *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* ha provato l'esistenza di formule gaussiane $[-1, 1]$, per la funzione peso $w(x) = 1$ usando frazioni continue e serie ipergeometriche (1814).
- Jacobi in *Ueber Gauss' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden* ha ricavato lo stesso risultato utilizzando argomenti di divisibilità di polinomi. Il concetto che emerge è quello di ortogonalità, sviluppato successivamente da Schmidt (1905) e per polinomi da Szëgo (1918).

Curioso che le formule con peso di Jacobi siano state determinate da Mehler nel 1864.

- Gautschi osserva che Gauss aveva notato che gli zeri del polinomio di Legendre sono semplici, ma tanto Gauss quanto Jacobi non avevano osservato che i pesi sono positivi.

4. Wir betrachten jetzt den Fall $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$, welcher die einfachsten Resultate liefert. Es wird nämlich hier, wenn man

$$h_n = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{2^n \Gamma(n - \frac{1}{2})}$$

annimmt, nach einer bekannten Formel von *Jacobi*:

$$\Psi_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad \text{also:} \quad \alpha_m = \cos \frac{(2m+1)\pi}{2n}, \quad A_m = \frac{\pi}{n},$$

und folglich geht (1.) über in:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi f(\cos \vartheta) d\vartheta = \frac{\pi}{n} \{f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_n)\} + a_{2n} A_{2n} + \dots$$

Figure: In [Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen](#), Mehler usa argomenti di polinomi ortogonali per calcolare nodi e pesi. Quale esempio, cita la formula del peso di Chebyshev (e relativi polinomi ortogonali), dicendo *secondo una formula ben nota a Jacobi*.

- Posse (1875) e Christoffel (1877), con lavori ancora influenzati dall'uso di frazioni continue, hanno generalizzato tali concetti per funzioni peso su intervalli limitati, descrivendo i pesi mediante la formula nota come di Christoffel-Darboux (1877-1878).
- Secondo Gautschi, tali formule su intervalli illimitati appaiono per la prima volta in un lavoro di Radau (1883), che considerò $w(x) = \exp(-x)$ in $[0, +\infty)$ e di Gourier (1883) che studiò $w(x) = \exp(-x^2)$ in $(-\infty, \infty)$.
- Questi e molti altri dettagli si trovano in [A Survey of Gauss-Christoffel Quadrature Formulae](#) di W. Gautschi.

METHODVS NOVA INTEGRALIVM VALORES PER AP- PROXIMATIONEM INVENIENDI.

AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARVM EXHIBITA D. 16. SEPT. 1814.

I.

Inter methodos ad determinationem numericam approxima-
tam integralium propositas insignem tenent locum regulæ, quas
præeunte summo *Newton* evolutas dedit *Cotes*. Scilicet si requiri-
tur valor integralis $\int y dx$ ab $x = g$ vsque ad $x = h$ sumendus, va-
lores ipsius y pro his valoribus extremis ipsius x et pro quotcun-
que aliis intermediis a primo ad vltimum incrementis aequalibus
progredientibus, multiplicandi sunt per certos coefficientes numeri-
cos, quo facto productorum aggregatum in $h - g$ ductum inte-
grale quaesitum suppeditabit, eo maiore præcisione, quo plures ter-
mini in hac operatione adhibentur. Quum principia huius methodi,
quæ a geometris rarius quam par est in vsum vocari videtur, nul-
libi quod sciam plenius explicata sint, pauca de his præmittere ab
instituto nostro haud alienum erit.

2.

Sit $n + 1$ multitudo terminorum, quos in vsum vocare
placuit, statuasque $h - g = \Delta$, ita vt. valores ipsius x sint

$$A \quad a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g$$

Figure: La prima pagina di *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*.

UEBER GAUSS' NEUE METHODE,
DIE WERTHE DER INTEGRALE NÄHERUNGSWEISE ZU FINDEN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. I p. 301—308.

1.

In den *Principiis* von Newton liest man eine Methode, wie man durch eine Anzahl gegebener Punkte eine parabolische Curve legen könne. Diese Aufgabe erscheint analytisch als Interpolationsproblem, aus mehreren Gliedern einer Reihe das allgemeine zu finden. Es ist der bekanntere Fall, wenn die Intervalle der Ordinaten der gegebenen Punkte gleich groß sind oder, analytisch ausgedrückt, wenn die Werthe des reihenden Elements, für welche auch die Werthe der entsprechenden Glieder der Reihe gegeben sind, eine arithmetische Progression bilden. Aber der elegante, mit Unrecht weniger gekannte Algorithmus, den Newton giebt, erstreckt sich schon auf den allgemeineren Fall, wenn jene Intervalle der Ordinaten der gegebenen Punkte oder jene Werthe des reihenden Elements ganz beliebige sind. Newton hat hiervon eine Anwendung auf die Quadraturen gemacht. Durch mehrere Punkte der zu quadrirenden Curve, für welche die Ordinaten berechnet worden sind, legt er die parabolische Curve, und deren Quadratur zwischen denselben Grenzen, zwischen denen die gegebene Curve quadriert werden sollte, giebt einen Näherungswerth.

Newton hat von jenem Interpolationsproblem und seiner Anwendung auf die Quadraturen ferner in einem Tractätchen gehandelt, welches *Methodus*

1*

Figure: La prima pagina di Ueber Gauss' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden di C. Jacobi.

Ad eccezione di casi particolari, come quelli della funzione peso di Chebyshev, i nodi e i pesi non sono semplici da calcolare.

- Molti anni fa erano listati in manuali, **calcolati a mano e ai primordi informatici immagazzinati in schede perforate**. In **The race for high order Gauss-Legendre quadrature**, A. Townsend scrive

Hand calculations led the way for over a century.

Tallquist (1905), Moors (1905), Nyström (1930), and Bayly (1938) used fountain pens and dogged determination to calculate the quadrature nodes for $n \leq 12$.

Eventually, with presumably a small army of human calculators Lowan, Davids, and Levenson (1942) tabulated the nodes and weights for $n = 1, \dots, 16$ for the Mathematical Tables Project.

Per gli articoli originali si veda

- 1 **Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula**
- 2 **Mathematical Tables Project (U.S.)**

The accompanying table computed by the Mathematical Tables Project gives the roots x_i for each $P_n(x)$ up to $n=16$, and the corresponding weight coefficients a_i , to 15 decimal places.

The first such table, computed by Gauss gave 16 places up to $n=7$.³ More recently work was done by Nyström,⁴ who gave 7 decimals up to $n=10$, but for the interval $(-1/2, +1/2)$. B. de F. Bayly has given the roots and coefficients of $P_{12}(x)$ to 13 places.⁵

Figure: Un interessante commento sul lavoro di Gauss, tratto da [Table of the Zeros of the Legendre Polynomials of Order 1-16: And the Weight Coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature Formula](#) (di A.N. Lowan, N. Davids, A. Levenson, Bulletin of the American Mathematical Society, 1942).

Per dettagli si veda

- E. Heine [Handbuch der Kugelfunctionen](#), vol. 2, 1881, p. 15 (ma sono a pp. 295-296.),
- E.W. Hobson, [Spherical Harmonics](#), pp. 80-81,
- B. de F. Bayly, [Gauss' Quadratic Formula with Twelve Ordinates](#), Biometrika (1938).

Formule gaussiane

$n = 1$	$n = 2$
$a_1 = 0,5$	$a_1 = 0,21132 \ 48654$
$R_1 = 1$	$a_2 = 0,78867 \ 51346$
Corr. $\frac{1}{12} L_2$	$R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$
	Corr. $\frac{1}{12} L_4$
$n = 3$	$n = 4$
$a_1 = 0,11270 \ 16654$	$a_1 = 0,06943 \ 18442$
$a_2 = 0,88729 \ 83346$	$a_2 = 0,93056 \ 81558$
$a_3 = 0,5$	$a_3 = 0,33000 \ 94782$
$R_1 = R_2 = \frac{1}{3}; R_3 = \frac{2}{3}$	$a_4 = 0,66999 \ 05218$
Corr. $\frac{1}{48} L_2$	$R_1 = R_4 = 0,17392 \ 74226$
	$R_2 = R_3 = 0,32607 \ 25774$
	$\log R_1 = 9,24036 \ 80612$
	$\log R_2 = 9,51331 \ 42764$
	Corr. $\frac{1}{48} L_2$
$n = 5$	$n = 6$
$a_1 = 0,04691 \ 00770$	$a_1 = 0,03376 \ 52429$
$a_2 = 0,95308 \ 99230$	$a_2 = 0,96623 \ 47571$
$a_3 = 0,23076 \ 53449$	$a_3 = 0,16929 \ 53068$
$a_4 = 0,76923 \ 46551$	$a_4 = 0,83060 \ 46332$
$a_5 = 0,5$	$a_5 = 0,38069 \ 04070$
$R_1 = R_5 = 0,11846 \ 34425$	$a_6 = 0,61930 \ 95930$
$R_2 = R_4 = 0,23931 \ 43352$	$R_1 = R_6 = 0,08566 \ 22462$
$R_3 = \frac{4}{5} = 0,84444 \ 44444$	$R_2 = R_5 = 0,18038 \ 07865$
$\log R_1 = 9,07358 \ 43490$	$R_3 = R_4 = 0,23395 \ 69673$
$\log R_2 = 9,37896 \ 87142$	$\log R_1 = 8,93278 \ 94580$
$\log R_3 = 9,45399 \ 74559$	$\log R_2 = 9,25619 \ 02763$
Corr. $\frac{1}{698414} L_4$	$\log R_3 = 9,36913 \ 59831$
	Corr. $\frac{1}{17718258} L_4$

K n g e l

$n = 7$

$a_1 = 0,02544 \ 60438 \ 286202$
$a_2 = 0,97455 \ 39561 \ 713798$
$a_3 = 0,12923 \ 44072 \ 003028$
$a_4 = 0,87076 \ 55927 \ 996972$
$a_5 = 0,29707 \ 74243 \ 113015$
$a_6 = 0,70292 \ 25756 \ 886985$
$a_7 = 0,5$
$R_1 = R_7 = 0,06474 \ 24830 \ 844348$
$R_2 = R_6 = 0,13985 \ 26957 \ 446384$
$R_3 = R_5 = 0,19091 \ 50252 \ 525595$
$R_4 = \frac{3+6}{1+2+3} = 0,20897 \ 95918 \ 367347$
$\log R_1 = 8,81118 \ 93529$
$\log R_2 = 9,14567 \ 08421$
$\log R_3 = 9,28084 \ 01093$
$\log R_4 = 9,32010 \ 38766$
Corr. $\frac{1}{176679368} L_{14}$

Figure: Formule Gaussianne listate da Heine (l'intervallo di riferimento (0,1) e non il più classico (-1,1)).

$n = 15$	
$x_0 = 0.000000000000000$	$a_0 = 0.202578241925561$
$x_1 = 0.201194093997435$	$a_1 = 0.198431485327111$
$x_2 = 0.394151347077563$	$a_2 = 0.186161000015562$
$x_3 = 0.570972172608539$	$a_3 = 0.166269205816994$
$x_4 = 0.724417731360170$	$a_4 = 0.139570677926154$
$x_5 = 0.848206583410427$	$a_5 = 0.107159220467172$
$x_6 = 0.937273392400706$	$a_6 = 0.070366047488108$
$x_7 = 0.987992518020485$	$a_7 = 0.030753241996117$
$n = 16$	
$x_1 = 0.095012509837637$	$a_1 = 0.189450610455069$
$x_2 = 0.281603550779259$	$a_2 = 0.182603415044924$
$x_3 = 0.458016777657227$	$a_3 = 0.169156519395003$
$x_4 = 0.617876244402644$	$a_4 = 0.149595988816577$
$x_5 = 0.755404408355003$	$a_5 = 0.124628971255534$
$x_6 = 0.865631202387832$	$a_6 = 0.095158511682493$
$x_7 = 0.944575023073233$	$a_7 = 0.062253523938648$
$x_8 = 0.989400934991650$	$a_8 = 0.027152459411754$

Figure: Formule Gaussianhe listate nel 1944, aventi 15 e 16 nodi. Si noti che bisogna considerare anche $-x_k$, con lo stesso peso!

- Nel 1969 Golub e Welsch introdussero in [Calculation of Gauss Quadrature Rules](#) un nuovo algoritmo per il calcolo dei nodi e dei pesi. Partendo da questo W. Gautschi e collaboratori hanno scritto una raccolta di codici per determinare regole gaussiane per molte funzioni peso.

Il lavoro contiene pure una [microfiche](#) relativa a una suite in ALGOL60 basata sulle routines GAUSSQUADRATURERULE, GENORTHOPOLY, CLASSICORTHOPOLY.

- In [Computation of Gauss-type quadrature formulas](#), D. Laurie commenta

The timeless fact about the Golub–Welsch algorithm is that any advance in our ability to solve the symmetric tridiagonal eigenproblem immediately implies a corresponding advance in our ability to compute Gaussian formulas.

Calculation of Gauss Quadrature Rules*

By Gene H. Golub** and John H. Welsch

Abstract. Several algorithms are given and compared for computing Gauss quadrature rules. It is shown that given the three term recurrence relation for the orthogonal polynomials generated by the weight function, the quadrature rule may be generated by computing the eigenvalues and first component of the orthonormalized eigenvectors of a symmetric tridiagonal matrix. An algorithm is also presented for computing the three term recurrence relation from the moments of the weight function. ■

- Negli ultimi anni c'è stato un crescente interesse verso algoritmi per il calcolo di regole gaussiane fino a diverse migliaia di punti (si veda [Fast and Accurate Computation of Gauss-Legendre and Gauss-Jacobi Quadrature Nodes and Weights](#) di N. Hale e A. Townsend e loro referenze).
- Nel 2014 Bogaert ha presentato formule asintotiche di tipo esplicito per i pesi e i nodi della quadratura di Gauss-Legendre, che consentono il calcolo di nodi e pesi per valori di n superiori a un miliardo in meno di 20 secondi, si veda [Iteration-free computation of Gauss-Legendre quadrature nodes and weights](#) e si pensi all'enorme lavoro svolto dai tempi di Gauss.