Equazioni non lineari: esempi.

- Risoluzione $f(x) = 0$ con $x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$.

Equazioni non lineari: esempi.

- Risoluzione $f(x) = 0$ con $x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$.
- Esempio 1: equazioni polinomiali $p_N(x) = 0$ con p_N polinomio di grado N. Possibili problemi (nessuna soluzione in $\mathbb{R}$, soluzioni multiple).

Equazioni non lineari: esempi.

- Risoluzione $f(x) = 0$ con $x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$.
- Esempio 1: equazioni polinomiali $p_N(x) = 0$ con p_N polinomio di grado N. Possibili problemi (nessuna soluzione in $\mathbb{R}$, soluzioni multiple).
- Esempio 2: $f(x) = \sin(x) - x$. Soluzione unica poichè f decrescente (vedi derivata).

Equazioni non lineari: convergenza e ordine convergenza

- Metodo iterativo: genera successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che si desidera convergere a x^* tale che $f(x^*) = 0$.

Equazioni non lineari: convergenza e ordine convergenza

- Metodo iterativo: genera successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che si desidera convergere a x^* tale che $f(x^*) = 0$.
- **Ordine di convergenza** del metodo iterativo: sia $\{x_k\}$ una successione convergente ad x^* e sia $e_k = x_k - x^*$ l'errore al passo k. Se esiste un numero $p > 0$ e una costante $C \neq 0$ tale che
$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$
allora p è chiamato *ordine di convergenza* della successione e C è la *costante asintotica di errore*. Per $p = 1$ la convergenza di dice **lineare**, per $p = 2$ si dice **quadratica**.

Equazioni non lineari: esempio ordine di convergenza

Supponiamo

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{10}, \; |e_0| = 1$$

o equivalentemente

$$|e_{k+1}| = \frac{1}{10} |e_k|^p, \; |e_0| = 1.$$

Il metodo ha ordine di convergenza p visto che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{10},$$

- $p = 1$: $e_0 = 1$, $e_1 = 1/10$, $e_2 = 1/100$, $e_3 = 1/1000$, $\ldots$.

Supponiamo

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{10}, \ |e_0| = 1$$

o equivalentemente

$$|e_{k+1}| = \frac{1}{10}|e_k|^p, \ |e_0| = 1.$$

Il metodo ha ordine di convergenza p visto che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{10},$$

- $p = 1$: $e_0 = 1$, $e_1 = 1/10$, $e_2 = 1/100$, $e_3 = 1/1000$, $\ldots$.
- $p = 2$: $e_0 = 1$, $e_1 = 1/10$, $e_2 = 1/1000$, $e_3 = 1/10^7, \ldots$.

Equazioni non lineari: esempio ordine di convergenza

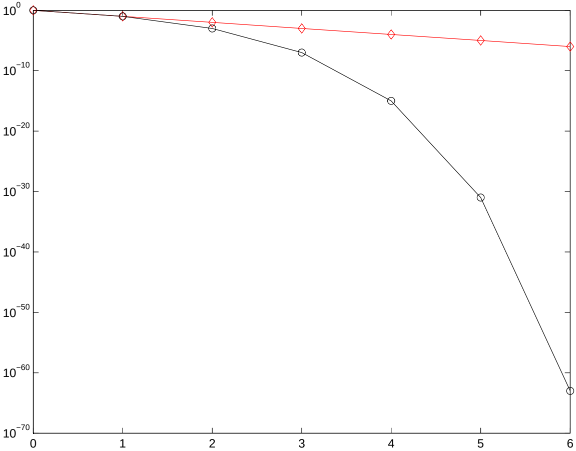

Figura: Grafico che illustra l'errore di un metodo con convergenza $p = 1$ (in rosso a rombi) e $p = 2$ (in nero a cerchietti), per $C = 1/10$ ed $e_0 = 1$.

Metodo bisezione: definizione

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Il **metodo di bisezione** genera una successione di intervalli (a_k, b_k) con

- $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$,
- $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$,
- $|b_k - a_k| = \frac{1}{2}|b_{k-1} - a_{k-1}|$.

Fissate due tolleranze ϵ_1, ϵ_2 si arresta l'algoritmo quando

$$|b_k - a_k| \leq \epsilon_1 \text{ oppure } |f((a_k + b_k)/2)| \leq \epsilon_2.$$

Metodo bisezione: esempio

Operativamente dati $a \leq b$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ calcola $c = (a + b)/2$. Se $f(a) \cdot f(c) > 0$ sostituisce c ad a, viceversa sostituisce c a b, fermandosi se le condizioni d'arresto sono verificate.

Studiamo $f(x) = 0$ con $f(x) = \sin(x) - x$. Osserviamo che se $x < 0$ allora $f(x) > 0$ altrimenti $f(x) \leq 0$.

1. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.40000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.05000000$.

Metodo bisezione: esempio

Operativamente dati $a \leq b$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ calcola $c = (a + b)/2$. Se $f(a) \cdot f(c) > 0$ sostituisce c ad a, viceversa sostituisce c a b, fermandosi se le condizioni d'arresto sono verificate.

Studiamo $f(x) = 0$ con $f(x) = \sin(x) - x$. Osserviamo che se $x < 0$ allora $f(x) > 0$ altrimenti $f(x) \leq 0$.

1. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.40000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.05000000$.
2. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.12500000$

Metodo bisezione: esempio

Operativamente dati $a \leq b$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ calcola $c = (a+b)/2$. Se $f(a) \cdot f(c) > 0$ sostituisce c ad a, viceversa sostituisce c a b, fermandosi se le condizioni d'arresto sono verificate.

Studiamo $f(x) = 0$ con $f(x) = \sin(x) - x$. Osserviamo che se $x < 0$ allora $f(x) > 0$ altrimenti $f(x) \leq 0$.

1. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.40000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.05000000$.
2. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.12500000$
3. $\mathbf{a} = -0.12500000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.03750000$

Metodo bisezione: esempio

Operativamente dati $a \leq b$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ calcola $c = (a+b)/2$. Se $f(a) \cdot f(c) > 0$ sostituisce c ad a, viceversa sostituisce c a b, fermandosi se le condizioni d'arresto sono verificate.

Studiamo $f(x) = 0$ con $f(x) = \sin(x) - x$. Osserviamo che se $x < 0$ allora $f(x) > 0$ altrimenti $f(x) \leq 0$.

1. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.40000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.05000000$.
2. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.12500000$
3. $\mathbf{a} = -0.12500000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.03750000$
4. $\mathbf{a} = -0.03750000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.00625000$

Metodo bisezione: esempio

Operativamente dati $a \leq b$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ calcola $c = (a+b)/2$. Se $f(a) \cdot f(c) > 0$ sostituisce c ad a, viceversa sostituisce c a b, fermandosi se le condizioni d'arresto sono verificate.

Studiamo $f(x) = 0$ con $f(x) = \sin(x) - x$. Osserviamo che se $x < 0$ allora $f(x) > 0$ altrimenti $f(x) \leq 0$.

1. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.40000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.05000000$.
2. $\mathbf{a} = -0.30000000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.12500000$
3. $\mathbf{a} = -0.12500000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.03750000$
4. $\mathbf{a} = -0.03750000$, $\mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.00625000$
5. ...

Metodo bisezione: alcuni fatti

- Non ha una velocità di convergenza nel senso della definizione sopra definita. Esempio: se applico bisezione per risolvere $\sin(x) - x = 0$, in $[a, b] = [-3, 2]$ la successione $|e_{n+1}/e_n|$ alterna valori 1.5 e $1/6$ e quindi non converge con ordine 1.

Metodo bisezione: alcuni fatti

- Non ha una velocità di convergenza nel senso della definizione sopra definita. Esempio: se applico bisezione per risolvere $\sin(x) - x = 0$, in $[a, b] = [-3, 2]$ la successione $|e_{n+1}/e_n|$ alterna valori 1.5 e $1/6$ e quindi non converge con ordine 1.
- Usa solo il segno della funzione.

Metodo bisezione: alcuni fatti

- Non ha una velocità di convergenza nel senso della definizione sopra definita. Esempio: se applico bisezione per risolvere $\sin(x) - x = 0$, in $[a, b] = [-3, 2]$ la successione $|e_{n+1}/e_n|$ alterna valori 1.5 e $1/6$ e quindi non converge con ordine 1.
- Usa solo il segno della funzione.
- Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f \in C([a, b])$ allora converge (sempre!!) a un x^* tale che $f(x^*) = 0$.

Metodo bisezione: alcuni fatti

- Non ha una velocità di convergenza nel senso della definizione sopra definita. Esempio: se applico bisezione per risolvere $\sin(x) - x = 0$, in $[a, b] = [-3, 2]$ la successione $|e_{n+1}/e_n|$ alterna valori 1.5 e 1/6 e quindi non converge con ordine 1.
- Usa solo il segno della funzione.
- Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f \in C([a, b])$ allora converge (sempre!!) a un x^* tale che $f(x^*) = 0$.
- Il test del residuo può essere non adatto a funzioni *piatte* o con *picchi* intorno al punto cui converge.

Metodo bisezione: alcuni fatti

- Non ha una velocità di convergenza nel senso della definizione sopra definita. Esempio: se applico bisezione per risolvere $\sin(x) - x = 0$, in $[a, b] = [-3, 2]$ la successione $|e_{n+1}/e_n|$ alterna valori 1.5 e $1/6$ e quindi non converge con ordine 1.
- Usa solo il segno della funzione.
- Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f \in C([a, b])$ allora converge (sempre!!) a un x^* tale che $f(x^*) = 0$.
- Il test del residuo può essere non adatto a funzioni *piatte* o con *picchi* intorno al punto cui converge.
- Fissata una tolleranza ϵ, e due punti iniziali a, b tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (con $f \in C([a, b])$) per avere un'errore assoluto $|x_n - x^*|$ sulla soluzione x^* inferiore ad ϵ necessitano al piú

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log 2}$$

iterazioni del metodo.

Metodo Newton: interpretazione analitica

Il metodo di Newton richiede che

- f sia derivabile con continuità su un intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$;

Se $x_k \in [a, b]$ è l'ultima approssimazione del metodo, allora dalla formula di Taylor centrata in x_k abbiamo per $\xi_k \in \mathcal{I}(x**, x_k)$

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2$$

Tralasciando i termini di ordine superiore

$$0 \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k)$$

e quindi se $f^{(1)}(x_k) \neq 0$, dopo facili conti

$$x^* \approx x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f^{(1)}(x_k).$$

Metodo Newton: interpretazione analitica

Il metodo di Newton richiede che

- f sia derivabile con continuità su un intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$;
- $f^{(1)}(x) \neq 0$ in $[a, b]$.

Se $x_k \in [a, b]$ è l'ultima approssimazione del metodo, allora dalla formula di Taylor centrata in x_k abbiamo per $\xi_k \in \mathcal{I}(x **, x_k)$

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2$$

Tralasciando i termini di ordine superiore

$$0 \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k)$$

e quindi se $f^{(1)}(x_k) \neq 0$, dopo facili conti

$$x^* \approx x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f^{(1)}(x_k).$$

Metodo Newton: interpretazione geometrica

Se ben definito, il metodo di Newton genera una successione $\{x_k\}$ definita da

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f^{(1)}(x_k).$$

Sia **r** la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_k, f(x_k))$. Allora x_{k+1} è l'intersezione della retta **r** con l'asse delle ascisse, cioè la retta di equazione $y = 0$.

Metodo Newton: interpretazione geometrica

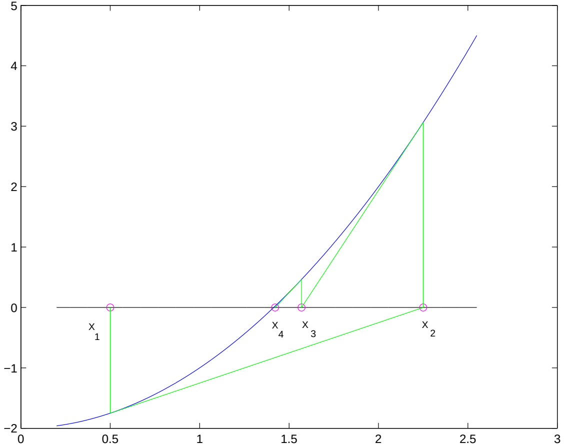

Figura: Grafico che illustra geometricamente le iterazioni del metodo Newton per il calcolo dello zero di $f(x) = x^2 - 2$.

Nel caso del metodo di Newton la convergenza non è in generale garantita. Esistono degli esempi in cui il metodo produce una successione non convergente. Ciò nonostante esistono molti teoremi che illustrano quando si è certi che il metodo converga.

- Alcuni sono detti di **convergenza locale** e dicono che se x_0 è in un intorno $\mathcal{I}$ sufficientemente piccolo della soluzione x^* allora il metodo converge ad x_*. Usualmente non sono costruttivi e non permettono di definire chiaramente $\mathcal{I}$.

Metodo Newton: convergenza

Nel caso del metodo di Newton la convergenza non è in generale garantita. Esistono degli esempi in cui il metodo produce una successione non convergente. Ciò nonostante esistono molti teoremi che illustrano quando si è certi che il metodo converga.

- Alcuni sono detti di **convergenza locale** e dicono che se x_0 è in un intorno $\mathcal{I}$ sufficientemente piccolo della soluzione x^* allora il metodo converge ad x_*. Usualmente non sono costruttivi e non permettono di definire chiaramente $\mathcal{I}$.
- Altri sono detti di **convergenza globale** e dicono che se x_0 appartiene a un ben definito intorno $\mathcal{I}$ di x^* allora il metodo converge.

Uno zero x^* si dice **semplice** se $f(x^*) = 0$ e $f^{(1)}(x^*) \neq 0$.

Teorema. Sia $x^* \in (a, b)$ uno zero semplice di $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si supponga inoltre $f \in C^2([a, b])$. Allora per $x_0 \in [a, b]$ sufficientemente vicino a x^* le iterazioni del metodo di Newton

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f^{(1)}(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sono ben definite e convergono quadraticamente a x^*.

Traccia della dimostrazione.

Sia I_1 intorno di x^* in cui $f^{(1)}$ ha segno costante (permanenza del segno).

1. Dalla formula di Taylor centrata in x_* e valutata in x_k abbiamo per $\xi_k \in \mathcal{I}(x^*, \xi_k)$, ricordando la succ. del metodo di Newton

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^*) = f(x_k) + f^{(1)}(x_k)(x^* - x_k) + f^{(2)}(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2 \\ &= f^{(1)}(x_k)(x^* - x_{k+1}) + f^{(2)}(\xi_k)(x^* - x_k)^2/2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Posto $e_k = |x^* - x_k|$ ricaviamo per
$M = \max_{x,y \in I_1} |f^{(2)}(\xi_k)|/2 \cdot |f^{(1)}(x_k)|$

$$e_{k+1} = \frac{|f^{(2)}(\xi_k)|}{2 \cdot |f^{(1)}(x_k)|} e_k^2 \leq M {e_k}^2$$

Metodo Newton: un teorema di convergenza locale (dim.)

Sia $I_2 = [x^* - \delta, x^* + \delta] \subseteq I_1$ con $M\delta < 1$. Se $x_0 \in I_2$ allora $e_0 \leq \delta$ e

$$e_1 \leq M{e_0}^2 \leq M\delta^2 \leq \delta$$

da cui per induzione ogni $x_k \in I_2$. Inoltre

$$Me_k \leq M^2{e_{k-1}}^2 = (Me_{k-1})^2 \leq \ldots \leq (Me_0)^{2^k}$$

e visto che $Me_0 \leq M\delta < 1$ abbiamo $e_k \to 0$, cioè il metodo di Newton converge quadraticamente.

Metodo Newton: un teorema di convergenza

Teorema. Sia $f \in C^2([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato. Se

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. $f^{(1)}(x) > 0$, per ogni $x \in [a, b]$;
3. $f^{(2)}(x) > 0$

allora le iterate x_k fornite dal metodo di Newton sono strettamente decrescenti e convergono all'unica soluzione x^* in $[a, b]$, per $x_0 = b$.

Metodo Newton: un teorema di convergenza globale

Teorema.

Sia $f \in C^2([a,b])$, con $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato. Se

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. $f^{(1)}(x) \neq 0$, per ogni $x \in [a,b]$;
3. $f^{(2)}(x) \geq 0$ o $f^{(2)}(x) \leq 0$, per ogni $x \in [a,b]$;
4. $|f(a)/f^{(1)}(a)| < b-a$ e $|f(b)/f^{(1)}(b)| < b-a$,

allora il metodo di Newton converge all'unica soluzione x^* in $[a,b]$, per ogni $x_0 \in [a,b]$.

Traccia della dimostrazione.

Supponiamo che

1. $f^{(2)}(x) \geq 0$ se $x \in (a, b)$.

Allora:

1. L'ultimo punto garantisce che $x_1 \in (a, b)$.

Traccia della dimostrazione.

Supponiamo che

1. $f^{(2)}(x) \geq 0$ se $x \in (a, b)$.
2. $f^{(1)}(x) > 0$ se $x \in (a, b)$.

Allora:

1. L'ultimo punto garantisce che $x_1 \in (a, b)$.
2. La formula di Taylor valutata in x^*, centrata in $x_k \in [a, b]$ e troncata al second'ordine, mostra che $0 = f(x^*) \geq f^{(1)}(x_k)(x^* - x_{k+1})$ e quindi $x^* \leq x_{k+1}$.

Traccia della dimostrazione.

Supponiamo che

1. $f^{(2)}(x) \geq 0$ se $x \in (a, b)$.
2. $f^{(1)}(x) > 0$ se $x \in (a, b)$.

Allora:

1. L'ultimo punto garantisce che $x_1 \in (a, b)$.
2. La formula di Taylor valutata in x^*, centrata in $x_k \in [a, b]$ e troncata al second'ordine, mostra che $0 = f(x^*) \geq f^{(1)}(x_k)(x^* - x_{k+1})$ e quindi $x^* \leq x_{k+1}$.
3. La formula di Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f^{(1)}(x_k)$ mostra che se $x_k > x^*$ allora $x_{k+1} < x_k$, mentre se $x_k < x^*$ allora $x_{k+1} > x_k$.

Metodo Newton: un teorema di convergenza globale (dim.)

Quindi, dal primo e secondo punto, comunque sia scelto $x_0 \in [a, b]$ abbiamo che $a < x^* \leq x_1 \leq b$. Dal secondo e terzo punto, per ogni k, $a < x^* \leq x_{k+1} < x_k \leq b$. Quindi la successione $\{x_k\}$ è decrescente e limitata, per cui ha limite L. Dalla formula del metodo di Newton, per continuità

$$\begin{aligned} L &= \lim_k x_{k+1} = \lim_k (x_k - f(x_k)/f^{(1)}(x_k)) \\ &= \lim_k x_k - \lim_k f(x_k)/f^{(1)}(x_k)) \\ &= L - \lim_k f(x_k)/\lim_k f^{(1)}(x_k)) \qquad (2) \end{aligned}$$

da cui $\lim_k f(x_k) = 0$ cioè $x_k \to x^*$.

Metodo Newton: alcuni fatti

1. Il metodo di Newton non è sempre convergente.

Metodo Newton: alcuni fatti

1. Il metodo di Newton non è sempre convergente.
2. Se converge, non è detto che l'ordine di convergenza sia $p = 2$ (conv. quadratica).

Metodo Newton: alcuni fatti

1. Il metodo di Newton non è sempre convergente.
2. Se converge, non è detto che l'ordine di convergenza sia $p = 2$ (conv. quadratica).
3. Se uno zero x^* di f è multiplo cioè $f(x) = (x - x^*)^k g(x)$ con $k > 1$ e $g \in C([a, b])$ con $g(x^*) \neq 0$ ($[a, b]$ intorno x^*)

Riferimenti bibliografici

- A. Quarteroni, F. Saleri, *Introduzione al Calcolo Scientifico*, Springer, (2002).