

Svolgimento del Compito del 12/12/2013

1) data la funzione $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x^2+ax}{x+2}\right) & \text{se } x > 0 \\ 2e^{2x} + bx & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

1) determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$
t.c. g è continua in $x_0 = 0$

g è continua in $x_0 = 0$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = g(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} 2e^{2x} + bx = 2 = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x^2+ax}{x+2}\right) =$$

osserviamo
che questo
tende a 0
per $x \rightarrow 0^+$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \frac{x^2+ax}{x+2} \frac{\sin\left(\frac{x^2+ax}{x+2}\right)}{\frac{x^2+ax}{x+2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \frac{x^2+ax}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+a}{x+2} = \frac{a}{2}$$

g è continua in $x_0 = 0$ se e solo se

$$\frac{a}{2} = 2, \quad \text{quindi } a = 4.$$

2) Determinare i valori dei parametri per i

quasi g è derivabile in $x_0 = 0$.

Poiché derivabile $\Rightarrow$ continua consideriamo solo i valori per i quali g è continua, cioè $a = 4$

g è derivabile se e solo se

$$g'_-(0) = g'_+(0)$$

$$g'_-(0) = \left. \frac{d}{dx} (2e^{2x} + bx) \right|_{x=0} = (4e^{2x} + b) \Big|_{x=0} = 4 + b$$

$$g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} \sin\left(\frac{x^3 + ax}{x+2}\right) - 2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin\left(\frac{x^3 + ax}{x+2}\right) - 2x}{x^2}$$

Abbiamo già osservato che $\frac{x^3 + 4x}{x+2} \rightarrow 0$ se $x \rightarrow 0$.

Ricordiamo lo sviluppo di Taylor di $\sin t$

$$\sin t = t + o(t^2), \text{ quindi}$$

$$\sin\left(\frac{x^3 + 4x}{x+2}\right) = \frac{x^3 + 4x}{x+2} + \underbrace{o\left(\left(\frac{x^3 + 4x}{x+2}\right)^2\right)}$$

$$\text{infatti: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o\left(\left(\frac{x^3 + 4x}{x+2}\right)^2\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o\left(\left(\frac{x^2 + 4x}{x+2}\right)^2\right)}{\left(\frac{x^2 + 4x}{x+2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^2 + 4x}{x+2}\right)^2 \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{o\left(\left(\frac{x^2 + 4x}{x+2}\right)^2\right)}{\left(\frac{x^2 + 4x}{x+2}\right)^2}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2 + 4x}{x+2}\right)^2}_{\downarrow 2^2} = 0$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin\left(\frac{x^2 + 4x}{x+2}\right) - 2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2 + 4x}{x+2} + o(x^2) - 2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4x - 2x(x+2)}{(x+2)x^2} + \frac{o(x^2)}{\underbrace{(x+2)x^2}_{\downarrow 0}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{(x+2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$$

Quindi f è derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se
 $a = 4$ e $b = -\frac{3}{2}$.

2) $f(x) = \frac{(x+1)e^{-|x+1|}}{x}$

1) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$2) A = \mathbb{R}^*$$

$\forall x_0 \in A \cap \text{dom } f$ f è continua in x_0 , quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

I limiti per $x_0 \in A \setminus \text{dom } f$ sono:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^{-|x+1|}}{x} = 0$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)e^{-|x+1|}}{x} = 0$$

$\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$ $\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)e^{-|x+1|}}{x} = +\infty$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)e^{-|x+1|}}{x} = -\infty$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0^-} > 0$

3) $x=0$ è un asintoto verticale

$y=0$ è un asintoto orizzontale

non ci sono asintoti obliqui

4) Il teorema sull'algebra delle derivate e il teorema di derivazione delle funzioni composte implicano che f è derivabile in $\text{dom } f \setminus \{-1\}$

perché in $x = -1$ si annulla l'argomento del logaritmo assoluto

$$\text{dom } f \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Inoltre $\forall x > -1$ ($x \neq 0$)

$$f(x) = \frac{(x+1)e^{-x-1}}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[e^{-x-1} - (x+1)e^{-x-1}]x - (x+1)e^{-x-1}}{x^2} = \\ &= e^{-x-1} \left[\frac{\cancel{x} - x^2 - \cancel{x} - x - 1}{x^2} \right] = \\ &= -e^{-x-1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

e $\forall x < -1$

$$f(x) = \frac{(x+1)e^{x+1}}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[e^{x+1} + (x+1)e^{x+1}]x - (x+1)e^{x+1}}{x^2} \\ &= e^{x+1} \frac{(\cancel{x} + x^2 + x - \cancel{x} - 1)}{x^2} = e^{x+1} \frac{(x^2 + x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

Studiamo la derivabilit  in $x_0 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -e^{-x-1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{x+1} \frac{(x^2 + x - 1)}{x^2} = -1$$

Quindi f   derivabile anche nel punto $x_0 = -1$,
 $f'(-1) = -1$

$$\text{e } B = \text{dom } f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

5) Per determinare gli intervalli di monotonia studiamo

il segno della derivata.

$$\underline{x > -1} \quad f'(x) = -e^{-x-1} \frac{(x^2 + x + 1)}{x^2} > 0$$

$$e^{-x-1} > 0 \quad \forall x$$

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x$$

$$x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

quindi $f'(x) > 0$ ogni

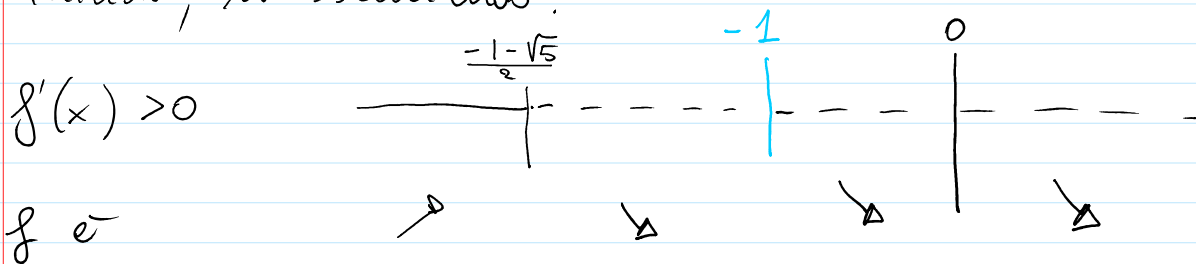
$$x < -1 \quad f'(x) = e^{x+1} \frac{(x^2 + x - 1)}{x^2} > 0$$

$$e^{x+1} > 0 \quad \forall x, \quad x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$x^2 + x - 1 > 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \text{se } x < -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \left(\text{ o } x > \underline{\underline{\underline{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}} > -1 \right)$$

Quindi, riassumendo:



f è monotona crescente in $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$

f è monotona decrescente in $[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0)$

e in $(0, +\infty)$

6) dallo studio del segno della derivata prima si deduce anche che $f'(x) = 0$ se e solo se

$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Dello studio della monotonia si conclude

da $\overline{2}$ $x_0 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo.

Non ci sono né massimi assoluti né minimi assoluti perché la funzione tende a $+\infty$ e a $-\infty$ (per $x \rightarrow 0^\pm$).

Non ci sono minimi relativi, né altri massimi relativi perché c'è un unico punto in cui si annulla la derivata, non ci sono punti del dominio in cui f non è derivabile, nel dominio non ci sono punti estremi di intervalli.

7) Vedi file "Grafico".

3) 1) Vedi appunti del corso e/o libro di testo.

2) $h(x) = 3x^8 - x^6$

$$h'(x) = 24x^7 - 6x^5 = 6x^5(4x^2 - 1) > 0$$

$$\text{se e solo se } x < -\frac{1}{2} \text{ o } x > \frac{1}{2}$$

$h(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, monotona strettamente crescente in $(\frac{1}{2}, +\infty)$ quindi è invertibile in $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

3) $(h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'(h^{-1}(2))}$

$$x = h^{-1}(2) \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = 2$$

$$3x^8 - x^6 = 2$$

$$x = 1 \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ e } h(1) = 2$$

Quindi

$$(h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{24x^7 - 6x^5} \Big|_{x=1} = \frac{1}{18}$$