Interpolazione polinomiale

Sia $\mathbb{P}_n$ lo sp. vett. dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}$. Date $n+1$ coppie (x_0,y_0), ..., (x_n,y_n) con $x_j \neq x_k$ se $j \neq k$, si calcoli $p_n \in \mathbb{P}_n$ t.c.

$$p_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n$$

Tali polinomi p_n si dicono **interpolare** $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ oppure interpolare i valori y_k nei nodi x_k.

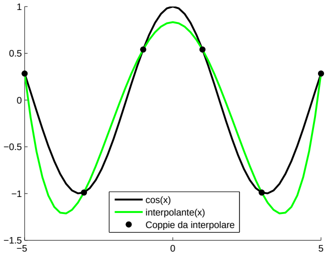

Figura: Grafico che illustra l'interpolazione di $\cos(x)$ in $[-5, 5]$ su nodi equispaziati $x_k = -5 + 2 \cdot k$ $(k = 0, \ldots, 5)$.

Questioni legate all'interpolazione polinomiale

Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio?

Questioni legate all'interpolazione polinomiale

Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio?
- Se esiste è unico?

Questioni legate all'interpolazione polinomiale

Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio?
- Se esiste è unico?
- Se esiste ed è unico, è possibile calcolarlo?

Questioni legate all'interpolazione polinomiale

Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio?
- Se esiste è unico?
- Se esiste ed è unico, è possibile calcolarlo?
- Se $f \in C([a, b])$, esistono $\{x_k\}_{k=0,\ldots,n} \in [a, b]$ che rappresentano una scelta migliore di altre, nel senso che il polinomio interpolante $(x_k, f(x_k))$ $(k = 0, \ldots, n)$ approssima *meglio* la funzione?

Qualche esempio

- **n=1**: dati due punti (x_0,y_0), (x_1,y_1) trovare un polinomio di grado 1 che *passi per i due punti*. Equivale a dire: calcolare **retta** che passa per due punti assegnati.

Qualche esempio

- **n=1**: dati due punti (x_0,y_0), (x_1,y_1) trovare un polinomio di grado 1 che *passi per i due punti*. Equivale a dire: calcolare **retta** che passa per due punti assegnati.
- **n=2**: dati tre punti (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) trovare un polinomio di grado 2 che *passi per i tre punti*. Equivale a dire: calcolare **parabola**

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

che passa per tre punti assegnati.

Polinomi di Lagrange ed esistenza polinomio interpolatore

Consideriamo i **polinomi di Lagrange** $L_k \in \mathbb{P}_n$ (rel. $\{x_k\}_{k=0,\ldots,n}$)

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}$$

Detto $\delta_{k,j}$ l'operatore di Kronecker, $L_k(x_s) = \delta_{k,s}$ cioè

$$\begin{aligned} L_k(x_k) &= 1 \\ L_k(x_j) &= 0, \text{ se } k \neq j. \end{aligned}$$

Allora ha le proprietà desiderate il polinomio p_n di grado n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

poichè $p_n(x_s) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_s) = \sum_{k=0}^{n} y_k \delta_{k,s} = y_s$ per $s = 0, \ldots, n$. Si noti che $\{L_k\}_{k=0,\ldots,n}$ è base di $\mathbb{P}_n$.

Unicità polinomio interpolatore

Supponiamo $p_n, q_n \in \mathbb{P}_n$ siano tali che

$$p_n(x_k) = q_n(x_k) = y_k, \;\; k = 0, \ldots, n.$$

Allora $s_n = p_n - q_n \in \mathbb{P}_n$ ed è

$$s_n(x_k) = p_n(x_k) - q_n(x_k) = 0, \;\; k = 0, \ldots, n$$

per cui

$$s_n(x) = \alpha(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Se $\alpha \neq 0$ allora $s_n \in \mathbb{P}_{n+1}$, cosa assurda. Quindi $\alpha = 0$, il che implica $p_n - q_n = s_n = 0$ cioè $p_n = q_n$. Deduciamo così che il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ interpolante $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ (con $x_k \neq x_s$ se $k \neq s$) non solo esiste ma è pure unico ed è

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x).$$

Esempio

Calcoliamo il polinomio di grado 2 che assume nei nodi $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ rispettivamente i valori $f_0 = -2$, $f_1 = 11$, $f_2 = 17$.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{15} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-2))(x-3)}{(1-(-2))(1-3)} = \frac{(x+2)(x-3)}{-6} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-2))(x-1)}{(3-(-2))(3-1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{10}
\end{aligned}$$

Si vede subito che $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{P}_2$ che

$$L_0(x_0) = L_0(-2) = 1, L_0(x_1) = L_0(1) = 0, L_0(x_2) = L_0(3) = 0$$

$$L_1(x_1) = L_1(1) = 1, L_1(x_0) = L_1(-2) = 0, L_1(x_2) = L_1(3) = 0$$

$$L_2(x_2) = L_2(3) = 1, L_2(x_0) = L_2(-2) = 0, L_2(x_1) = L_2(1) = 0$$

Esempio

Posto $p_2(x) = -2\,L_0(x) + 11\,L_1(x) + 17\,L_2(x)$ abbiamo

$$p(x_0) = -2\,L_0(x_0) + 11\,L_1(x_0) + 17\,L_2(x_0) = -2 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 0 = -2 = y_0,$$

$$p(x_1) = -2\,L_0(x_1) + 11\,L_1(x_1) + 17\,L_2(x_1) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 17 \cdot 0 = 11 = y_1,$$

$$p(x_2) = -2\,L_0(x_2) + 11\,L_1(x_2) + 17\,L_2(x_2) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 1 = 17 = y_2.$$

cioè p_2 interpola le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,2}$.

Utilizzo polinomio interpolatore

Usualmente i dati y_k corrispondono alla valutazione di una funzione $f \in C([a,b])$ in nodi $x_k \in [a,b]$. Si desidera che il polinomio interpolatore p_n approssimi la funzione f. Risulta quindi importante stimare l'errore compiuto. A tal proposito vale il seguente teorema detto **del resto**.

Teorema. Sia $f \in C^{(n+1)}(a,b)$ e sia p_n il polinomio che interpola le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ con $x_k \neq x_s$ se $k \neq s$. Allora

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \tag{1}$$

dove $\xi \in \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ il più piccolo intervallo aperto contenente $x_0, \ldots, x_n$.

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- **Equispaziati**: $x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- **Equispaziati**: $x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.
- **Gauss-Chebyshev (scalati)**: fissato n, i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n \tag{2}$$

con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right),\ k = 0, \ldots, n; \tag{3}$$

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- **Equispaziati**: $x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.
- **Gauss-Chebyshev (scalati)**: fissato n, i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n \tag{2}$$

con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right),\ k = 0, \ldots, n; \tag{3}$$

- **Gauss-Chebyshev-Lobatto (scalati)**: fissato n, i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n \tag{4}$$

con

$$t_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n. \tag{5}$$

Convergenza ed esempio di Runge

L'interpolante polinomiale in un set di nodi prefissati non converge sempre puntualmente alla funzione da approssimare. Infatti, per la **funzione di Runge**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in [-5, 5] \tag{6}$$

si ha che il polinomio interpolatore p_n in nodi equispaziati non converge (puntualmente) a f. Fortunatamente ciò non succede per i nodi di Gauss-Chebyshev(-Lobatto).

Purtroppo, per un teorema dovuto a **Faber**, esistono comunque funzioni continue f (ma non C^1!!) tali che l'interpolante p_n nei nodi di Gauss-Chebyshev(-Lobatto) non converge puntualmente a f. Questo teorema è generalizzabile ad una famiglia arbitraria di nodi.

Esempio di Runge

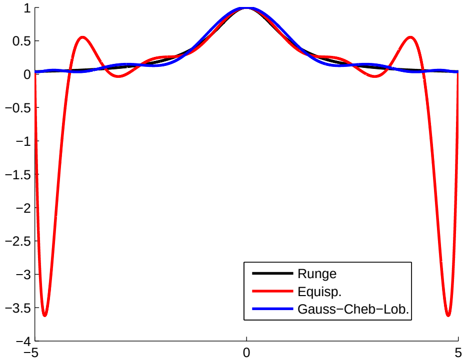

Figura: Grafico della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5, 5]$ e delle sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Gauss-Chebyshev-Lobatto.

Esempio di Runge

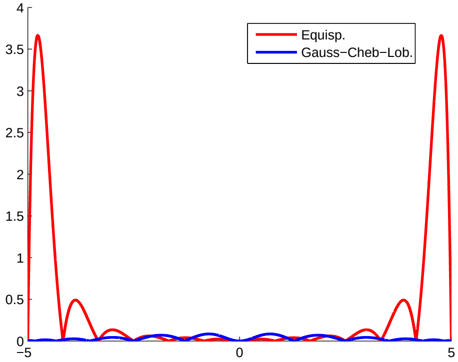

Figura: Grafico errore della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5,5]$ con le sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Esempio di Runge

Se $p_n \in \mathbb{P}_n$ è polinomio intp. nei nodi eqsp. o di G.-C.-L., vediamo al variare del grado quali sono gli errori $\|1/(1+x^2) - p_n(x)\|_\infty$:

Deg	Err. Eqs.	Err. GCL
2	$6.46e-001$	$9.62e-001$
3	$7.07e-001$	$6.46e-001$
4	$4.38e-001$	$8.29e-001$
5	$4.33e-001$	$4.58e-001$
6	$6.09e-001$	$6.39e-001$
7	$2.47e-001$	$3.11e-001$
8	$1.04e+000$	$4.60e-001$
9	$2.99e-001$	$2.04e-001$
10	$1.92e+000$	$3.19e-001$
11	$5.57e-001$	$1.32e-001$
12	$3.66e+000$	$2.18e-001$
13	$1.07e+000$	$8.41e-002$
14	$7.15e+000$	$1.47e-001$

Importante: l'esempio di Runge mostra che esiste una funzione $C^{\infty}([-5,5])$ tale che al crescere del numero di nodi equispaziati n non sia garantita nemmeno la convergenza puntuale!

D'altra parte sussiste il seguente teorema dovuto a Bernstein:

Teorema. Se $f \in C^1([a,b])$ con $[a,b]$ intervallo limitato e chiuso della retta reale, il polinomio p_n di grado n di interpolazione della funzione f nei nodi di Chebyshev-Gauss di grado $n+1$ converge uniformemente a f su $[a,b]$, per $n \to \infty$. Se inoltre $f \in C^2([a,b])$ si ha la seguente stima dell'errore

$$\|f - p_n\|_{\infty} = O(n^{-1/2}).$$

Interpolazione di Newton

Supponiamo note le coppie $(x_0, f(x_0))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ con $x_k \neq x_j$ se $k \neq j$. Allora posto $w_k(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1})$,

$$f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_s] = \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_s] - f[x_j, \ldots, x_{s-1}]}{x_s - x_j}, \quad f[x_j] = f(x_j)$$

si dimostra che il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ interpolante le coppie citate è

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k(x) f[x_0, \ldots, x_k].$$

Il vantaggio di questa scrittura è che se aggiungiamo un nuovo punto da interpolare, diciamo $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} w_k(x) f[x_0, \ldots, x_k] = \sum_{k=0}^{n} w_k(x) f[x_0, \ldots, x_k] + \\ &+ w_{n+1} f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = p_n(x) + w_{n+1} f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \end{aligned}$$

Differenze divise

Le quantità $f[x_j,\ldots,x_s]$ si chiamano **differenze divise**. Di solito le quantità utili $f[x_0,\ldots,x_k]$ per il calcolo del polinomio interpolatore, si scrivono per via tabulare. Esempio:

$$\left|\begin{array}{c|ccccc} x_0 & f[x_0] & & & & \\ x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] & & & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ x_n & f[x_n] & f[x_{n-1},x_n] & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \ldots & f[x_0,\ldots,x_n] \end{array}\right.$$

Se vogliamo intp. le coppie dell'esempio precedente, cioè (x,y) ove

$$x = [-2; 1; 3], y = [-2; 11; 17]$$

otteniamo la tabella

$$\begin{vmatrix} -2 & & \\ 11 & 4.\overline{3} & \\ 17 & 3.0 & -0.2\overline{6} \end{vmatrix}$$

e il polinomio intp. p_2 risulta

$$p(x) = -2 + 4.\overline{3} \cdot (x+2) - 0.2\overline{6} \cdot (x+2)(x-1)$$

In effetti $p_2(-2) = -2$, $p_2(1) = -2 + 4.\overline{3} \cdot 3 - 0.2\overline{6} \cdot 0 = 11$ e $p_2(3) = -2 + 4.\overline{3} \cdot 5 - 0.2\overline{6} \cdot 10 = -2 + 21.\overline{6} - 2.\overline{6} = 17$.

Interpolazione in Matlab/Octave

Supponiamo di dover interpolare le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ e supponiamo sia $\mathbf{x} = [x_0, \ldots, x_n]$, $\mathbf{y} = [y_0, \ldots, y_n]$. I coefficienti del polinomio interpolatore sono ottenibili dal comando `polyfit`. A tal proposito l'help di Matlab suggerisce:

```
>> help polyfit

 POLYFIT Fit polynomial to data.

 POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a
 polynomial P(X) of degree N that fits the
 data, P(X(I))~=Y(I), in a least-squares sense.
 ...
 See also POLY, POLYVAL, ROOTS.

>>
```

Interpolazione in Matlab/Octave

Per capire qualcosa in più eseguiamo il seguente codice

```
>> x=[-2 1 3];
>> y=[-2 11 17];
>> a=polyfit(x,y,2)
a =
    -0.2667     4.0667     7.2000
>>
```

In effetti, calcolando manualmente il polinomio interpolatore si ha, semplificando quando ottenuto coi polinomi di Lagrange che è

$$p_2(x) = (-4/15) \cdot x^2 + (61/15) \cdot x + (36/5) \approx 0.2\overline{6}x^2 + 4.0\overline{6}x + 7.2.$$

Quindi, se $a = (a_k)_{k=1,\ldots,3}$, abbiamo $p_2(x) = a_1\, x^2 + a_2\, x + a_3$ e più in generale, se p_n è il polinomio interpolatore di grado n, e $a = (a_k)$ è il vettore ottenuto utilizzando `polyfit`, allora

$$p_n(x) = a_1\, x^n + a_2\, x^{n-1} + \ldots + a_{n+1}.$$

Per valutare in un vettore di ascisse $\mathbf{X} = [X_k]_{k=1,\ldots,m}$ un polinomio

$$p_n(x) = a_1\, x^n + a_2\, x^{n-1} + \ldots + a_{n+1}$$

i cui coefficienti sono i coeff. di in un vettore $\mathbf{P} = [a_k]_{k=1,\ldots,n+1}$ usiamo il comando `polyval`. Dall'help:

```
>> help polyval
To get started, select "MATLAB Help" from the
Help menu.
POLYVAL Evaluate polynomial.
Y = POLYVAL(P,X), when P is a vector of length
N+1 whose elements are the coefficients of a
polynomial, is the value of the polynomial
evaluated at X.
...
Y=P(1)*X^N+P(2)*X^(N-1)+...+P(N)*X+P(N+1)
>>
```

Dati i vettori $\mathbf{x} = [x_k]_{k=1,\ldots,n}$, $\mathbf{y} = [y_k]_{k=1,\ldots,n}$ sia $p_{n-1}(x_k) = y_k$, per $k = 1, \ldots, n$. Sia $\mathbf{s} = [s_k]_{k=1,\ldots,m}$ e desideriamo calcolare $\mathbf{t} = [t_k]_{k=1,\ldots,m}$ per cui $t_k = p_{n-1}(s_k)$, per ogni k. A tal proposito introduciamo la funzione:

```
function t=interpol(x,y,s)

m=length(x)-1;
coeff=polyfit(x,y,m);
t=polyval(coeff,s);
```

Esempio di Runge

Interpoliamo la funzione di Runge $1/(1+x^2)$ in $[-5, 5]$ sia su nodi equispaziati che di tipo Gauss-Chebyshev-Lobatto. A tal proposito definiamo la funzione di Runge

```
function [fx]=runge(x)
fx=1./(x.^2+1);
```

e una funzione che genera n nodi di Gauss-Chebyshev-Lobatto nell'intervallo $[a, b]$:

```
function xc=cheb(a,b,n)
for m=1:1:n
    xc(m)=(a+b)/2-((b-a)/2)*cos(pi*(m-1)/(n-1));
end
```

Esempio di Runge

Quindi scriviamo il file `esperimento.m`

```
n=11;   % GRADO.
% NODI TEST.
s=-5:10/(10*n):5;
% NODI EQSP.: ASCISSE/ORDINATE + INTP.TEST.
x=-5:10/n:5; y=runge(x);
t=interpol(x,y,s);
% NODI GCL.: ASCISSE/ORDINATE+INTP.TEST.
xgcl=cheb(-5,5,n+1); ygcl=runge(xgcl);
tt =interpol(xgcl, ygcl,s);
% PLOT INTP. VS RUNGE.
plot(s,runge(s),s,t,s,tt);
% ERRORI ASSOLUTI.
ee=norm(runge(s)-t,inf);ec=norm(runge(s)-tt,inf);
fprintf('\n\t[ERR.][EQS]:%2.2e  [GCL]:%2.2e',ee,ec);
```

Esempio di Runge: risultati

Al variare di n:

- Otteniamo la tabella degli errori vista in precedenza.

Esempio di Runge: risultati

Al variare di n:

- Otteniamo la tabella degli errori vista in precedenza.
- Notiamo che la scelta di n non può essere eccessiva. Provare $n = 30$!!

Esempio di Runge: risultati

Al variare di n:

- Otteniamo la tabella degli errori vista in precedenza.
- Notiamo che la scelta di n non può essere eccessiva. Provare $n = 30$!!
- Risulta evidente che non sussiste la convergenza puntuale al crescere di n, di p_n a $1/(1 + x^2)$.