Interpolazione polinomiale

Sia $\mathbb{P}_n$ l'insieme dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}$. Date $n+1$ coppie (x_0,y_0), ..., (x_n,y_n) con $x_j \neq x_k$ qualora $j \neq k$, si calcoli $p_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$p_n(x_k) = y_k, \;\; k = 0, \ldots, n$$

Tali polinomi p_n si dicono **interpolare** $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$. Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio?

Interpolazione polinomiale

Sia $\mathbb{P}_n$ l'insieme dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}$. Date $n+1$ coppie (x_0,y_0), ..., (x_n,y_n) con $x_j \neq x_k$ qualora $j \neq k$, si calcoli $p_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$p_n(x_k) = y_k,\ \ k = 0, \ldots, n$$

Tali polinomi p_n si dicono **interpolare** $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$. Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio?
- Se esiste è unico?

Interpolazione polinomiale

Sia $\mathbb{P}_n$ l'insieme dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}$. Date $n+1$ coppie (x_0,y_0), ..., (x_n,y_n) con $x_j \neq x_k$ qualora $j \neq k$, si calcoli $p_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$p_n(x_k) = y_k,\ \ k = 0, \ldots, n$$

Tali polinomi p_n si dicono **interpolare** $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$. Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio?
- Se esiste è unico?
- Se esiste ed è unico, è possibile calcolarlo?

Interpolazione polinomiale

Sia $\mathbb{P}_n$ l'insieme dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}$. Date $n+1$ coppie (x_0,y_0), ..., (x_n,y_n) con $x_j \neq x_k$ qualora $j \neq k$, si calcoli $p_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$p_n(x_k) = y_k, \ \ k = 0, \ldots, n$$

Tali polinomi p_n si dicono **interpolare** $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$. Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio?
- Se esiste è unico?
- Se esiste ed è unico, è possibile calcolarlo?
- Se $f \in C([a,b])$, esistono $\{x_k\}_{k=0,\ldots,n} \in [a,b]$ che rappresentano una scelta migliore di altre?

Qualche esempio

- **n=1**: dati due punti (x_0, y_0), (x_1, y_1) trovare un polinomio di grado 1 che *passi per i due punti*. Equivale a dire: calcolare **retta** che passa per due punti assegnati.

Qualche esempio

- **n=1**: dati due punti (x_0,y_0), (x_1,y_1) trovare un polinomio di grado 1 che *passi per i due punti*. Equivale a dire: calcolare **retta** che passa per due punti assegnati.
- **n=2**: dati tre punti (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) trovare un polinomio di grado 2 che *passi per i tre punti*. Equivale a dire: calcolare **parabola**

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

che passa per tre punti assegnati.

Esempio di interpolazione

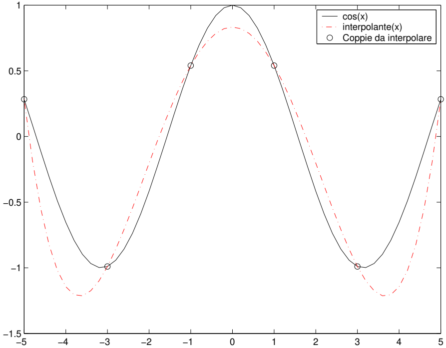

Figura: Grafico che illustra l'interpolazione su nodi equispaziati (la funzione ha la linea continua, il polinomio interpolatore è tratteggiato, i nodi di interpolazioni coi cerchietti).

Polinomi di Lagrange ed esistenza polinomio interpolatore

Consideriamo i **polinomi di Lagrange** $L_k \in \mathbb{P}_n$ (rel. $\{x_k\}_{k=0,\ldots,n}$)

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)}$$

Detto $\delta_{k,j}$ l'operatore di Kronecker, $L_k(x_s) = \delta_{k,s}$ cioè

$$\begin{aligned} L_k(x_k) &= 1 \\ L_k(x_j) &= 0, \text{ se } k \neq j. \end{aligned}$$

Allora ha le proprietà desiderate il polinomio p_n di grado n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

poichè $p_n(x_s) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_s) = \sum_{k=0}^{n} y_k \delta_{k,s} = y_s$ per $s = 0, \ldots, n$.

Unicità polinomio interpolatore

Supponiamo $p_n, q_n \in \mathbb{P}_n$ siano tali che

$$p_n(x_k) = q_n(x_k) = y_k, \;\; k = 0, \ldots, n.$$

Allora $s_n = p_n - q_n \in \mathbb{P}_n$ ed è

$$s_n(x_k) = p_n(x_k) - q_n(x_k) = 0, \;\; k = 0, \ldots, n$$

per cui

$$s_n = \alpha(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Se $\alpha \neq 0$ allora $s_n \in \mathbb{P}_{n+1}$, cosa assurda. Quindi $\alpha = 0$, il che implica $p_n - q_n = s_n = 0$ cioè $p_n = q_n$. Deduciamo così che il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ interpolante $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ (con $x_k \neq x_s$ se $k \neq s$) non solo esiste ma è pure unico ed è

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x).$$

Esempio

Calcoliamo il polinomio di grado 2 che assume nei nodi $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ rispettivamente i valori $f_0 = -2$, $f_1 = 11$, $f_2 = 17$.

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{15} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-2))(x-3)}{(1-(-2))(1-3)} = \frac{(x+2)(x-3)}{-6} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-2))(x-1)}{(3-(-2))(3-1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{10}
\end{aligned}
$$

Si vede subito che L_0, L_1, $L_2 \in \mathbb{P}_2$ che

$$L_0(x_0) = L_0(-2) = 1, L_0(x_1) = L_0(1) = 0, L_0(x_2) = L_0(3) = 0$$

$$L_1(x_1) = L_1(1) = 1, L_1(x_0) = L_1(-2) = 0, L_1(x_2) = L_1(3) = 0$$

$$L_2(x_2) = L_2(3) = 1, L_2(x_0) = L_2(-2) = 0, L_2(x_1) = L_2(1) = 0$$

Esempio

Posto $p_2(x) = -2\, L_0(x) + 11\, L_1(x) + 17\, L_2(x)$ abbiamo

$$p(x_0) = -2\, L_0(x_0) + 11\, L_1(x_0) + 17\, L_2(x_0) = -2 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 0 = -2 = y_0,$$

$$p(x_1) = -2\, L_0(x_1) + 11\, L_1(x_1) + 17\, L_2(x_1) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 17 \cdot 0 = 11 = y_1,$$

$$p(x_2) = -2\, L_0(x_2) + 11\, L_1(x_2) + 17\, L_2(x_2) = -2 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 17 \cdot 1 = 17 = y_2.$$

cioè p_2 interpola le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,2}$.

Utilizzo polinomio interpolatore

Usualmente i dati y_k corrispondono alla valutazione di una funzione $f \in C([a,b])$ in nodi $x_k \in [a,b]$. Si desidera che il polinomio interpolatore p_n approssimi la funzione f. Risulta quindi importante stimare l'errore compiuto. A tal proposito vale il seguente teorema detto **del resto**.

Teorema. Sia $f \in C^{(n+1)}(a,b)$ e sia p_n il polinomio che interpola le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ con $x_k \neq x_s$ se $k \neq s$. Allora

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \quad (1)$$

dove $\xi \in \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ il più piccolo intervallo aperto contenente $x_0, \ldots, x_n$.

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- **Equispaziati**: $x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- **Equispaziati**: $x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.
- **Gauss-Chebyshev (scalati)**: fissato n, i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k, \;\; k = 0, \ldots, n \tag{2}$$

con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right), \; k = 0, \ldots, n; \tag{3}$$

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- **Equispaziati**: $x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.
- **Gauss-Chebyshev (scalati)**: fissato n, i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n \tag{2}$$

con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right),\ k = 0, \ldots, n; \tag{3}$$

- **Gauss-Chebyshev-Lobatto (scalati)**: fissato n, i punti sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n \tag{4}$$

con

$$t_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n. \tag{5}$$

Convergenza ed esempio di Runge

L'interpolante polinomiale in un set di nodi prefissati non converge sempre puntualmente alla funzione da approssimare. Infatti, per la **funzione di Runge**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in [-5, 5] \tag{6}$$

si ha che il polinomio interpolatore p_n in nodi equispaziati non converge (puntualmente) a f. Fortunatamente ciò non succede per i nodi di Gauss-Chebyshev.

Purtroppo, per un teorema dovuto a **Faber**, esistono comunque funzioni continue f (ma non C^1!!) tali che l'interpolante p_n nei nodi di Gauss-Chebyshev non converge puntualmente a f. Questo teorema è generalizzabile ad una famiglia arbitraria di nodi.

Esempio di Runge

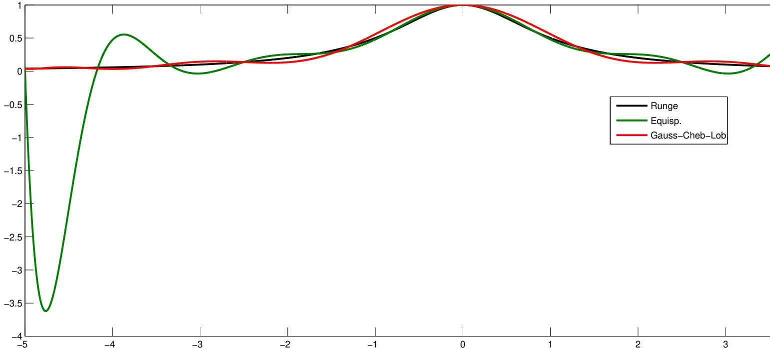

Figura: Grafico della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5,5]$ e delle sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Chebyshev-Gauss-Lobatto (rispettivamente linea continua, tratteggiata e a puntini, come da legenda).

Esempio di Runge

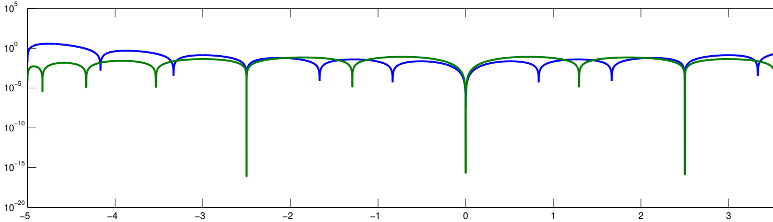

Figura: Grafico errore della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5, 5]$ con le sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Chebyshev-Gauss-Lobatto (rispettivamente linea continua, tratteggiata e a puntini, come da legenda).