Un solutore di tipo Nyström-Fejer-Picard per equazioni integrali nonlineari della teoria del trasporto

Alvise Sommariva, Marco Vianello, Enrico Facchinello

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università degli Studi di Padova

Alcuni problemi della teoria del trasporto si riconducono a cercare soluzioni integrabili non negative di equazioni *integrali* “quadratiche” del tipo

$$a(x)\phi(x) + \phi(x) \int_{\Omega} K(x,t)\phi(t) d\mu(t) = b(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

dove μ è una misura su Ω , $ab > 0$ in Ω , e $b/a, K(x, \cdot)b/a \in L^1_+(\Omega, \mu)$. In tale classe rientrano l’equazione di *Chandrasekhar* (in cui $\Omega = (0, 1)$, $d\mu(t) = dt$), alcuni casi puramente integrali dell’equazione di *Boltzmann* (ove $\Omega = (0, +\infty)$, $d\mu(t) = dt$), come pure le corrispondenti versioni finito-dimensionali (misura discreta su supporto finito), ottenute dalla discretizzazione tramite formule di quadratura a pesi positivi. Posto $\phi = b/(a(1+u))$, la (1) si trasforma nell’equazione di *Hammerstein*

$$u(x) = (Au)(x) = \int_{\Omega} \frac{k(x,t)}{1+u(t)} d\mu(t), \quad x \in \Omega; \quad k(x,t) = \frac{K(x,t)b(t)}{a(x)a(t)}, \quad (2)$$

le cui soluzioni misurabili non negative corrispondono a soluzioni $L^1_+(\Omega, \mu)$ di (1).

L’operatore A è decrescente sul cono delle funzioni misurabili nonnegative: assumendo che $K(x,t)b(x) = K(t,x)b(t)$ q.o. in $\Omega \times \Omega$, oppure che $\int_{\Omega} k(\cdot, t)d\mu(t) \in L^\infty_+(\Omega, \mu)$, si ottiene la convergenza (puntuale q.o.) dello *schema iterativo rilassato* di tipo Picard

$$u_{n+1/2} = E(u_{n+1/2}) + F(u_n); \quad u_{n+1} = (1-\omega)u_n + \omega u_{n+1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

($\omega \in (0, 1]$) all’unica soluzione misurabile non negativa di (1), $A = E + F$ essendo un opportuno splitting (che in dimensione finita può generare, ad esempio, i metodi di Jacobi e SOR nonlineari). La successione $\phi_n = b/(a(1+u_n))$ converge di conseguenza all’unica soluzione $L^1_+(\Omega, \mu)$ di (1). La parte computazionale del lavoro consiste nell’implementazione di un solutore di tipo *Nyström-Fejer-Picard* con rilassamento per la (1), che nei test numerici si rivela una valida alternativa ai più classici solutori basati sul metodo di Broyden.

Via Belzoni 7, 35131 Padova
E-mail address: alvise@math.unipd.it

1991 *Mathematics Subject Classification.* 65H10, 65J15, 65R20.

Lavoro finanziato dai progetti “Analisi numerica di modelli integrali e differenziali delle scienze applicate” (Univ. di Padova) e “Metodologie numeriche avanzate per il calcolo scientifico” (P.N. cofin. ’98).