Minimi quadrati

5 dicembre 2007

1 Approssimazione ai minimi quadrati

Si digiti sulla shell di Matlab/Octave

```
>> x=0:0.01:2*pi;
>> y=sin(2*x)+(10^(-1))*rand(size(x));
>> plot(x,y,'r-');
```

Dal grafico si capisce che la funzione può essere interpretata come una *perturbazione* della funzione $\sin(2x)$ nell'intervallo $[0,2\pi]$. Ci interessa approssimare non tanto la funzione plottata bensì $\sin(2x)$ (che in qualche modo è la funzione senza *rumore*).
Osserviamo che non ha senso utilizzare un interpolante polinomiale p di grado N nè una spline interpolante visto che *ricostruirebbero* la funzione *perturbata*.
Scriviamo sulla shell di Matlab/Octave `help polyfit`. In una recente release di Matlab appare

```
 POLYFIT Fit polynomial to data.
    POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a polynomial P(X)
    of degree N that fits the data, P(X(I))~=Y(I), in a least
    -squares sense.
```

In altri termini `polyfit` calcola i coefficienti del polinomio p_N di grado N che *meglio* approssima (in norma 2 discreta) la funzione f avente nel vettore di nodi X i valori Y (cioè $Y(i) := f(X(i))$). Questo punto è delicato [7]. In pratica si cerca il polinomio p_N tale che è minima la quantità

$$\|f - P_N\|_{2,d} = \sqrt{\sum_i |f(x_i) - P_N(x_i)|^2}.$$

Digitiamo quindi in un file `minimiquadrati.m`

```
a=0; b=2*pi;
h=0.01;
x=a:h:b;
y=sin(2*x)+(10^(-1))*rand(size(x));
```

```
for n=2:8
    coeff=polyfit(x,y,n); % VALUTAZIONE COEFF.
                          % MIGLIORE APPROX. ("M.A.").

    z=polyval(coeff,x);   % VALORE M.A. NEI NODI "x".
    err2=norm(z-y,2);
    errinf=norm(z-y,inf);

    u=0:(h/4):2*pi;      % NODI TEST.
    v=polyval(coeff,u);  % VALORE M.A. IN NODI TEST.

    plot(x,y,'r-',u,v,'k:');
    fprintf('\n \t [GRADO]: %2.0f [ERR. 2]: %2.2e',n,err2);
    fprintf(' [ERR. INF]: %2.2e',errinf);
    pause(5);
end
```

Osserviamo che

1. `polyval` valuta nei nodi (di test) `u` il polinomio avente coefficienti `coeff` (ordinati dal grado n fino al grado 0);

2. il comando `pause` mette l'esecuzione in pausa per qualche secondo (5 nel nostro caso); la continua successivamente.

Per calcolare gli errori assoluti commessi abbiamo valutato non solo $\|f - P_N\|_{2,d}$ ma pure

$$\|f - P_N\|_{\infty,d} := \max|f(x_i) - P_N(x_i)|.$$

Dal punto di vista numerico se il grado è basso, in virtù delle concavità e delle convessità di $\sin(2x)$, il polinomio p_N fornisce un'approssimazione scadente, mentre migliora per $N \geq 5$. Osserviamo che per $N > 10$ tale routine incorre in problemi di condizionamento e stampa un warning del tipo

```
Warning: Polynomial is badly conditioned. Remove repeated data
         points or try centering and scaling as described in
         HELP POLYFIT.
```

Vediamo ora i risultati:

```
>> minimiquadrati

          [GRADO]:  2 [ERR. 2]: 1.63e+001 [ERR. INF]: 1.16e+000
          [GRADO]:  3 [ERR. 2]: 1.50e+001 [ERR. INF]: 1.17e+000
          [GRADO]:  4 [ERR. 2]: 1.50e+001 [ERR. INF]: 1.17e+000
          [GRADO]:  5 [ERR. 2]: 5.48e+000 [ERR. INF]: 6.48e-001
          [GRADO]:  6 [ERR. 2]: 5.48e+000 [ERR. INF]: 6.45e-001
          [GRADO]:  7 [ERR. 2]: 1.23e+000 [ERR. INF]: 1.56e-001
          [GRADO]:  8 [ERR. 2]: 1.23e+000 [ERR. INF]: 1.51e-001
```

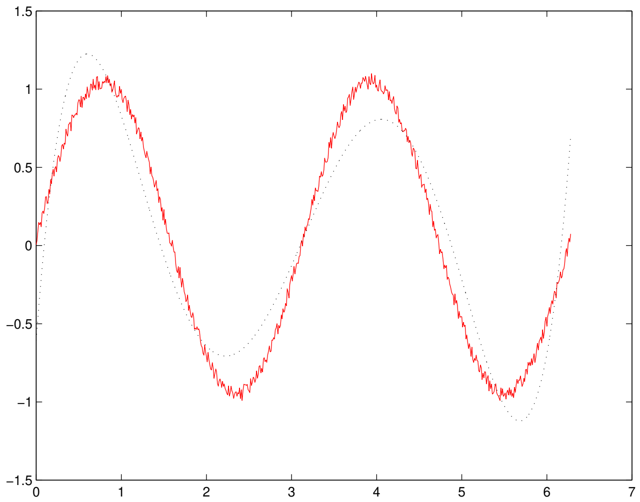

Figure 1: Grafico che illustra l'approssimazione ai minimi quadrati di grado 5 su una *perturbazione* della funzione $\sin(2x)$ (campionamento in nodi equispaziati)).

Ricordiamo che in generale, non ha senso cercare un grado troppo alto del polinomio *di miglior approssimazione* p_N in quanto si otterrebbe a partire da un certo valore il polinomio interpolante, mentre un grado troppo basso, come già detto, non ricostruirebbe adeguatamente l'andamento della funzione f.

2 Qualche nota storica

Non è molto chiaro chi sia stato lo scopritore del metodo dei minimi quadrati [9]. In generale si da' credito a Gauss, il quale nel 1795 a 19 anni, ebbe tale idea che utilizzò in seguito nel 1801 per predirre la locazione dell'asteroide Cerere. L'astronomo Piazzi dopo aver scoperto Cerere ne perse la traccia visto l'orbita dietro il Sole, e Gauss fu capace di predirne il moto senza passare per le equazioni di Keplero permettendo all'astronomo ungherese Franz Xaver von Zach di ritrovarlo nella posizione indicata da Gauss.
Gauss non pubblicò il metodo fino al 1809 quando apparve nel secondo volume del suo lavoro *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.*
L'idea dei minimi quadrati fu pubblicata indipendentemente dal francese Adrien-Marie Legendre nel 1805 e dall'americano Robert Adrain nel 1808.

3 Online

Per ulteriori delucidazioni si considerino le seguenti pagine web

http://it.wikipedia.org/wiki/Minimi_quadrati
http://it.wikipedia.org/wiki/Minimi_Quadrati

http://www.dsm.units.it/\%7Ebellen/calcolo_numerico/CAPIT-4.PDF
http://www.mathworks.com/moler/leastsquares.pdf
http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares

References

[1] *K. Atkinson, Introduction to Numerical Analysis, Wiley, 1989.*

[2] *Bellen, homepage personale,* http://www.dsm.units.it/%7Ebellen/calcolo_numerico/CAPIT-4.PDF.

[3] *V. Comincioli, Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni, Mc Graw-Hill, 1990.*

[4] *S.D. Conte e C. de Boor, Elementary Numerical Analysis, 3rd Edition, Mc Graw-Hill, 1980.*

[5] *The MathWorks Inc.,* http://www.mathworks.com/moler/leastsquares.pdf.

[6] *The MathWorks Inc., Numerical Computing with Matlab,* http://www.mathworks.com/moler.

[7] *A. Quarteroni e F. Saleri, Introduzione al calcolo scientifico, Springer Verlag, 2006.*

[8] *A. Suli e D. Mayers, An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, 2003.*

[9] *Wikipedia, Least Squares,* http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares.

[10] *Wikipedia, Minimi quadrati,* http://it.wikipedia.org/wiki/Minimi_quadrati.

[11] *Wikipedia, Minimi Quadrati,* http://it.wikipedia.org/wiki/Minimi_Quadrati.