

Minimi quadrati e polinomi ortogonali

14 marzo 2009

1 Il problema ai minimi quadrati

Consideriamo lo spazio normato delle funzioni misurabili (cf. [5, p.284]) quadrato integrabili $(L^2(a, b), \|\cdot\|_2)$ dove a, b è un intervallo della retta reale, non necessariamente limitato (cf. [5, p.386], ricordando [5, p.308]), e

$$\|g\|_2 = (g, g), \quad (f, g)_2 = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx,$$

dove

$$\overline{x + iy} = x - iy.$$

Si dimostra (non facile!) che questo spazio euclideo è un esempio di spazio di Hilbert (cf. [5, p.388]), cioè uno spazio euclideo che è completo, separabile e infinito dimensionale (cf. [5, p.155]).

Più in generale se $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione positiva allora lo spazio $(L_w^2(a, b), \|\cdot\|_{2,w})$ definito come

$$L_w^2(a, b) = \left\{ v \text{ misurabili t.c. } \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

è uno spazio di Hilbert dotato del prodotto scalare

$$(f, g)_{2,w} = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} w(x) dx$$

(cf. [2, p.23]).

Supponiamo di seguito che in particolare sia $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione nonnegativa, con (a, b) non necessariamente limitato, tale che

1. $\int_a^b |x|^n w(x) dx < +\infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$;
2. $\int_a^b g(x) w(x) dx = 0$ per qualche funzione continua e non negativa g implica $g \equiv 0$ in (a, b) .

per cui, visto che $L_w^2(a, b)$ è uno spazio vettoriale, contiene sia $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ come pure le loro combinazioni lineari e quindi lo spazio dei polinomi $\mathcal{P}_n$ di grado n (con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario). Infatti, se $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ allora per la disuguaglianza triangolare e il fatto che per ogni k si ha

$$\|x^k\|_{2,w}^2 = \int_a^b |x|^{2k} w(x) dx < +\infty$$

necessariamente

$$\|p_n\|_{2,w} = \left\| \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\|_{2,w} \leq \sum_{k=0}^n a_k \|x^k\|_{2,w} < +\infty,$$

e quindi $p_n \in L_w^2(a, b)$.

Fissata $f \in L_w^2([a, b])$ ed $n \in \mathbb{N}$, il problema ai minimi quadrati (nel continuo) consiste nel determinare il polinomio p_n di grado n tale che sia minima la quantità (cf. [1, p.204-207])

$$\|f - p_n\|_{2,w} = \int_a^b |f(x) - p_n(x)|^2 w(x) dx.$$

Essendo $L_w^2([a, b])$ uno spazio euclideo, e $(\phi_k)_{k=0,\dots,n}$ una base di $\mathcal{P}_n$, abbiamo visto che la soluzione del problema

$$\|f - f^*\|_{2,w} = \min_{g \in \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_n\}} \|f - g\|_{2,w}$$

è

$$f^* = \sum_{j=0}^n \gamma_j^* \phi_j$$

dove i coefficienti γ_j^* verificano le cosiddette equazioni normali

$$\sum_{k=0}^n (\phi_j, \phi_k)_{2,w} \gamma_k^* = (\phi_j, f)_{2,w}, \quad j = 0, \dots, n.$$

La soluzione è caratterizzata dalla proprietà di ortogonalità cioè che $f^* - f$ è ortogonale a tutti gli ϕ_k , con $k = 1, \dots, n$, ovvero

$$(f, \phi_k)_{2,w} = (f^*, \phi_k)_{2,w}, \quad k = 0, \dots, n$$

Nel caso $\phi_k(x) = x^k$ per $k = 0, \dots, n$, le equazioni normali si riscrivono quindi come

$$\sum_{k=0}^n \gamma_k^* \left(\int_a^b x^{j+k} w(x) dx \right) = \int_a^b x^j f(x) w(x) dx, \quad j = 0, \dots, n.$$

o in forma matriciale, posto per $j, k = 0, \dots, n$

$$A_{j,k} := \int_a^b x^{j+k} w(x) dx, \quad \beta_j = \int_a^b x^j f(x) w(x) dx,$$

come $A\gamma = \beta$.

Nota facoltativa. Quanto visto si può provare in un modo alternativo. Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_w^2(a, b)$ e definiamo

$$\mathcal{F}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) := \int_a^b |f(x) - \sum_{j=0}^n \gamma_j x^j|^2 w(x) dx = \int_a^b [f(x) - \sum_{j=0}^n \gamma_j x^j]^2 w(x) dx.$$

Sviluppando il quadrato $[f(x) - \sum_{j=0}^n \gamma_j x^j]^2$ si vede subito che $\mathcal{F}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ è infinitamente differenziabile rispetto i coefficienti $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e inoltre che una condizione necessaria affinché $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ sia un minimo per $\mathcal{F}$ è che sia

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma_k} = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma_k} &= \int_a^b \frac{\partial [f(x) - \sum_{j=0}^n \gamma_j x^j]^2 w(x)}{\partial \gamma_k} dx \\ &= \int_a^b 2 \cdot [f(x) - \sum_{j=0}^n \gamma_j x^j] \cdot (-x^k) w(x) dx \\ &= - \int_a^b 2 \cdot [f(x) \cdot x^k - \sum_{j=0}^n \gamma_j x^{j+k}] \cdot w(x) dx \end{aligned}$$

se e solo se

$$\int_a^b f(x) \cdot x^k \cdot w(x) dx = \sum_{j=0}^n \gamma_j \int_a^b x^{j+k} \cdot w(x) dx$$

La quantità a primo membro coincide con $(f, \cdot^k)_{2,w}$. Per ipotesi, essendo $\int_a^b x^{j+k} \cdot w(x) dx < \infty$ la quantità a secondo membro è ben definita. Sia $A_{l,m} = \int_a^b x^{l+m} \cdot w(x) dx$, $\gamma = (\gamma_k)$, $\beta_k = (f, \cdot^{(k-1)})_{2,w}$ con $l, m, k = 0, 2, \dots, n$. Quindi la soluzione esiste ed unica se e solo se lo è quella del sistema lineare $A\gamma = \beta$ cioè $\det(A) \neq 0$. ■

Vediamo quale caso particolare $w(x) \equiv 1$, $(a, b) = (0, 1)$. Poichè

$$A_{j,k} = \int_0^1 x^{j+k} dx = \frac{1}{j+k+1}$$

si nota che la matrice A coincide con la matrice di Hilbert $H_{j,k} = \frac{1}{j+k+1}$.

La matrice di Hilbert è estremamente sensibile a piccoli cambiamenti nei coefficienti o dei valori del termine noto. Per vederlo (cf. [1, p.530-535]), sia $\mathcal{A}$ una matrice non singolare, $\|\cdot\|$ una norma indotta di matrice [8], e

$$\kappa(\mathcal{A}) = \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{A}^{-1}\|.$$

Si dimostra che se

$$(\mathcal{A} + \delta \mathcal{A})(x + \delta x) = b + \delta b,$$

allora

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(\mathcal{A})}{1 - \kappa(\mathcal{A}) \frac{\|\delta \mathcal{A}\|}{\|\mathcal{A}\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta \mathcal{A}\|}{\|\mathcal{A}\|} \right).$$

Per capirne il significato, si supponga per semplicità $\delta \mathcal{A} = 0$, Allora

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(\mathcal{A})}{1 - \kappa(\mathcal{A}) \frac{\|\delta \mathcal{A}\|}{\|\mathcal{A}\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta \mathcal{A}\|}{\|\mathcal{A}\|} \right) = \kappa(\mathcal{A}) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

per cui più grande è $\kappa(\mathcal{A})$ più grande è il rischio che piccole perturbazioni sul termine noto b provochino grandi effetti sul calcolo della soluzione x . Si noti che questa stima è solo una maggiorazione. Comunque in molti casi risulta un buon indicatore di quanto un sistema lineare sia *difficile* da risolvere al calcolatore, indipendentemente dal metodo utilizzato.

Tornando alla matrice di Hilbert, vediamo in Matlab valori del numero di condizionamento in norma 2.

```
>> help cond
```

```
COND    Condition number with respect to inversion.
COND(X) returns the 2-norm condition number (the ratio of the
largest singular value of X to the smallest). Large condition
numbers indicate a nearly singular matrix.

COND(X,P) returns the condition number of X in P-norm:

        NORM(X,P) * NORM(INV(X),P).

where P = 1, 2, inf, or 'fro.'

See also RCOND, CONDEST, CONDEIG, NORM, NORMEST.
```

```
>> for n=5:5:40, fprintf('\n \t [n]: %2.0f [cond (norma 2)]: %2.2e
[det]: %2.2e', n,cond(hilb(n)),det(hilb(n))); end
```

```
[n]:  5 [cond (norma 2)]: 4.77e+005 [det]: 3.75e-012
[n]: 10 [cond (norma 2)]: 1.60e+013 [det]: 2.16e-053
[n]: 15 [cond (norma 2)]: 8.49e+017 [det]: -2.19e-120
[n]: 20 [cond (norma 2)]: 1.91e+018 [det]: -1.12e-195
[n]: 25 [cond (norma 2)]: 1.46e+019 [det]: 8.14e-275
[n]: 30 [cond (norma 2)]: 6.19e+018 [det]: 0.00e+000
[n]: 35 [cond (norma 2)]: 1.03e+019 [det]: 0.00e+000
[n]: 40 [cond (norma 2)]: 4.55e+019 [det]: 0.00e+000
```

```
>> for n=5:5:40, fprintf('\n \t [n]: %2.0f [min autoval.]: %2.2e
[max autoval.]: %2.2e', n,min(abs(eig(hilb(n)))) ,max(abs(eig(hilb(n))))); end
```

```
[n]:  5 [min autoval.]: 3.29e-006 [max autoval.]: 1.57e+000
```

```
[n]: 10 [min autoval.]: 1.09e-013 [max autoval.]: 1.75e+000
[n]: 15 [min autoval.]: 7.58e-018 [max autoval.]: 1.85e+000
[n]: 20 [min autoval.]: 3.05e-018 [max autoval.]: 1.91e+000
[n]: 25 [min autoval.]: 1.70e-018 [max autoval.]: 1.95e+000
[n]: 30 [min autoval.]: 9.49e-019 [max autoval.]: 1.99e+000
[n]: 35 [min autoval.]: 1.68e-017 [max autoval.]: 2.01e+000
[n]: 40 [min autoval.]: 2.22e-017 [max autoval.]: 2.04e+000
>>
```

Ricapitolando

1. il problema ai minimi quadrati continui ha un'unica soluzione se e solo se un certo sistema lineare $A\gamma = \beta$ ha una e una sola soluzione;
2. nel caso $w \equiv 1$, $(a, b) = (-1, 1)$ la matrice A coincide con la matrice di Hilbert che ha un numero di condizionamento estremamente grande, il che comporta che il sistema lineare $A\gamma = \beta$ sarà estremamente sensibile a piccole perturbazioni (cioè malcondizionato);
3. la matrice di Hilbert sembra essere singolare, cioè avente determinante nullo, per $n \geq 0$; in realtà si dimostra che è definita positiva, e quindi tutti gli autovalori sono positivi da cui il determinante è non nullo essendo il prodotto degli autovalori.

Notiamo subito che il sistema è difficile da risolvere poichè abbiamo rappresentato il polinomio p_n^* nella base $1, x, \dots, x^n$. Cosa succede se lo scriviamo come combinazione lineare di elementi di un'altra base $\{\phi_n\}$? Se ad esempio scegliessimo la base $\{\phi_n\}$ cosicchè

$$(\phi_k, \phi_m) = a_k \delta_{k,m}, \quad a_k > 0, \quad k, m \in 0, 1, \dots, n$$

con $\delta_{k,m}$ delta di Kronecker, finiremmo per risolvere un problema $A\gamma = \beta$ dove A è una matrice diagonale e quindi senza alcuna difficoltà troveremmo

$$\gamma_k = \frac{\beta_k}{a_{k,k}}$$

con $a_k > 0$.

Risulta quindi di importanza fondamentale cercare basi di polinomi $\{\phi_j\}$ per cui

$$(\phi_k, \phi_m) = a_k \delta_{k,m}, \quad a_k > 0, \quad k, m \in 0, 1, \dots, n.$$

2 Polinomi ortogonali

Sia $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione nonnegativa, con (a, b) non necessariamente limitato, tale che

1. $\int_a^b |x|^n w(x) dx < +\infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$;

2. $\int_a^b f(x) w(x) dx = 0$ per qualche funzione continua e non negativa g implica $g \equiv 0$ in (a, b) .

La funzione w è detta *peso*. Le funzioni peso più comuni sono (cf. [1, p.206], [10], [11], [9])

1. $w(x) = 1$ con $x \in [-1, 1]$ (peso di Legendre) [14];
2. $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ con $x \in (-1, 1)$ (peso di Chebyshev);
3. $w(x) = (1-x^2)^{\gamma-(1/2)}$ con $x \in (-1, 1)$, $\gamma > (-1/2)$ (peso di Gegenbauer) [6];
4. $w(x) = (1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta$ con $x \in (-1, 1)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ (peso di Jacobi) [7];
5. $w(x) = \exp(-x)$ con $x \in (0, +\infty)$ (peso di Laguerre) [13];
6. $w(x) = \exp(-x^2)$ con $x \in (-\infty, +\infty)$ (peso di Hermite) [12];

Vediamo ora che proprietà ha un insieme di polinomi $\{\phi_k\}_{k=0,\dots,n}$ in cui il grado $\deg$ di ogni polinomio sia $k-1 < \deg(\phi_k) = k$ e $(\phi_i, \phi_j)_{2,w} = c_i \delta_{i,j}$ (con $\delta_{i,j}$ il delta di Kronecker, $c_i > 0$, $i, j = 0, \dots, n$). Una tal famiglia *triangolare* di polinomi (cioè tale che $\deg(\phi_k) = k$) si dice *ortogonale* rispetto alla funzione peso w nell'intervallo di riferimento.

Si può dimostrare usando la procedura di Gram-Schmidt che una tal famiglia triangolare di polinomi esiste e con la stessa procedura costruirla direttamente; inoltre è immediato osservare che ogni polinomio di grado n si può scrivere univocamente come combinazione lineare di $\phi_0, \dots, \phi_n$. Di conseguenza se $p_n = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j$, allora per la bilinearità del prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{2,w}$

$$(\phi_{n+1}, p_n)_{2,w} = (\phi_{n+1}, \sum_{j=0}^n a_j \phi_j)_{2,w} = \sum_{j=0}^n a_j (\phi_{n+1}, \phi_j)_{2,w} = 0.$$

Inoltre (cf. [3, p.978])

Teorema 2.1 *Sia $\{\phi_k\}_{k=0,\dots,n}$ una famiglia triangolare di polinomi ortogonali in (a, b) rispetto ad una funzione peso w . Allora il polinomio ϕ_n ha esattamente n radici reali e distinte nell'intervallo aperto (a, b) .*

Prima dimostrazione. Siano $x_1, \dots, x_m$ tutti gli zeri di ϕ_n interni ad (a, b) tali che ϕ_n cambia segno in ogni x_k con $k = 0, \dots, m$. Questa richiesta va discussa.

- Se $\phi_n(x_k) = 0$ ma non cambia segno, allora necessariamente $\phi_n^{(1)}(x_k) = 0$ e quindi lo zero x_k ha molteplicità maggiore di 1.
- In virtù del fatto che nella richiesta gli zeri distinti interni all'intervallo sono m e con molteplicità uguale a 1, se fosse $n > m$ allora le rimanenti radici sarebbero in $\mathbb{C} \setminus (a, b)$. Mostriamo che così non è.

Supponiamo sia per assurdo $m < n$ e che sia

$$q_m(x) := (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_m).$$

Sia

$$p_n(x) = q_m(x) \cdot r_{n-m}(x)$$

con $r_{n-m} \in \mathcal{P}_{n-m}$ che per ipotesi, non avendo zeri in $I = (a, b)$, ha segno costante in I . Quindi

$$q_m(x) \cdot p_n(x) = q_m(x) \cdot q_m(x) \cdot r_{n-m}(x) = q_m^2(x) \cdot r_{n-m}(x)$$

è una funzione continua che ha segno costante in (a, b) , non è nulla, per cui dalle proprietà della funzione peso w si ha

$$\int_a^b q_m(x) \cdot p_n(x) \cdot w(x) dx \neq 0.$$

Ma poichè $\deg(q_m) < n$, essendo $(p_n, p)_{2,w} = 0$ per ogni polinomio p di grado strettamente inferiore a n , allora

$$\int_a^b q_m(x) \cdot p_n(x) \cdot w(x) dx = 0$$

il che è assurdo. ■

Seconda dimostrazione (simile alla prima ma eseguita durante il corso). Siano $x_1, \dots, x_m$ tutti gli zeri di ϕ_n interni ad (a, b) con molteplicità rispettivamente $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Di conseguenza, per qualche numero a_n abbiamo

$$\phi_n(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k} \right) r_{n-m}(x)$$

avendo supposto $(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k}) \equiv 1$ se non ci sono zeri interni ad (a, b) . Il polinomio r_{n-m} per costruzione non ha zeri in (a, b) e quindi non si annulla mai ed essendo una funzione continua ha segno costante.

Consideriamo il polinomio

$$q(x) = \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\text{mod}_2(\alpha_k)} \right).$$

Se uno zero di ϕ_n ha molteplicità dispari ma maggiore di 1 o uno almeno ha molteplicità pari o esiste uno zero complesso non in (a, b) , è facile osservare che il grado di q è minore di n . Osserviamo ora che qualsiasi sia un numero naturale, $\alpha_k + \text{mod}_2(\alpha_k)$ è un numero pari.

Di conseguenza avendo $\left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k + \text{mod}_2(\alpha_k)} \right) r_{n-m}(x)$ segno costante e non coincidente col polinomio nullo,

$$\begin{aligned}
 0 &= (\phi_n, q) \\
 &= \int_a^b \phi_n(x) q(x) w(x) dx \\
 &= \int_a^b a_n \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k} \right) r_{n-m}(x) \cdot \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\text{mod}_2(\alpha_k)} \right) w(x) dx \\
 &= \int_a^b a_n \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\alpha_k + \text{mod}_2(\alpha_k)} \right) r_{n-m}(x) w(x) dx \neq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

da cui la contraddizione. Potrebbe venire il dubbio su perchè qualche non possa essere a o b . Nella dimostrazione avrebbe quale unico effetto che r_{n-m} si annulla in a o b , rimanendo di segno costante in (a, b) . Siccome l'integrale di due funzioni non cambia se sono uguali a meno di un insieme trascurabile di punti, questo effetto è del tutto inessenziale.

La conclusione è che il polinomio ortogonale p_n ha n radici distinte e semplici, interne ad (a, b) . ■

Vediamo ora il Teorema di Clenshaw, che stabilisce a partire dai polinomi ortogonali ϕ_0, ϕ_1 di grado 0 e 1 rispettivamente come calcolare ricorsivamente la famiglia di polinomi ortogonali.

Teorema 2.2 Sia $\{\phi_k\}_{k=0,\dots,n}$ una famiglia triangolare di polinomi ortogonali in $[a, b]$ rispetto ad una funzione peso w . Allora per $n \geq 1$

$$\phi_{n+1}(x) = \alpha_n(x - \beta_n)\phi_n(x) - \gamma_n\phi_{n-1}(x)$$

dove, detto a_n il coefficiente di grado massimo di ϕ_n , si ha

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{2}$$

$$\beta_n = \frac{(x\phi_n, \phi_n)_{2,w}}{(\phi_n, \phi_n)_{2,w}} \tag{3}$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n(x\phi_{n-1}, \phi_n)_{2,w}}{(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w}} \tag{4}$$

Dimostrazione: Facoltativa. Per qualche $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, q_{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}$ abbiamo

$$\phi_{n+1}(x) = \alpha_n(x - \beta_n)\phi_n(x) - \gamma_n\phi_{n-1}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} c_k\phi_k(x).$$

Essendo

$$(\phi_{n+1}, \phi_k)_{2,w} = 0, \quad k < n+1$$

necessariamente, per la bilinearità del prodotto scalare,

$$\begin{aligned}
 (\phi_{n+1}, \phi_j)_{2,w} &= (\alpha_n(x - \beta_n)\phi_n - \gamma_n\phi_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k\phi_k, \phi_j)_{2,w} \\
 &= (\alpha_n(x - \beta_n)\phi_n, \phi_j)_{2,w} - (\gamma_n\phi_{n-1}, \phi_j)_{2,w} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k(\phi_k, \phi_j)_{2,w} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Se

- se $j \leq n-2$, abbiamo, essendo il grado di $\alpha_n(x - \beta_n)\phi_j$ uguale a $j+1 \leq n-1 < n$, $(\phi_{n+1}, \phi_j)_{2,w} = 0$, sia

$$\sum_{k=0}^{n-2} c_k(\phi_k, \phi_j)_{2,w} = c_j,$$

sia

$$(\gamma_n\phi_{n-1}, \phi_j)_{2,w} = 0$$

come pure

$$\begin{aligned}
 (\alpha_n(x - \beta_n)\phi_n, \phi_j)_{2,w} &= \int_a^b (\alpha_n(x - \beta_n)\phi_n(x)) \cdot \phi_j(x) w(x) dx \\
 &= \int_a^b \phi_n(x) \cdot (\alpha_n(x - \beta_n)\phi_j(x)) w(x) dx \\
 &= (\phi_n, \alpha_n(x - \beta_n)\phi_j)_{2,w} \\
 &= 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

per cui da (5) $c_j = 0$ per $j = 0, \dots, n-2$. Di conseguenza

$$\phi_{n+1}(x) = \alpha_n(x - \beta_n)\phi_n(x) - \gamma_n\phi_{n-1}(x). \quad (7)$$

- da un confronto dei coefficienti di grado massimo nella formula ricorsiva di Clenshaw si deduce subito il valore di α_n .
- se $j = n$, abbiamo $(\gamma_n\phi_{n-1}, \phi_n)_{2,w} = 0$, $((\phi_{n+1}, \phi_n)_{2,w} = 0$ e quindi

$$0 = (\alpha_n(x - \beta_n)\phi_n, \phi_n)_{2,w}$$

per cui, da $\alpha_n \neq 0$ visto che $n-1 < \deg(\phi_n) = n$ e $(\phi_n, \phi_n)_{2,w} > 0$, ricaviamo

$$(x\phi_n, \phi_n)_{2,w} = (\beta_n\phi_n, \phi_n)_{2,w} = \beta_n(\phi_n, \phi_n)_{2,w}$$

$$\beta_n = \frac{(x\phi_n, \phi_n)_{2,w}}{(\phi_n, \phi_n)_{2,w}}.$$

- se $j = n-1$, da (7), $(\phi_n, \phi_{n-1})_{2,w} = 0$, $((\phi_{n+1}, \phi_{n-1})_{2,w} = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}
 0 &= (\alpha_n(x - \beta_n)\phi_n, \phi_{n-1})_{2,w} - \gamma_n(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w} \\
 &= \alpha_n(x\phi_n, \phi_{n-1})_{2,w} - \alpha_n\beta_n(\phi_n, \phi_{n-1})_{2,w} - \gamma_n(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w} \\
 &= \alpha_n(x\phi_n, \phi_{n-1})_{2,w} - \gamma_n(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w} \quad (8)
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n(x\phi_n, \phi_{n-1})_{2,w}}{(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w}}.$$

References

- [1] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
- [2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, (2001).
- [3] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, (1990).
- [4] G. Dahlquist e A. Bjorck, *Numerical methods*, Dover, (2003).
- [5] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover publications, 1970.
- [6] MathWorld at Wolfram, (Gegenbauer polynomial),
<http://mathworld.wolfram.com/GegenbauerPolynomial.html>.
- [7] MathWorld at Wolfram, (Jacobi polynomial),
<http://mathworld.wolfram.com/JacobiPolynomial.html>.
- [8] Wikipedia, (Norma matriciale),
http://it.wikipedia.org/wiki/Norma_matriciale.
- [9] Wikipedia, (Orthogonal polynomials),
http://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_polynomials.
- [10] Wikipedia, (Polinomi di Chebyshev),
http://it.wikipedia.org/wiki/Polinomi_di_Chebyshev.
- [11] Wikipedia, (Polinomi Ortogonali),
http://it.wikipedia.org/wiki/Polinomi_ortogonali.
- [12] Wikipedia, (Polinomi di Hermite),
http://it.wikipedia.org/wiki/Polinomi_di_Hermite.
- [13] Wikipedia, (Polinomi di Laguerre),
http://it.wikipedia.org/wiki/Polinomi_di_Laguerre.
- [14] Wikipedia, (Polinomi di Legendre),
http://it.wikipedia.org/wiki/Polinomi_di_Legendre.