

Definiamo le funzioni *seno iperbolico* e *coseno iperbolico*, rispettivamente, come

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \cosh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} . \end{aligned}$$

Si tratta, evidentemente, di funzioni continue.

Esercizio 1. Dimostrare la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dimostrare che $\sinh' = \cosh$ e $\cosh' = \sinh$.

Esercizio 3. Dimostrare che $\sinh x > 0$ se $x > 0$, $\sinh x < 0$ se $x < 0$ e $\sinh 0 = 0$. Si usi questo risultato, insieme all'esercizio 2, per dimostrare che

- $\cosh$ è decrescente su $(-\infty, 0)$ e crescente su $(0, +\infty)$. Dunque $\cosh$ ha un minimo assoluto in 0 e $\cosh 0 = 1$;
- $\sinh$ è crescente su $\mathbb{R}$ (si usino l'esercizio 2 e il punto precedente);
- si studino i limiti di $\sinh x$ e $\cosh x$ per $x \rightarrow \pm\infty$; dedurre che $\text{Im } \sinh = \mathbb{R}$ e $\text{Im } \cosh = [1, +\infty)$.

Tracciare i grafici di $\sinh$ e $\cosh$, osservando che $\sinh$ è una funzione dispari mentre $\cosh$ è pari.

Dall'esercizio 3 segue che $\sinh$ è invertibile su $\mathbb{R}$ (perché monotona), mentre $\cosh$ non è invertibile su $\mathbb{R}$ ma lo è su $[0, +\infty)$. Le inverse si chiamano *arcoseno iperbolico* (o anche *settore seno iperbolico*) e *arcocoseno iperbolico* (o anche *settore coseno iperbolico*) e si denotano, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \text{arcsinh} &:= (\sinh)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & (\text{o anche } \text{settsinh}) \\ \text{arccosh} &:= (\cosh|_{[1, +\infty)})^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) & (\text{o anche } \text{settcosh}) \end{aligned}$$

Tali funzioni si possono calcolare esplicitamente nel seguente modo. Supponiamo di voler calcolare $\text{arcsinh } t$; posto $x = \text{arcsinh } t$, dovrà evidentemente valere

$$t = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

da cui, con facili conti, $(e^x)^2 - 2te^x - 1 = 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene

$$e^x = t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

e la soluzione col segno $-$ è da scartare in quanto restituirebbe un valore negativo per e^x (verificare!). Dunque

$$x = \text{arcsinh } t = \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Esercizio 4. Procedendo in maniera analoga, si verifichi che

$$\text{arccosh } t = \log(t + \sqrt{t^2 - 1}) \quad \forall t \geq 1 .$$

(Attenzione! $\text{arccosh } t$ è definito solo per $t \geq 1$.)

Esercizio 5. Verificare che

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arccosh}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \quad \forall t \geq 1.\end{aligned}$$

Si noti che, a differenza di $\operatorname{arccosh}$, la funzione $\log(t + \sqrt{t^2-1})$ è definita per ogni $t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e, su questo insieme, ha per derivata $\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$.

Osservazione. Oltre che derivando direttamente, le derivate dell'esercizio 5 si possono ottenere anche tramite la formula di derivazione delle funzioni inverse.